P. SIMA • I. CURTU • V. BENCHE
LIDIA BENCHE • RUXANDRA LUGOJANU

PROBLEME DE MECANICĂ APLICATĂ ÎN ECONOMIA FORESTIERĂ

Scanned with OKEN Scanner

Prof. dr. ing. PETRE SIMA • Conf. dr. ing. IOAN CURTU
Prof. dr. ing. VICTOR BENCHE • Conf. dr. ing. LIDIA BENCHE
Şef de lucrări ing. RUXANDRA LUGOJANU

PROBLEME DE MECANICĂ APLICATĂ ÎN ECONOMIA FORESTIERĂ

Tovarăşului conf. univ. dr. ing.
Ctin Rădulescu
decanul fc. de TCM
cu alese sentimente
de stimă

Bucureşti, iulie 1981

EDITURA CERES
BUCUREŞTI — 1981

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Patrimoniul forestier al țării noastre constituie una din marile bogății naționale, care trebuie gospodărită și exploatată cu maximum de randament. Ca atare utilizarea mijloacelor de mecanizare modernă a operațiilor în cultura și exploatarea pădurilor, precum și în transportul și prelucrarea masei lemnoase, necesită cunoașterea unor elemente moderne de calcul al structurilor mecanice.

Lucrarea de față urmărește să pună la dispoziția tehnicienilor, maiștrilor și inginerilor ce își desfășoară activitatea de producție, cercetare și proiectare în diferite compartimente ale economiei forestiere, precum și elevilor, studenților și cadrelor didactice din învățământul de specialitate, un material complex, temeinic susținut din punct de vedere teoretic și mai ales practic, în domeniul mecanicii aplicate. Ea facilitează, de asemenea, activitatea de concepție, proiectare, cercetare și învățământ. Lucrarea vine, totodată, în sprijinul adîncirii și lărgirii mecanizării și automatizării în toate procesele tehnologice din economia forestieră.

Lucrarea, în felul ei, prin tematica abordată constituie o premieră în acest domeniu. Ca structură lucrarea cuprinde 12 capitole de mecanică, rezistența materialelor, teoria elasticității, mecanica fluidelor și acționării hidropneumatice. Fiecare capitol este precedat de considerații teoretice, după care se trece la o serie de probleme, de regulă rezolvate, ce constituie aplicații concrete ale mașinilor, utilajelor și instalațiilor tehnologice din economia forestieră. De menționat faptul că în cuprinsul lucrării sînt prezentate formule și relații de calcul, împreună cu unitățile de măsură corespunzătoare, utile activității de concepție și proiectare. De asemenea, pe lîngă o serie de tabele, relații și formule de strictă necesitate, în lucrare sînt prezentate o serie de diagrame originale, care permit facilitarea calculelor. Datorită spațiului grafic relativ redus lucrarea cuprinde numai o parte din multiplele aplicații ale mecanicii în economia forestieră.

În ansamblu această lucrare este o sinteză a unei activități de peste două decenii a autorilor în domeniul pregătirii cadrelor inginerești pentru economia forestieră.

Scanned with OKEN Scanner

Colectivul de autori ţine să aducă mulţumirile lor profesorilor universitari T. Redlov, I. Deutsch *şi* V. Olariu *de la Universitatea din Braşov pentru sugestiile şi sprijinul acordat, în decursul anilor, la elaborarea unei astfel de lucrări.*

Mulţumim şi pe această cale editurii CERES pentru interesul manifestat şi sprijinul acordat pentru apariţia acestei lucrări în cele mai bune condiţiuni.

Orice sugestie, de natură să contribuie la îmbunătăţirea lucrării, va fi bine primită şi autorii aduc celor în cauză mulţumiri cu anticipaţie.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

CAPITOLUL I

Echilibrul sistemelor de forţe 7

I. Consideraţii teoretice 7
II. Aplicaţii 20

CAPIOLUL II

Geometria maselor 52

I. Consideraţii teoretice 52
II. Aplicaţii 73

CAPITOLUL III

Echilibrul sistemelor mecanice utilizate în economia forestieră 117

I. Consideraţii teoretice 117
II. Aplicaţii 133

CAPITOLUL IV

Fenomenul frecării în sisteme mecanice din economia forestieră 185

I. Consideraţii teoretice 185
II. Aplicaţii 194

CAPITOLUL V

Echilibrul cablurilor 225

I. Consideraţii teoretice 225
II. Aplicaţii 230

CAPITOLUL VI

Elemente de teoria elasticităţii lemnului şi materialelor pe bază de lemn . . . 257

I. Consideraţii teoretice 257
II. Aplicaţii 274

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

Calculul de rezistență, rigiditate și stabilitate al structurilor mecanice realizate din lemn 281

I. Considerații teoretice 281
II. Aplicații 303

CAPITOLUL VIII

Studiul cinematic al mașinilor și al unor instalații tehnice din economia forestieră 435

I. Considerații teoretice 435

II. Aplicații 443

CAPITOLUL IX

Calculul dinamic al unor utilaje tehnologice din economia forestieră 469

I. Considerații teoretice 469
II. Aplicații 482

CAPITOLUL X

Probleme de statistica și dinamica fluidelor 535

I. Considerații teoretice 535
II. Aplicații 541

CAPITOLUL XI

Probleme de acționări hidraulice și pneumatice utilizate la unele utilaje și instalații tehnologice în economia forestieră 577

I. Considerații teoretice 577
II. Aplicații 577

CAPITOLUL XII

Vibrații la sisteme mecanice din economia forestieră 620

I. Considerații teoretice 620
II. Aplicații 632

Anexe 655

Bibliografie 665

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

ECHILIBRUL SISTEMELOR DE FORȚE

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

1.1. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE OARECARE

Fie $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ un număr de forțe, avînd modulii și direcțiile arbitrare, aplicate în punctele oarecare $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ale unui corp considerat rigid (nedeformabil) (fig. 1. *a*).

A reduce sistemul de forțe într-un punct arbitrar O, înseamnă să se aplice în O anumite elemente mecanice, care să fie echivalente cu sistemul de forțe dat.

Un sistem de forțe oarecare se reduce într-un punct arbitrar O la o forță rezultantă

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \qquad (1.1)$$

și la un moment rezultant

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \ldots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i). \qquad (1.2)$$

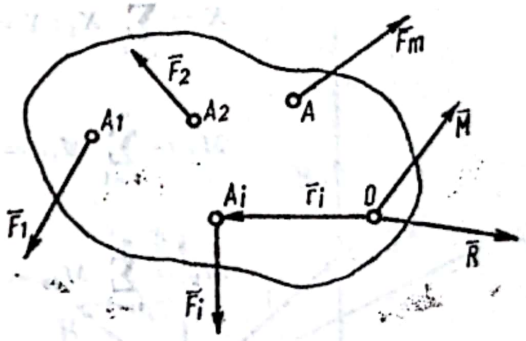


Fig. 1 a

Sistemul format din elementele mecanice $\bar{R}$ și $\bar{M}$ poartă denumirea de torsor, iar punctul O este denumit centru de reducere al sistemului de forțe dat.

Torsorul unui sistem de forțe oarecare $\{\bar{F}_i\}$ poate fi considerat ca un operator liniar aplicat sistemului de forțe dat. Liniaritatea operatorului torsor (notat τ_0) rezultă din cele două operații care se pot face cu sistemele de forțe, considerate vectori alunecători : însumarea, respectiv multiplicarea cu mărimi scalare.

Torsorul unui sistem de forțe se notează de obicei,

$$\tau_0\{\bar{F}_i\} = (\bar{R}, \bar{M}), \qquad (1.3)$$

O fiind centrul de reducere al sistemului de forțe considerat.

Pentru compararea torsorilor între ei, se utilizează noțiunea de *automoment*. Automomentul este produsul scalar al elementelor torsorului de reducere $\bar{R}$ și $\bar{M}$; expresia analitică a automomentului este :

$$T = \bar{R} \cdot \bar{M} = X \cdot M_x + Y \cdot M_y + Z \cdot M_z, \qquad (1.4)$$

Scanned with OKEN Scanner

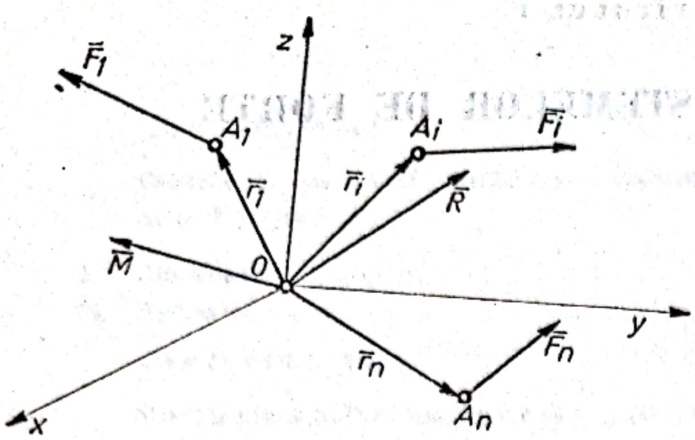


Fig. 1.b

în care X, Y și Z sînt proiecțiile pe axele unui triedru cartezian de referință, ale forței rezultante $\bar{R}$, iar M_x, M_y și M_z proiecțiile momentului rezultant $\bar{M}$ pe aceleași axe.

Expresia analitică a elementelor torsorului de reducere se obține raportînd sistemul de forțe dat, la un sistem de referință ortonormat, ca în figura 1. *b*.

Dacă X_i, Y_i și Z_i sînt proiecțiile pe axele sistemului de referință ale forței reprezentative $\bar{F}_i$ a sistemului de forțe dat, și x_i, y_i și z_i coordonatele punctului A_i, de aplicație al forței $\bar{F}_i$, expresiile analitice ale elementelor torsorului de reducere sînt respectiv :

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\bar{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\bar{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)\bar{k}; \\ \bar{M} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

iar proiecțiile pe cele trei axe ale vectorilor $\bar{R}$ și $\bar{M}$ vor fi

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i\,;\; Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i\,;\; Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i\,; \\ M_x &= \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - Z_i Y_i)\,; \\ M_y &= \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = \sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i)\,; \\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Intensitățile (modulii) elementelor torsorului de reducere sînt :

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2}\,; \\ M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i)\right]^2 + \ldots} \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Invarianții unui sistem de forțe sînt acele mărimi, scalare sau vectoriale, a căror expresie nu se schimbă în raport cu alegerea centrului de reducere. Invarianții unui sistem de forțe sînt :

— Forța rezultantă (invariantul vectorial al sistemului de forțe) :

$$\bar{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\bar{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\bar{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)\bar{k}; \tag{1.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

— Automomentul (invariantul scalar) :

$$T = \bar{R} \cdot \bar{M} = X \cdot M_x + Y \cdot M_y + Z \cdot M_z ; \tag{1.9}$$

automomentul mai este denumit *trinom invariant.*

— Momentul minim M_R, care reprezintă proiecţia momentului rezultant pe direcţia forţei rezultante ; expresia momentului minim va fi, deci :

$$\bar{M}_R = \frac{(\bar{R} \cdot \bar{M})}{R^2} \bar{R} = \frac{T}{R^2} \bar{R}. \tag{1.10}$$

Legea variaţiei momentelor. Momentul rezultant al unui sistem de forţe oarecare nu este o mărime invariabilă. Expresia momentului rezultant se schimbă, odată cu schimbarea centrului de reducere, în conformitate cu relaţia :

$$\bar{M}_{o_1} = \bar{M}_o + \overline{O_1O} \times \bar{R}. \tag{1.11}$$

Torsorul minimal şi axa centrală. Torsorul constituit din elementele mecanice invariante $\bar{R}$ şi $\bar{M}_R$ este denumit torsor minimal, $\bar{M}_R$ fiind cel mai mic moment obţinut în urma reducerii sistemului de forţe. Toate punctele din spaţiu, în care un sistem de forţe oarecare se reduc la un torsor minimal, se găsesc pe o dreaptă, denumită *axă centrală.* Axa centrală se mai poate defini, deci, ca fiind locul geometric al punctelor în care se obţine, în urma reducerii sistemului de forţe, un torsor minimal.

Ecuaţia vectorială a axei centrale este (fig. 1, *c*) :

$$\bar{r} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}}{R^2} R + \lambda \bar{R}, \tag{1.12}$$

unde λ este o mărime scalară constantă.

Ecuaţiile carteziene ale axei centrale sînt :

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} =$$

$$= \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z} = \lambda. \tag{1.13}$$

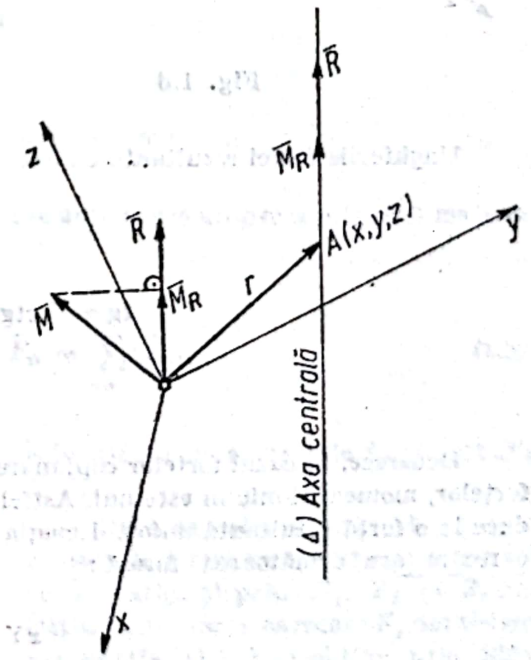


Fig. 1.c

1.2. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORŢE COPLANARE

Fie un sistem de n forţe $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \ldots, \bar{F}_n$ situate în acelaşi plan. Presupunînd că forţele, se găsesc în planul xOy şi alegînd ca centru de reducere originea sistemului de referinţă O, torsorul de reducere va fi format din forţa rezultantă $\bar{R}$, situată în planul forţelor şi momentul rezultant $\bar{M}$, perpendicular pe acest plan (fig. 1. *d*).

Elementele torsorului de reducere al sistemului de forţe coplanare sînt respectiv :

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i ; \\ \bar{M} &= \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \ldots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\bar{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\bar{j}; \\ \bar{M} &= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & z_i & 0 \\ X_i & Y_i & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

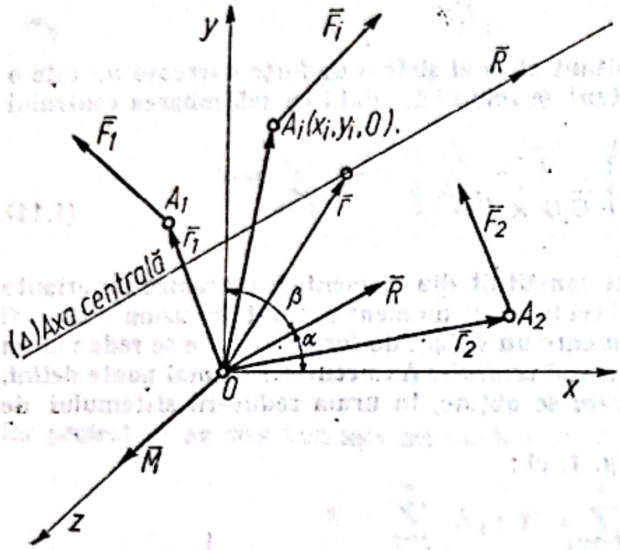


Fig. 1.d

Proiecțiile elementelor torsorului de reducere pe axele de coordonate sînt respectiv :

$$\left.\begin{aligned} &X = \sum_{i=1}^{n} X_i;\ Y = \sum_{1}^{n};\ Z = 0; \\ &M_x = M_y = 0; \\ &M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Modulii (intensitățile) vectorilor $\bar{R}$ și $\bar{M}$ sînt dați de relațiile :

$$\left.\begin{aligned} &R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}; \\ &M = M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Unghiurile forței rezultante cu axele Ox și Oy au expresiile :

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{Y}{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}. \tag{1.18}$$

Deoarece, în cazul forțelor coplanare momentul rezultant $\bar{M}$ este perpendicular pe planul forțelor, momentul minim este nul. Astfel, în punctele axei centrale sistemul de forțe se va reduce la o forță rezultantă unică. Ecuația axei centrale pentru un sistem de forțe coplanare oarecare are următoarea formă :

$$xY - yX = M_z. \tag{1.19}$$

1.3. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE PARALELE

Un sistem de forțe paralele se reduce într-un punct oarecare din spațiu la o forță rezultantă $\bar{R}$, paralelă cu direcția comună a forțelor, și la un moment rezultant $\bar{M}$ perpendicular pe direcția forțelor. În punctele axei centrale, sistemul de forțe paralele se reduce la o forță rezultantă unică $\bar{R}$. Dacă forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ sînt vectori legați, sistemul de forțe paralele prezintă o proprietate importantă : rotind forțele în același sens și cu același unghi, în jurul punctelor lor de aplicație, axa centrală se rotește și ea în același sens și cu același unghi în

Scanned with OKEN Scanner

jurul unui punct C, denumit centrul forţelor paralele (fig. 1. *e*). Centrul forţelor paralele este tocmai punctul de aplicaţie a forţei rezultante $\bar{R}$.

Notînd cu $\bar{r}_C$ vectorul de poziţie în raport cu originea sistemului de axe al punctului C, şi aplicînd sistemului de forţe teorema momentelor (teorema lui Varignon), rezultă următoarea expresie pentru vectorul de poziţie al centrului forţelor paralele :

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (1.20)$$

Din relaţia (1.20) se deduc uşor coordonatele centrului forţelor paralele (componentele scalare ale vectorului r_C) :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i};$$

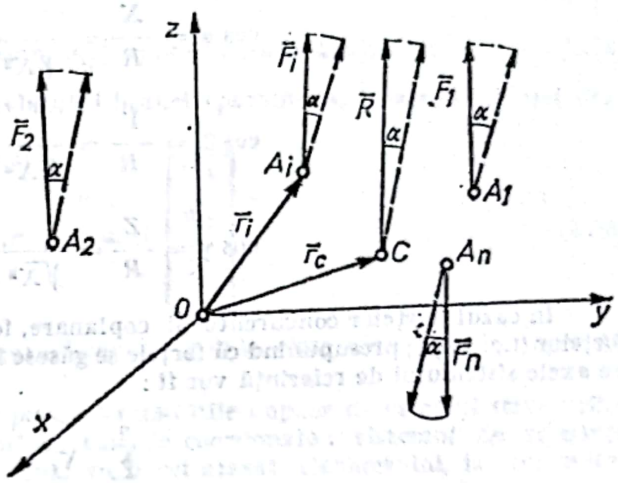


Fig. 1.e

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (1.21)$$

1.4. REDUCEREA FORŢELOR CONCURENTE

Un sistem de n forţe concurente $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$, care acţionează asupra unui punct material, se poate reduce la o forţă rezultantă :

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \qquad (1.22)$$

echivalentă sistemului de forţe dat (fig. 1. *f*).

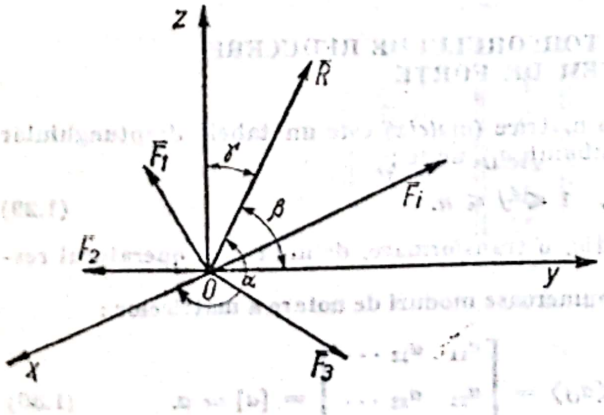


Fig. 1.f

Dacă se notează prin X, Y şi Z proiecţiile forţei rezultante pe axele triedrului $xOyz$ şi prin X_i, Y_i şi Z_i proiecţiile unei forţe oarecare F_i din sistem, din relaţia (1.22) se obţine prin identificare :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i;$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i. \qquad (1.23)$$

Valoarea absolută a forței rezultantei va fi, deci :

$$|\bar{R}| = R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2}. \quad (1.24)$$

Cosinușii directori ai forței rezultante sînt respectiv :

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{R} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}; \\ \cos\beta &= \frac{Y}{R} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}; \\ \cos\gamma &= \frac{Z}{R} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (1.25)$$

În cazul forțelor concurente și coplanare, forța rezultantă $\bar{R}$ va fi conținută în planul forțelor (fig. 1, g) ; presupunînd că forțele se găsesc în planul xOy, proiecțiile forței rezultante R pe axele sistemului de referință vor fi :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ și } Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i. \quad (1.26)$$

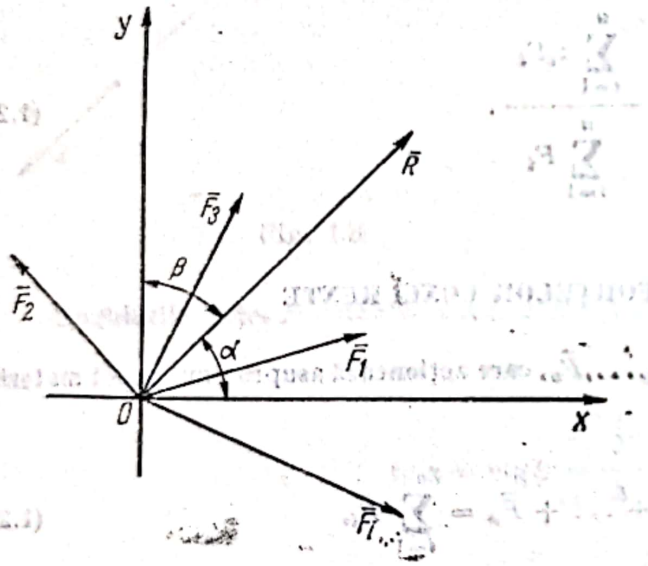


Fig. 1.g

Modulul forței rezultante va avea, în acest caz expresia :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}. \quad (1.27)$$

Unghiurile forței rezultante cu axele de coordonate se pot determina cu ajutorul relațiilor :

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{X}{R} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}. \quad (1.28)$$

1.5. FORMA MATRICIALĂ A TORSORULUI DE REDUCERE A UNUI SISTEM DE FORȚE

Generalități. În sensul cel mai general, o matrice (*matrix*) este un tabel dreptunghiular format din m linii și n coloane, notate prin simbolul a_{ij}, unde :

$$1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \quad (1.29)$$

Acest tabel de numere reprezintă, analitic, o transformare, definită prin operatorul respectiv, în raport cu o bază dată.

În literatura de specialitate se întîlnesc numeroase moduri de notare a matricelor :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} i \\ a \\ j \end{bmatrix} = (a_{ij}) = \langle a_{ij} \rangle = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \\ a_{21} & a_{22} \dots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = [a] = a. \quad (1.30)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dirac a mai introdus și alte notații speciale pentru matricele formate dintr-o singură coloană sau dintr-o singură linie :

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \{a_{i1}\} = |a_{i1}\rangle \text{ (numită vector ket)}; \tag{1.31}$$

$$[a_{11}a_{12}\dots a_{1m}] = (a_{ij}) = \langle a_{ij}| \text{ (numită vector bra)}, \tag{1.32}$$

denumirile provenind din descompunerea cuvîntului braket (paranteză) corespunzătoare produsului scalar al celor doi vectori :

$$\langle a_{ij}|a_{i1}\rangle = [a_{11}a_{12}\dots a_{1m}] \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}. \tag{1.33}$$

Matricele sînt des utilizate în tehnică, ajutînd considerabil la simplificarea multor operații de calcul.

Sisteme de referință. Coordonatele unui punct. Necesitățile impuse de calculul structurilor din statica construcțiilor cer alegerea a două sisteme de coordonate : sistemul de referință inițial, a, respectiv cel mutat, A. Sistemul inițial va fi cel atașat elementului, iar cel mutat (translatat și/sau rotit) va fi atașat structurii (ansamblului de elemente).

Coordonatele unui punct în raport cu cele două sisteme de referință, se vor putea deci scrie sub forma matricială :

$$\|a\| = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|, \tag{1.34}$$

respectiv

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\|. \tag{1.35}$$

Forma matricială a torsorului de reducere a unui sistem de forțe oarecare este următoarea :

$$\left\| \begin{matrix} \bar{R} \\ \bar{M} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i \\ \hline \sum_{i=1}^{n} M_{ix} \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iy} \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iz} \end{matrix} \right\|. \tag{1.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul sistemelor de forțe coplanare, rezultă:

$$\left\| \begin{matrix} \bar{R} \\ \bar{M} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} X \\ Y \\ M_z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iz} \end{matrix} \right\|. \tag{1.37}$$

Pentru sistemele de forțe paralele, torsorul de reducere are următoarea formă matricială:

$$\left\| \begin{matrix} \bar{R} \\ \bar{M} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} X \\ M_x \\ M_y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sum_{i=1}^{n} Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} M_{ix} \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iy} \end{matrix} \right\| \tag{1.38}$$

iar pentru un sistem de forțe concurente în spațiu:

$$\|\bar{R}\| = \left\| \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i \end{matrix} \right\|. \tag{1.39}$$

1.6. REDUCEREA GRAFICĂ A FORȚELOR COPLANARE

Să considerăm un număr n de forțe coplanare, $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$, aplicate în punctele $A_1, A_2 \ldots A_n$ ale unui rigid (fig. 1, *h*, pentru $n = 4$). Făcînd ca două din forțele date să alunece pe suporturile lor pînă în punctul lor de intersecție, acestea pot fi înlocuite cu o rezultantă, care, compusă cu cea de a treia din forțele date, este echivalentă cu o nouă rezultantă; procedeul grafic poate fi aplicat, principial, pînă la ultima forță a sistemului. Deoarece în anumite cazuri, punctele de intersecție ale unor forțe pot depăși cadrul hîrtiei de desen, în practica inginerească se utilizează un alt procedeu grafic, al poligonului forțelor și poligonului funicular, prezentat în cele ce urmează.

Se construiește poligonul forțelor, B_0, B_1, $B_2, \ldots B_n$ (fig. 1, *h*, *b*) și se determină forța rezultantă $\bar{R}$ (suma geometrică), în modul, direcție și sens. Se alege, apoi, un punct arbitrar, denumit pol, situat în planul forțelor și se consideră vectorii: $\overrightarrow{OB_0} = \bar{H}_0$, $\overrightarrow{OB_1} = \bar{H}_1, \ldots, \ldots, \overrightarrow{OB_n} = \bar{H}_n$, care sînt denumite *raze polare* și care sînt de natura unor forțe; se pot efectua următoarele descompuneri:

$$\bar{F}_1 = -\bar{H}_0 + \bar{H}_1,\ \bar{F}_2 = -\bar{H}_1 + \bar{H}_2, \ldots, \bar{F}_n = -\bar{H}_{n-1} + \bar{H}_n. \tag{1.40}$$

Rezultă prin urmare că, alegînd un punct arbitrar C_1 pe suportul forței $\bar{F}_1$ și ducînd drepte C_0C_1 și C_1C_2, respectiv paralele cu OB_0 și OB_1, se poate descompune forța $\bar{F}_1$ în componentele ei vectoriale $-\bar{H}_0$ și $\bar{H}_1$ (fig. 1, *h*, *a*); în continuare se descompune forța $\bar{F}_2$, aplicată în

Scanned with OKEN Scanner

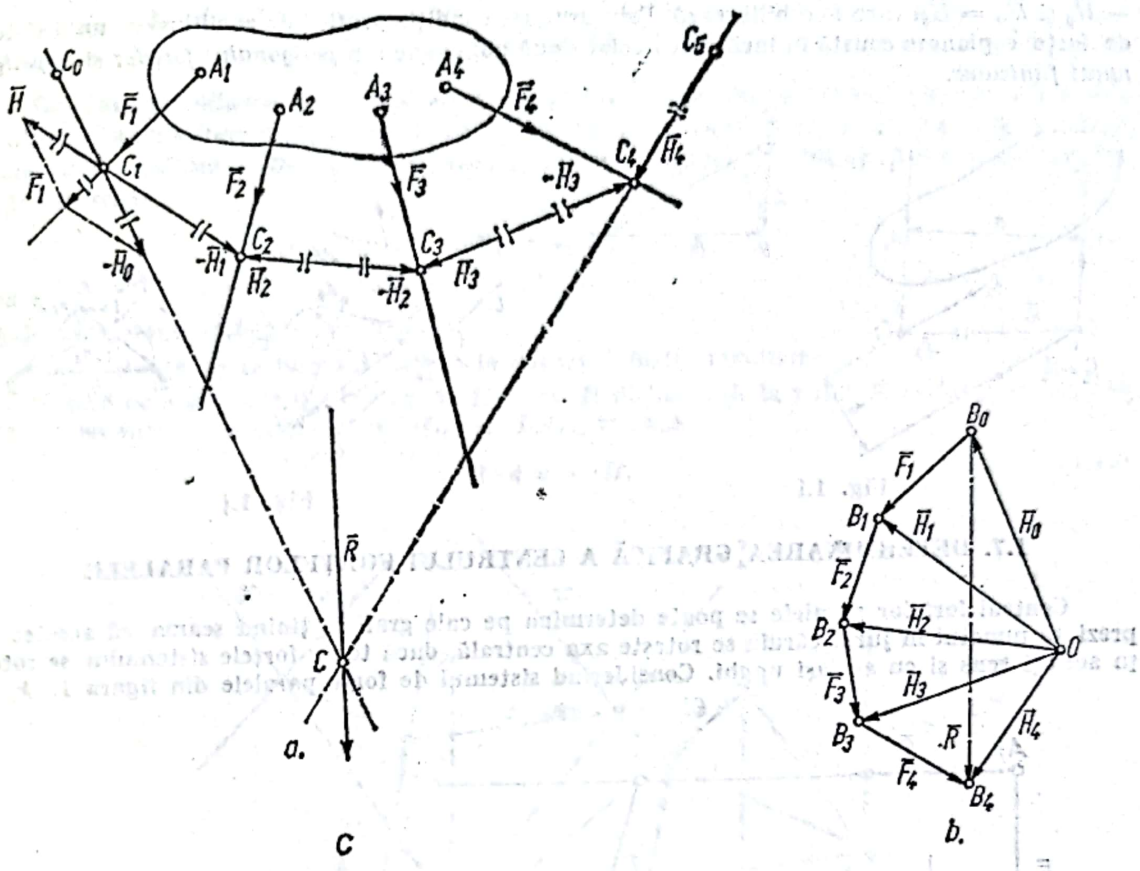


Fig. 1.h

punctul C_2 de pe suportul său, în componentele vectoriale $-\overline{H}_1$ și $\overline{H}_2$, cea din urmă având direcția C_2C_3, paralele cu OB_2; procedînd în mod analog pe mai departe, se va putea înlocui sistemul de forțe $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ cu sistemul echivalent

$$-\overline{H}_0, \overline{H}_1, -\overline{H}_1, \overline{H}_2, \ldots, -\overline{H}_{n-1}, H_n, \tag{1.41}$$

având drept suporturi linia poligonală $C_0C_1C_2 \ldots C_nC_{n+1}$, care poartă denumirea de poligon funicular. Însă, cu excepția primei și ultimei forțe ale sistemului (1.41), toate celelalte forțe își anulează, două cîte două, reciproc efectul, fiind direct opuse; se poate trage deci concluzia, că sistemul de forțe dat poate fi înlocuit prin forțele $-\overline{H}_0$ și $\overline{H}_n$, având ca suporturi laturile extreme ale poligonului funicular, concurente într-un punct C. Se observă, însă, că însumînd membru cu membru egalitățile (1.41), sau examinînd figura 1, *h*, *b*, se obține:

$$-\overline{H}_0 + \overline{H}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{R}, \tag{1.42}$$

ceea ce înseamnă că sistemul de forțe dat echilibrat cu suma vectorială $\overline{R}$ a forțelor $-\overline{H}_0$ și $\overline{H}_n$, concurente în punctul C.

Concluzia este deci următoarea: dacă un sistem de forțe coplanare admite o rezultantă, suportul ei trece prin punctul de intersecție al laturilor extreme ale poligonului funicular, iar modulul, direcția și sensul forței rezultante sînt date de vectorul care unește originea primei forțe cu extremitatea ultimei forțe din poligonul forțelor.

Construcția grafică a poligonului forțelor și poligonului funicular este totdeauna posibilă, cu condiția ca poligonul forțelor să rămînă deschis (punctele B_0 și B_n să nu coincidă).

În cazul particular, în care razele polare extreme $\overline{H}_0$ și $\overline{H}_2$ coincid, (fig. 1, *l*), sistemul de forțe dat se reduce la un cuplu de forțe, format din forțele $-\overline{H}_0$ și $\overline{H}_2$, având brațul de pîrghie *b*.

Este, de asemenea, posibil, ca laturile extreme ale poligonului funicular să se suprapună (fig. 1, *j*); în acest caz, evident, rezultanta $\overline{R}$ a sistemului de forțe coplanare este nulă. Aceasta înseamnă că sistemul de forțe coplanare: $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ este echivalent cu forțele direct opuse

$-\bar{H}_0$ și $\bar{H}_n = \bar{H}_0$, care se echilibrează. Prin urmare, condiția grafică de echilibru al unui sistem de forțe coplanare constă în închiderea celor două poligoane: a *poligonului forțelor* și a *poligonului funicular*.

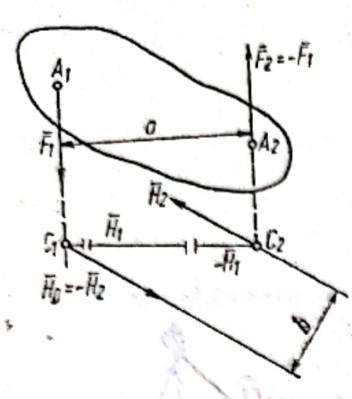
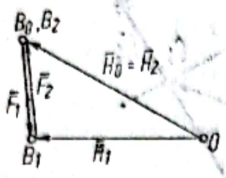
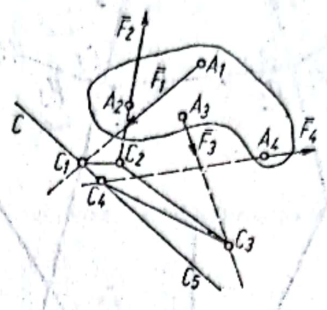


Fig. 1.i





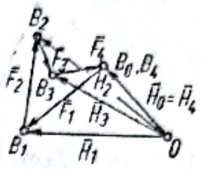


Fig. 1.j

1.7. DETERMINAREA GRAFICĂ A CENTRULUI FORȚELOR PARALELE

Centrul forțelor paralele se poate determina pe cale grafică, ținînd seama că acestea reprezintă punctul în jurul căruia se rotește axa centrală, dacă toate forțele sistemului se rotesc în același sens și cu același unghi. Considerînd sistemul de forțe paralele din figura 1. *k*, se

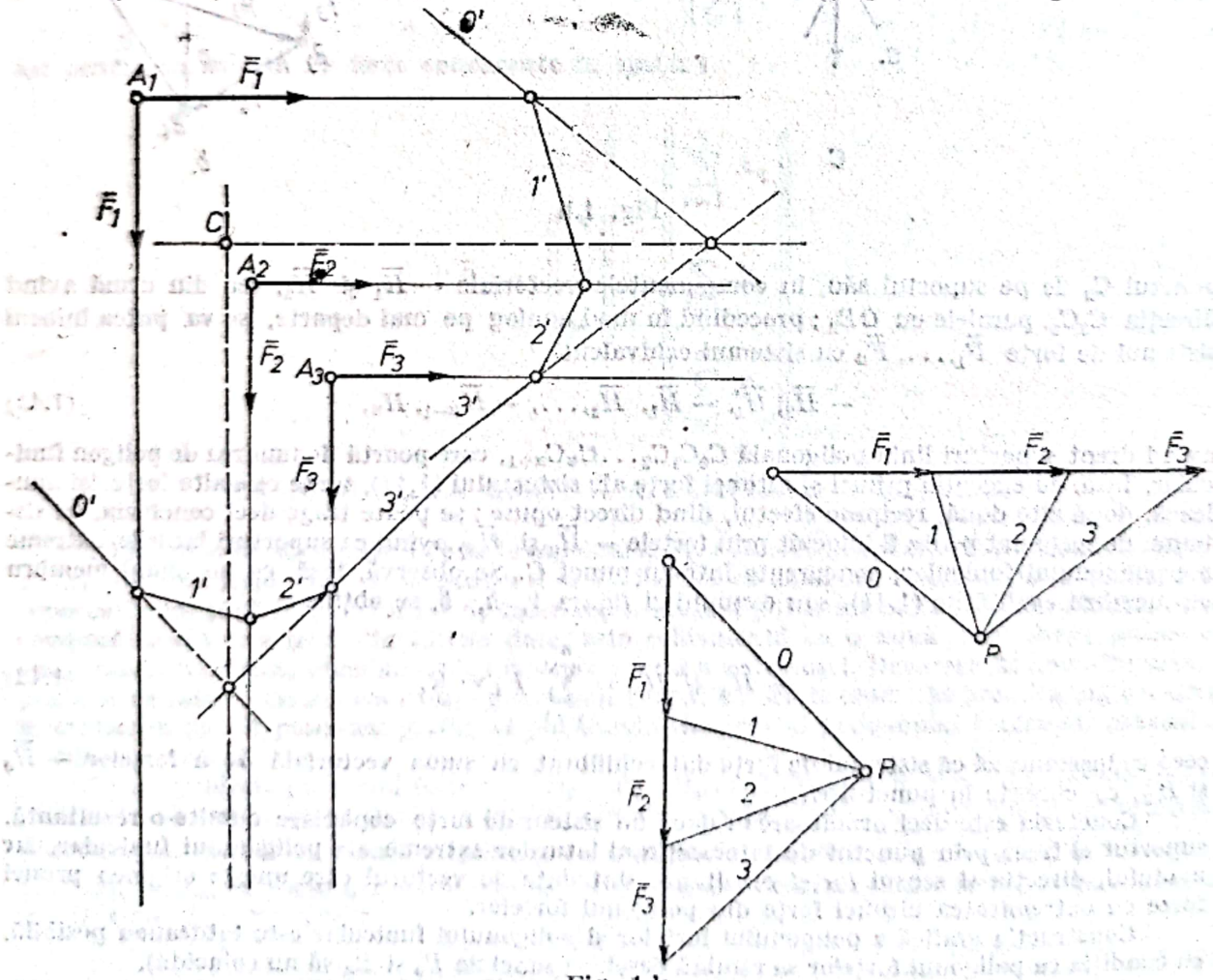


Fig. 1.k

construiește poligonul forțelor și poligonul funicular pentru două direcții care fac între ele un unghi de 90° (se poate alege și un alt unghi). Suporturile rezultantei vor trece prin punctele de intersecție ale laturilor *O'* și *O''*, fiind paralele cu vectorii sistemului. Punctul *C* de intersecție ale suporturilor rezultantei este centrul forțelor paralele.

Scanned with OKEN Scanner

1.8. DETERMINAREA GRAFICĂ A MOMENTULUI UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Cu ajutorul poligonului forțelor sau al poligonului funicular, se poate determina momentul rezultant al unui sistem de forțe coplanare. Fie sistemul forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ (fig. 1. *l*). Modulul momentului rezultant al sistemului de forțe în raport cu un punct arbitrar O din planul forțelor se poate scrie :

$$M_0 = R \cdot d, \tag{1.43}$$

în care :

R este modulul forței rezultante ;

d — distanța de la punctul O pînă la suportul forței rezultante $\bar{R}$.

Notînd cu s segmentul CD (fig. 1. *l*) și cu H distanța de la polul P la forța rezultantă $\bar{R}$, din asemănarea triunghiurilor ICD și PAB, rezultă :

$$R \cdot d = s \cdot H. \tag{1.44}$$

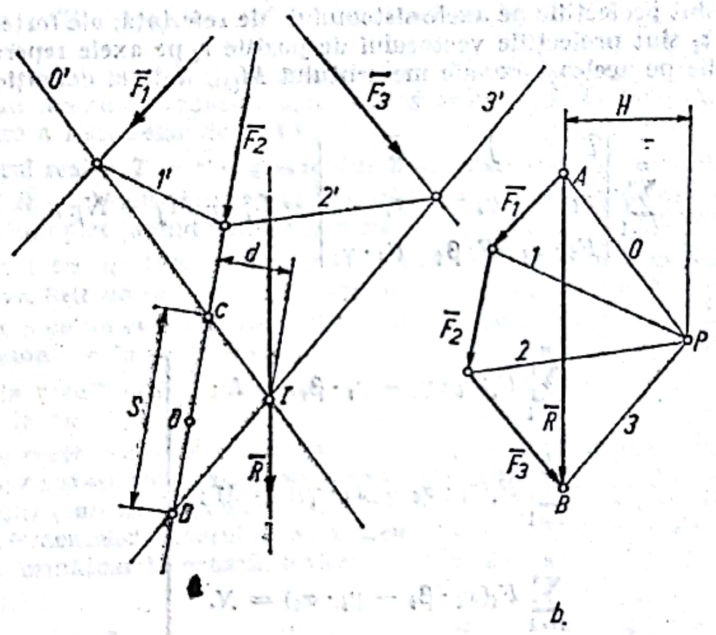


Fig. 1.1.

Din egalitățile (1.43) și (1.44), se deduce momentul unui sistem de forțe coplanare, în raport cu un punct O din același plan :

$$M_0 = s \cdot H \tag{1.45}$$

Evident că în practica inginerească, este necesar să se țină seama și de scara lungimilor, respectiv a forțelor.

1.9. DESCOMPUNEREA UNEI FORȚE DUPĂ n DIRECȚII OARECARE ÎN SPAȚIU

A descompune o forță $\bar{F}$ după n direcții oarecare din spațiu, înseamnă a determina componentele sale vectoriale $F_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ după direcțiile considerate. Fie o forță $\bar{F}$ și n direcții oarecare din spațiu, fiecare dintre acestea avînd cîte un versor e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; componentele F_i se vor putea exprima prin :

$$\bar{F}_i = F_i \bar{e}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Fie $\bar{r}_i$ vectorii de poziție corespunzători componentelor $\bar{F}_i$, în raport cu originea unui sistem de referință ortonormat. Componentele $\bar{F}_i$ ale forței $\bar{F}$ formează un sistem de forțe echivalent cu forța rezultantă F, ca urmare, ele vor satisface relațiile :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{F} \text{ și } \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \bar{M}_{(0)}. \tag{1.46}$$

Notînd prin $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ cosinusurile directoare ale componentelor $\bar{F}_i$ față de axele sistemului de referință, în virtutea primei condiții (1.46) se pot scrie relațiile :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\alpha_i = X; \sum_{i=1}^{n} F_i\beta_i = Y; \sum_{i=1}^{n} F_i\gamma_i = Z, \tag{1.47}$$

în care X, Y și Z sînt proiecțiile pe axele sistemului de referință, ale forței F.

Dacă x_i, y_i, z_i sînt proiecțiile vectorului de poziție r_i pe axele reperului considerat, iar L, M și N proiecțiile pe aceleași axe ale momentului $M_{(0)}$, a doua condiție (1.46) se va scrie sub forma :

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_i \cdot \alpha_i & F_i \beta_i & F_i \cdot \gamma_i \end{vmatrix} = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k},$$

din care se obține :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_i(y_i \cdot \gamma_i - z_i \cdot \beta_i) &= L; \\ \sum_{i=1}^{n} F_i(z_i \cdot \alpha_i - x_i \cdot \gamma_i) &= M; \\ \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i \cdot \beta_i - y_i \cdot \alpha_i) &= N. \end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

Introducînd coordonatele plükeriene ale versorilor $\bar{e}_i$:

$$u_i = \alpha_i, v_i = \beta_i, w_i = \gamma_i;$$

$$l_i = (y_i w_i - z_i v_i), m_i = (z_i u_i - x_i w_i), n_i = (x_i v_i - y_i u_i),$$

relațiile (1.47) și (1.48) se pot scrie sub forma :

$$\left.\begin{aligned} u_1F_1 + u_2F_2 + \ldots + u_nF_n &= X, \\ v_1F_1 + v_2F_2 + \ldots + v_nF_n &= Y, \\ w_1F_1 + w_2F_2 + \ldots + w_nF_n &= Z, \\ l_1F_1 + l_2F_2 + \ldots + l_nF_n &= L, \\ m_1F_1 + m_2F_2 + \ldots + m_nF_n &= M, \\ n_1F_1 + n_2F_2 + \ldots + n_nF_n &= N, \end{aligned}\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

au sub formă matriceală :

$$\begin{Vmatrix} u_1 u_2, \ldots, u_n \\ v_1 v_2, \ldots, v_n \\ w_1 w_2, \ldots, w_n \\ l_1 l_2, \ldots, l_n \\ m_1 m_2, \ldots, m_n \\ n_1 n_2, \ldots, n_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{Vmatrix}. \tag{1.49}$$

Conform teoremei lui Kronecker — Capelli, acest sistem de ecuații va fi compatibil dacă și numai dacă rangul matricii coeficienților necunoscutelor $F_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ este egal cu rangul matricii lărgite cu coloana termenilor liberi (formată din coordonatele plükeriene și termenii liberi).

1.10. CAZURI POSIBILE DE REDUCERE A SISTEMELOR DE FORȚE

În raport de valorile invarianților unui sistem de forțe, precum și de momentul său rezultant, calculat cu un centru de reducere ales în mod arbitrar, se pot stabili următoarele cazuri posibile de reducere a sistemelor de forțe :

1). Invariantul scalar $T = \bar{R} \cdot \bar{M}$ este diferit de zero, ceea ce înseamnă că $\bar{R} \neq \bar{O}$, $\bar{M} \neq \bar{O}$ și că vectorii $\bar{R}$ și $\bar{M}$ nu sînt perpendiculari ; în acest caz, sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal complet (avînd ambele elemente, $\bar{R}$ și $\bar{M}_R$, diferite de zero).

2). Invariantul scalar $T = 0$, însă forța rezultantă $\bar{R} \neq O$; aceasta atrage după sine $\bar{M}_R = 0$. În acest caz, într-un centru de reducere oarecare, sistemul de forțe este echivalent cu o forță rezultantă $\bar{R}$ și cu un cuplu, al cărui moment $\bar{M}$ este perpendicular pe R, iar în punctele axei centrale, sistemul de forțe se reduce la o forță rezultantă $\bar{R}$.

3). Dacă forța rezultantă $\bar{R} = 0$ (ceea ce atrage după sine $T = 0$) și $\bar{M} \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la un cuplu.

4). În fine, în cazul în care $\bar{R} = 0$ și $\bar{M} = 0$, se spune că sistemul este echivalent cu zero, oricare ar fi centrul de reducere, ceea ce înseamnă că forțele sistemului se echilibrează.

Ecuațiile scalare (carteziene) de echilibru se obțin proiectînd pe axele de coordonate expresiile vectoriale ale elementelor torsorului de reducere. Astfel, pentru un sistem de forțe oarecare, din (1.6) se deduc următoarele ecuații scalare de echilibru :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 ; \\ &\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 ; \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0 ; \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

Pentru un sistem de forțe coplanare oarecare, din (1.17) se obțin următoarele ecuații scalare de echilibru :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \tag{1.51}$$

De asemenea, pentru un sistem de forțe, paralele între ele și paralele cu axa Oz, rezultă următoarele ecuații scalare de echilibru :

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{ix} ; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0. \tag{1.52}$$

Scanned with OKEN Scanner

În fine, din (1.28), se deduc ecuațiile scalare de echilibru pentru un sistem de forțe concurente în spațiu; rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0. \tag{1.53}$$

De menționat că, în alte cazuri (mai particulare), ecuațiile scalare de echilibru se obțin determinînd torsorul de reducere și anulîndu-i elementele (forța rezultantă R și momentul rezultant M).

II. APLICAȚII

1.1. Un buștean de formă cilindrică și greutate P se sprijină în punctele A și B pe două plane fixe, înclinate cu unghiurile α și β față de orizontală, ca în figura 1.1, *a*.

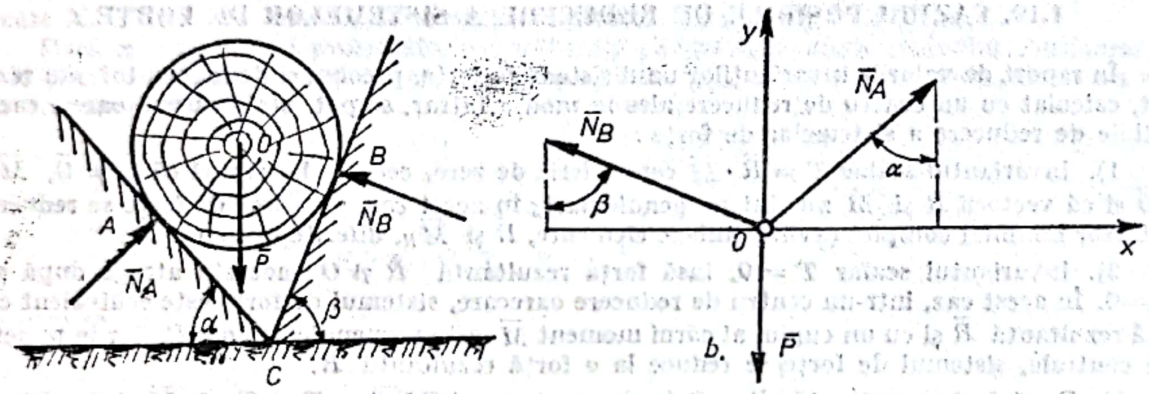


Fig. 1.1

Să se determine reacțiunile din punctele A și B.

Rezolvare. Reacțiunile din punctele de rezemare a bușteanului cu planele AC și BC sînt perpendiculare pe cele două plane și trec prin centrul O al acestuia. Alegînd sistemul de referință ca în figura 1.1, *b* și scriind ecuațiile de proiecții pe axele de coordonate, se obține:

$$\sum X_i = 0; \; N_A \sin \alpha - N_B \sin \beta = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; \; N_A \cos \alpha + N_B \cos \beta - P = 0.$$

În urma rezolvării sistemului de ecuații obținut, se obțin reacțiunile din reazemele A și B:

$$N_A = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} P; \quad N_B = \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} P.$$

1.2. Un acoperiș de casă este susținut de către o construcție din lemn, formată din mai multe ferme triunghiulare OAB; grinzile OA și OB se numesc *arbaletrieri*, iar grinda AB, *coardă*. Cunoscînd că în punctul în care se întîlnesc axele grinzilor OA și OB acționează o forță $G = 6500$ daN, se cere să se determine forțele ce acționează asupra arbaletrierilor OA și OB, a corzii AB și a zidurilor (fig. 1.2).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Determinăm forțele care acționează asupra arbaletrierilor OA și OB, efectuînd echilibrul nodului O :

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i = 0\,;\; -G + 2N \cdot \cos 60^\circ = 0.$$

Rezultă :

$$N = G = 6500 \text{ daN}.$$

Forțele $\bar{N}$ se descompun în punctele A și B în componentele $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ care au următoarele valori:

$$N_1 = N \cdot \cos 30^\circ = 6500 \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 5620 \text{ daN}\,;$$

$$N_2 = N \cdot \sin 30^\circ = 6500 \frac{1}{2} =$$

$$= 3250 \text{ daN}.$$

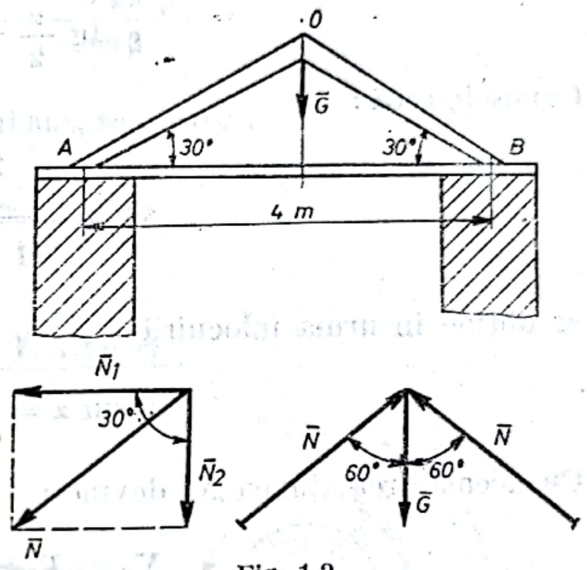


Fig. 1.2

Prin urmare, forța care solicită coarda AB este $N_1 = 5620$ daN, iar forța care solicită zidul va fi :

$$N_2 = 3250 \text{ daN}.$$

1.3. Trunchiul unui arbore de formă cilindrică are raza r și greutatea P, și este legat de un plan orizontal fix, prin cablul $ACBD$ (fig. 1.3), în care se produce tensiunea N. Să se determine mărimea reacțiunii N din punctul E, dacă distanța $AE = EB = a$.

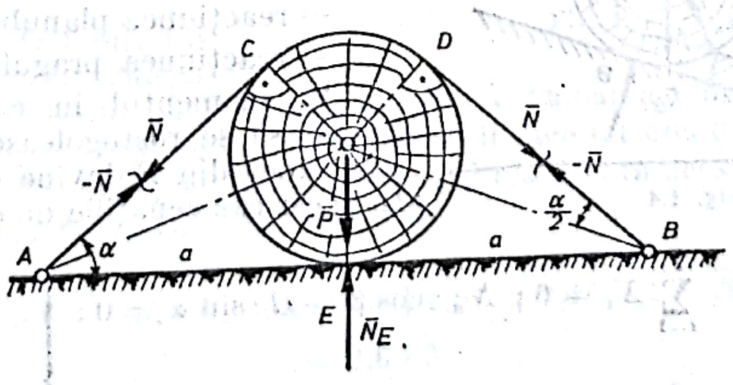


Fig. 1.3

Rezolvare. Scriem ecuația de proiecții pe verticală a celor patru forțe ; avem :

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 0\,;\; N_E - P + 2N \cdot \sin \alpha = 0.$$

Rezultă :

$$N_E = P - 2 \cdot N \cdot \sin \alpha$$

Din triunghiul AOE, deducem însă :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{a}.$$

Cunoscînd că :

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

se obţine în urma înlocuirii

$$\sin \alpha = \frac{2a \cdot r}{a^2 + r^2}.$$

Cu aceasta reacţiunea N_E devine :

$$N_E = P + \frac{4 \cdot a \cdot r}{a^2 + r^2} N.$$

1.4. Un buştean în formă cilindrică, cu greutatea G şi raza R este rezemat pe un plan înclinat şi oprit de un prag de înălţime a (fig. 1.4). Să se determine înclinarea planului cînd bușteanul trece peste prag.

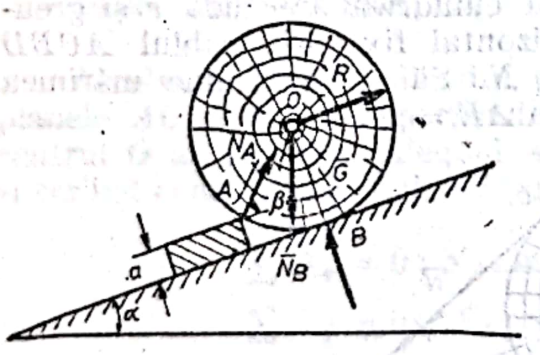


Fig. 1.4

Rezolvare. Eliminînd bușteanul de legăturile sale mecanice, forţele care acţionează asupra acestuia sînt :

— greutatea proprie G;

— reacţiunea planului înclinat N_B;

— reacţiunea pragului N_A.

În momentul în care bușteanul începe să se rostogolească peste prag, reacţiunea din B devine egală cu zero. În acest caz ecuaţiile de echilibru sînt :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} X_i = 0 ;\ N_A \cdot \cos \beta - G \cdot \sin \alpha = 0 ; \\ \sum_{i=1}^{2} Y_i = 0 ;\ N_A \cdot \sin \beta - G \cdot \cos \alpha = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

în care :

$$\sin \beta = \frac{R - a}{R}.$$

Eliminînd reacţiunea N_A între aceste două ecuaţii, se obţine :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta,$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin \beta}.$$

Înlocuind $\sin \beta$ cu expresia dată mai sus, se obţine :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{a(2R - a)}}{R - a},$$

şi prin urmare :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a(2R - a)}}{R - a}.$$

1.5. Trunchiul unui arbore este ancorat cu trei cabluri, ce acţionează asupra acestuia cu forţele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ şi $\bar{F}_3$, situate în acelaşi plan şi formînd între ele unghiuri de 105°, 135° şi 120° (fig. 1.5). Să se determine în valoare şi direcţie rezultanta acestor forţe dacă :

$F_1 = 1{,}8\ kN$, $F_2 = 2{,}4\ kN$

şi $F_3 = 3kN$.

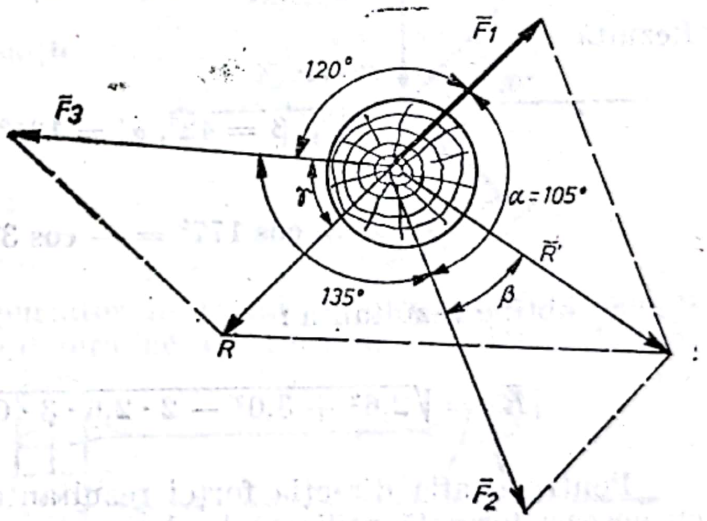


Fig. 1.5

Rezolvare. În figura 1.5 se poate urmări soluţia vectorială dată problemei. Pentru a calcula valoarea numerică a forţei rezultante $\bar{R}$ şi unghiul pe care rezultanta îl face cu una din forţele date, se compun mai întîi forţele $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ şi apoi rezultanta acestora $\bar{R}'$ cu cea de a treia forţă F_3. Rezultanta $\bar{R}'$ va fi

$$|\bar{R}'| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} = \sqrt{1{,}8^2 + 2{,}4^2 - 2 \cdot 1{,}8 \cdot 2{,}40{,}2588} =$$
$$= 2{,}6\ kN.$$

Compunînd apoi forţele $\bar{R}'$ şi $\bar{F}_3$, se obţine forţa $|\bar{R}|$:

$$|\bar{R}| = \sqrt{R'^2 + F_3^2 + 2R' \cdot F_3 \cos \alpha},$$

unde s-a notat :

$$\alpha' = 135° + \beta;$$

determinăm, acum, unghiul β:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Ţinînd seama că

$$a=18,\quad b=24 \text{ şi } c=26,$$

rezultă

$$p=\frac{18+24+26}{2}=34;$$

prin urmare

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(34-24)(34-26)}{34(34-18)}}=0{,}3834.$$

Rezultă

$$\frac{\beta}{2}=21°,\ \beta=42°,\ \alpha'=135°+42°=177°;$$

$$\cos\alpha'=\cos 177°=-\cos 3°=-0{,}99863.$$

Se obţine rezultanta:

$$|\bar{R}|=\sqrt{2{,}6^2+3{,}0^2-2\cdot 2{,}6\cdot 3\cdot 0{,}99863}=0{,}462 \text{ kN}.$$

Pentru a afla direcţia forţei rezultante $\bar{R}$, se determină unghiul γ cu aceeaşi formulă utilizată la determinarea unghiului β:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(30{,}13-30)(30{,}13-4{,}24)}{30{,}13(30{,}13-26)}}=0{,}1643;$$

rezultă

$$\frac{\gamma}{2}=9°20'$$

şi deci

$$\gamma=18°40'.$$

1.6. Stîlpul AB care susţine cablul aerian, este ancorat cu doi tiranţi AC şi AD, la care $\sphericalangle CBD=90°$. Să se determine efortul în stîlp şi în tiranţi în funcţie de unghiul format de una din cele două ramuri ale cablului cu suprafaţa CBA. Ramurile cablului sînt orizontale şi perpendiculare între ele. Forţele de tracţiune sînt ambele egale cu F (fig. 1.6.)

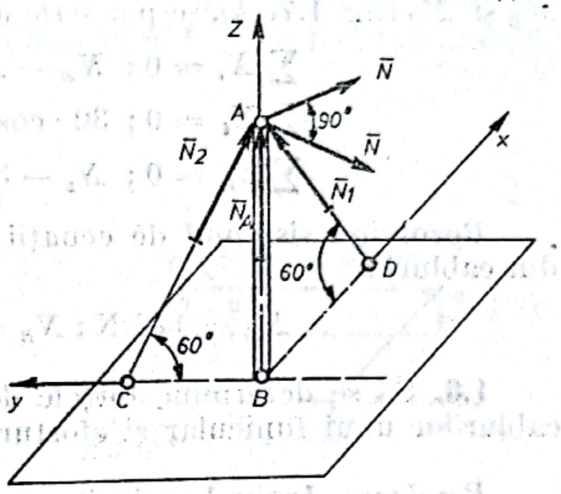
Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se scriu cele trei ecuații de echilibru pentru un sistem de forțe concurente în spațiu; rezultă:

$$\sum X_i = 0;\ -N_1 \cos 60^\circ + F\sin(\varphi - 90^\circ) - F\cos(\alpha - 90^\circ) = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;\ N_2 \cos 60^\circ + F\cos(\varphi - 90^\circ) + F\sin(\varphi - 90^\circ) = 0;$$

$$\sum Z_i = 0;\ N + N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 30^\circ = 0.$$



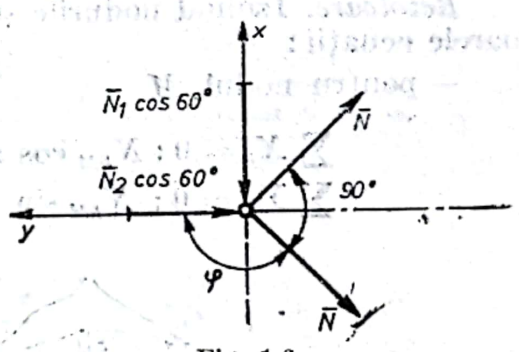


Fig. 1.6

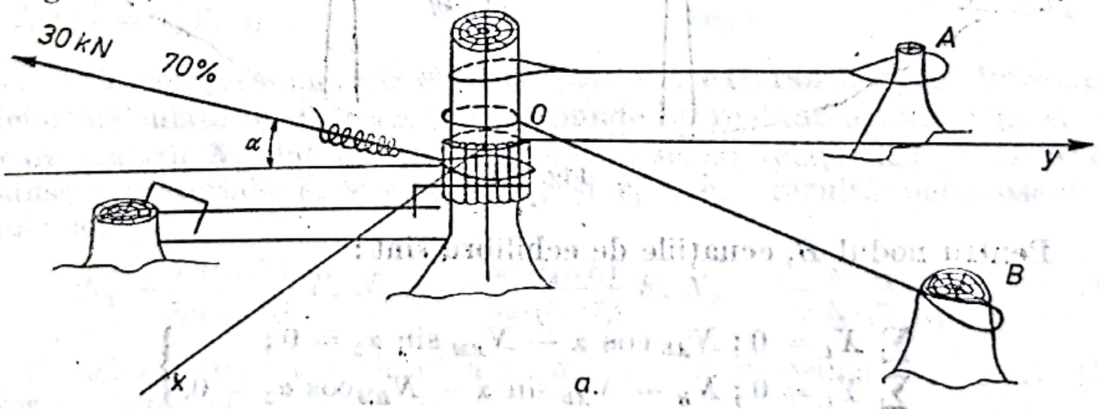
Rezolvînd sistemul de ecuații de mai sus, se obține:

$$N = 2F \sin\varphi;$$

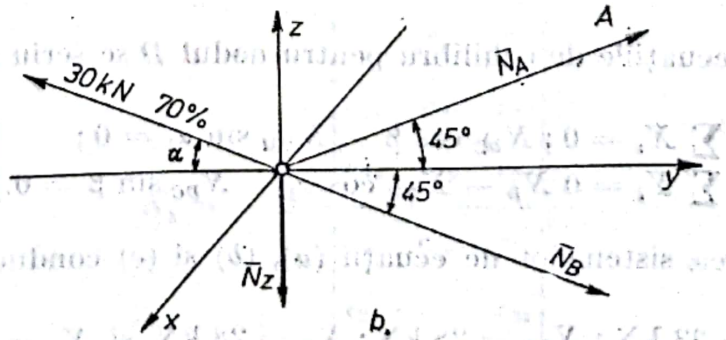
$$N_1 = -2F(\sin\varphi + \cos\varphi);$$

$$N_2 = -2F(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

1.7. Ancorarea cablului purtător în pantă se face potrivit schiței din figura 1,7. *a*. Se cere să se determine eforturile din cablurile *A* și *B*.



a.



b.

Fig. 1.7

Rezolvare. Secționînd cablurile și punînd pe direcția acestora eforturile $\bar{N}_B$ și $\bar{N}_A$ (fig. 1.7, *b*), se pot scrie următoarele ecuații de echilibru static:

$$\sum X_i = 0;\ N_A - N_B = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\ 30 \cdot \cos\alpha - 2N_A \cos 45^\circ = 0;$$
$$\sum Z_i = 0;\ N_z - 30 \cdot \sin\alpha = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații obținut, se deduc valorile eforturilor din cabluri:

$$N_A = 17\ \text{kN};\ N_B = 17\ \text{kN},\ N_z = 18\ \text{kN}.$$

1.8. Să se determine forțele de presiune ale stîlpilor de susținere a cablurilor unui funicular și eforturile în cablurile de ancorare (fig. 1.8).

Rezolvare. Izolînd nodurile și condiționînd echilibrul, se obțin următoarele ecuații:

— pentru nodul *M*

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ N_{BM}\cos\alpha_2 + N_{DM}\cos\alpha_1 - 20 = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ N_{BM}\sin\alpha_2 + N_{DM}\sin\alpha_1 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

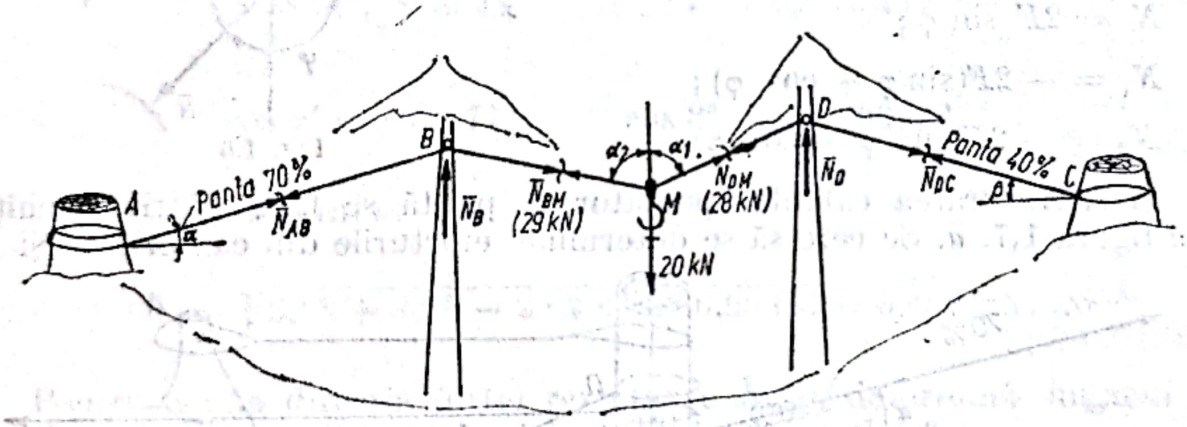


Fig. 1.8

Pentru nodul *B*, ecuațiile de echilibru sînt:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ N_{AB}\cos\alpha - N_{BM}\sin\alpha_2 = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ N_B - N_{AB}\sin\alpha - N_{BM}\cos\alpha_2 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

În fine, ecuațiile de echilibru pentru nodul *D* se scriu:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ N_{DC}\cos\beta - N_{DM}\sin\alpha_1 = 0;\\ \sum Y_i = 0\ N_D - N_{DM}\cos\alpha_1 - N_{DC}\sin\beta = 0.\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Rezolvarea sistemelor de ecuații (*a*), (*b*) și (*c*) conduce la valorile:

$$N_{AB} = 33\ \text{kN};\ N_{DC} = 28\ \text{kN};\ N_B = 28\ \text{kN}\ \text{și}\ N_D = 20\ \text{kN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.9. Sistemul din figura 1.9 este format din bare de lemn articulate în spațiu. În nodul C este aplicată forța $\bar{F} = (200\,\bar{i} + 700\,\bar{j} - 100\,\bar{k})$ daN, iar lungimile sînt exprimate în metri.

Rezolvare. Notînd cu $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ versorii direcțiilor $\overline{OC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, cu $\bar{e}$ versorul forței $\bar{F}$ și cu N_1, N_2, N_3 valorile eforturilor din cele trei bare, echilibrul forțelor aplicate în nodul C se exprimă prin relația vectorială :

$$N_1\bar{e}_1 + N_2\bar{e}_2 + N_3\bar{e}_3 + F\bar{e} = 0, \qquad \text{(a)}$$

în care scalarul F este pozitiv, deoarece versorul e are sensul forței F. Așa cum se poate vedea în figura 1.9, b, s-au considerat mărimile :

$$N_i\bar{e}_i (i = 1, 2, 3)$$

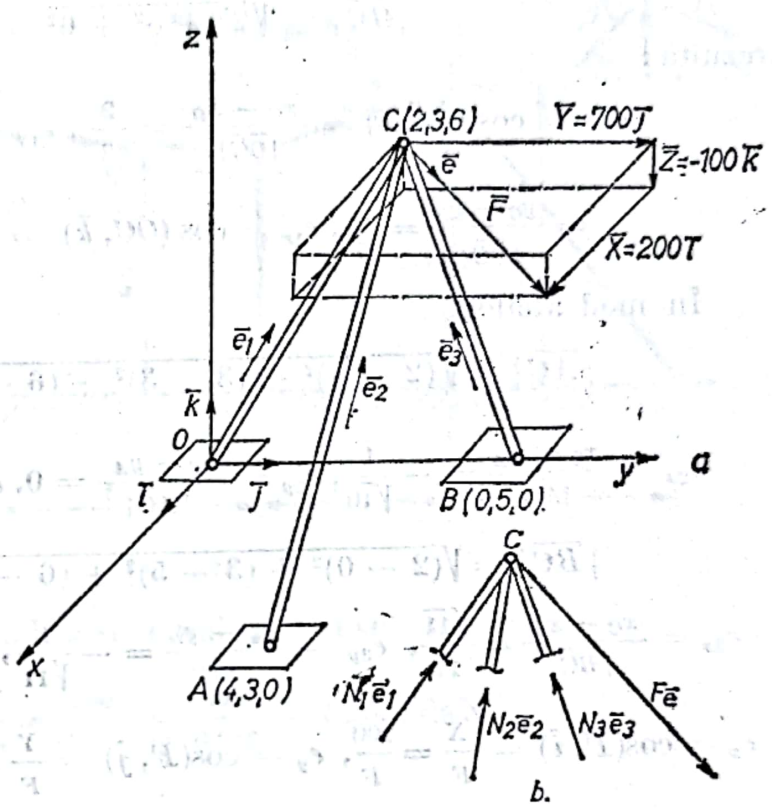


Fig. 1.9

eforturi de compresiune, ele fiind dirijate din exteriorul spre interiorul riglelor articulate în C, ceea ce corespunde cu realitatea numai în cazul în care scalarii N_i sînt pozitivi. Înmulțind scalar relația (a) succesiv cu produsele vectoriale $\bar{e}_2 \times \bar{e}_3$, $\bar{e}_3 \times \bar{e}_1$, și $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2$, rezultă necunoscutele problemei :

$$N_1 = -\frac{\bar{e}\cdot(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)}{\bar{e}_1\cdot(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)}F,\ N_2 = -\frac{\bar{e}\cdot(\bar{e}_3\times\bar{e}_1)}{\bar{e}_2\cdot(\bar{e}_3\times\bar{e}_1)}F,\ N_3 = -\frac{\bar{e}\cdot(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)}{\bar{e}_3\cdot(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)}F. \qquad \text{(b)}$$

Utilizînd expresia analitică a produsului mixt, prima relație din (b) se scrie sub forma :

$$N_1 = -F\frac{\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix}}. \qquad \text{(c)}$$

Componentele e_{1x}, e_{1y} și e_{1z} sînt egale cu cosinusurile unghiurilor, pe care vectorul OC le formează cu sensurile pozitive ale axelor de coordonate.

Ținînd seama că

$$|\overline{OC}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7.$$

rezultă:

$$e_{1x} = \cos(\overline{OC}, \bar{i}) = \frac{x_C - x_O}{|\overline{OC}|} = \frac{2}{7}, \; e_{1y} = \cos(\overline{OC}, \bar{j}) =$$

$$= \frac{y_C - y_O}{|\overline{OC}|} = \frac{3}{7}, \; e_{1z} = \cos(\overline{OC}, \bar{k}) = \frac{z_C - z_e}{|\overline{OC}|} = \frac{6}{7}.$$

În mod analog,

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-3)^2 + (6-0)^2} = 2\sqrt{10},$$

$$e_{2x} = \frac{x_C - x_A}{|\overline{AC}|} = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \; e_{2y} = \frac{y_C - y_A}{|\overline{AC}|} = 0, \; e_{2z} = \frac{z_C - z_A}{|\overline{AC}|} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-5)^2 + (6-0)^2} = 2\sqrt{11}.$$

$$e_{3x} = \frac{x_C - x_B}{|\overline{BC}|} = \frac{\sqrt{11}}{11}, \; e_{3y} = \frac{y_e - y_B}{|\overline{BC}|} = -\frac{1}{\sqrt{11}}, \; e_{3z} = \frac{z_C - z_B}{|\overline{BC}|} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

$$e_x = \cos(\bar{F}, \bar{i}) = \frac{X}{F} = \frac{200}{F}, \; e_y = \cos(\bar{F}, \bar{j}) = \frac{Y}{F} = \frac{700}{F}, \; e_z = \cos(\bar{F}, \bar{k}) =$$

$$= \frac{Z}{F} = -\frac{100}{F}.$$

Înlocuind în (c), se obține:

$$N_1 = -1097 \text{ daN}.$$

Celelalte două relații (b) conduc la valorile:

$$N_2 = 369 \text{ daN} \text{ și } N_3 = 763 \text{ daN}$$

Valoarea negativă a efortului N_1 arată că rigla OC este solicitată la tracțiune, celelalte grinzi fiind comprimate.

1.10. Să se determine eforturile în cablul unui funicular suspendat $BEKM$, în stîlpul BC și în ancora AB, care se produc sub acțiunea celor două sarcini $P = 200$ daN, aplicate în punctele E și K (fig. 1.10).

Rezolvare. Izolăm, mai întîi nodul E, în care acționează forța dată P și eforturile $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ din cablu, și scriem ecuațiile de echilibru ale nodului, rezultă:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0;\; N_2 - N_1 \cos\alpha = 0; \\ \sum Y_i = 0;\; N_1 \sin\alpha - P = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Din

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

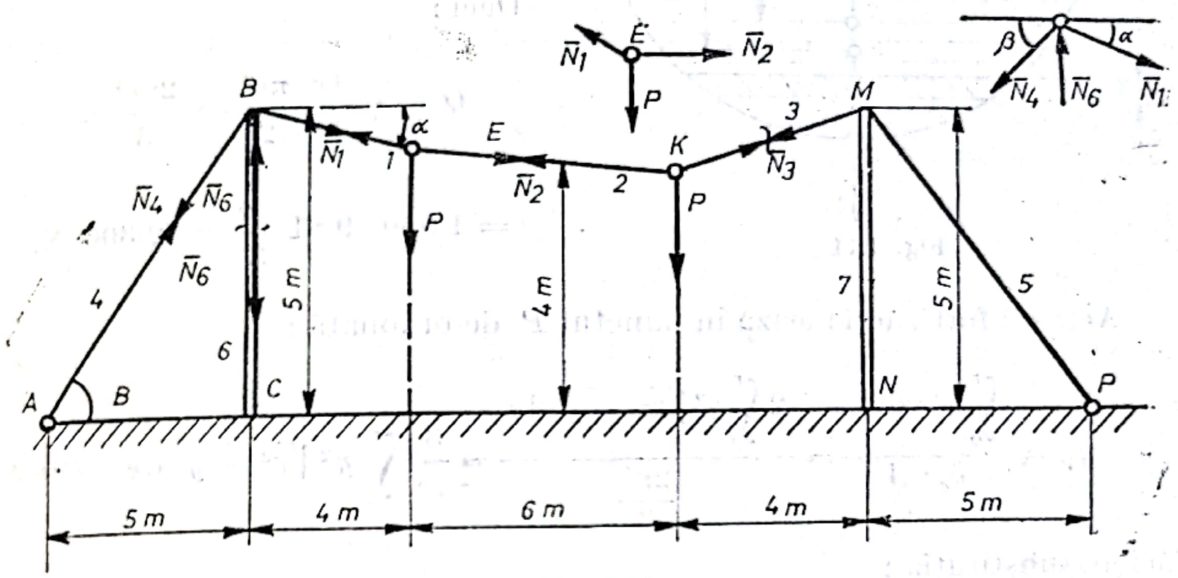


Fig. 1.10

deducem $\alpha = 14°$. Înlocuind în sistemul de mai sus, se obţine :

$$N_1 = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{200}{\sin 14°} = \frac{200}{0{,}242} = 826{,}4 \text{ daN}$$

şi

$$N_2 = N_1 \cdot \cos\alpha = 826{,}4 \cdot 0{,}370 = 801{,}6 \text{ daN}.$$

Izolînd în mod analog nodul B, introducînd reacţiunea N_6 şi eforturile din cablu $\bar{N}_1$ şi $\bar{N}_4$, şi scriind apoi ecuaţiile de echilibru, rezultă :

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0 ;\ N_1 \cos 14° - N_4 \cos 45° = 0 ; \\ \sum Y_i = 0 ;\ N_4 \sin 45° - N_1 \sin 14° + N_6 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Din prima ecuaţie, rezultă :

$$N_4 = \frac{N_1 \cos 14°}{\cos 45°} = \frac{826{,}4 \times 0{,}970}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1137 \text{ daN}.$$

Din a doua ecuaţie, se obţine :

$$N_6 = N_1 \sin 14° + N_4 \sin 45° = 826{,}4 \cdot 0{,}242 + 1137 \cdot 0{,}705 = 1001{,}6 \text{ daN}.$$

1.11. Un jilip de secţiune transversală circulară şi rază $r = 2$ m este umplut cu apă (fig. 1.11). Să se determine forţa rezultantă Q ce se exercită pe fundul ADB al jilipului, precum şi punctul ei de aplicaţie.

Rezolvare. Modulul forţei rezultante este :

$$Q = p_c \cdot A,$$

Scanned with OKEN Scanner

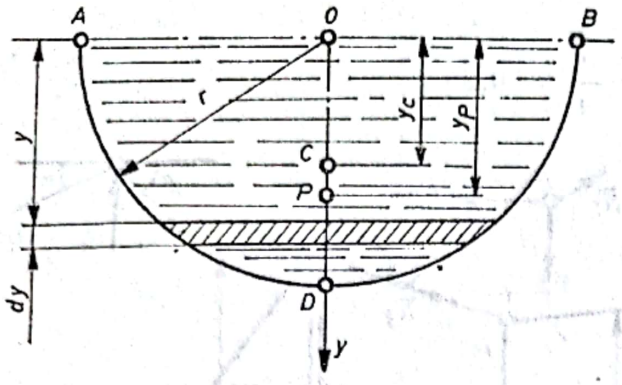


Fig. 1.11

unde :

$$p_c = \gamma \cdot y_c = \gamma \frac{4r}{3\pi}$$

Deci :

$$Q = \gamma \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2\gamma r^3}{3} =$$

$$= 1\,000 \cdot 9{,}81 \frac{16}{3} = 52\,300 \text{ N}.$$

Această forță acționează în punctul P de ordonată :

$$y_p = \frac{\int_0^r y^2 \cdot dA}{y_c \cdot A} = \frac{2\int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, dy}{\frac{2r^3}{3}} = \frac{3}{r^3} \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

Făcînd substituția :

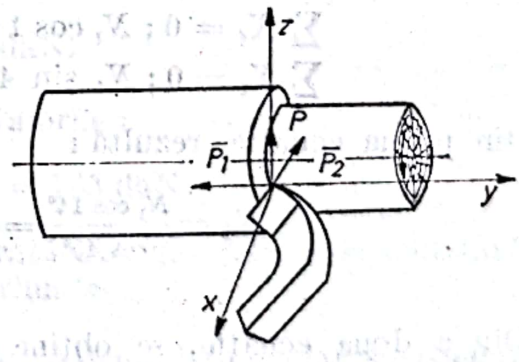
$$y = r \cdot \sin \theta, \quad dy = r \cos \theta \cdot d\theta,$$

se obține :

$$y_p = \frac{3}{r^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \theta \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} \cdot r \cos \theta\, d\theta = \frac{3}{r^3} \cdot r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta\, d\theta =$$

$$= \frac{3r}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{3r}{8} \left| \theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi r}{16} = \frac{3\pi}{8} \text{ [m]} = 1{,}18 \text{ m}.$$

1.12. O piesă de lemn este solicitată, în timpul strunjirii, de forțele : $P_1 = 3N$, $P_2 = 4N$ și $P = 16$ N, care acționează ca în figura 1.12. Să se determine torsorul de reducere al forțelor care solicită piesa, în punctul O_1 situat pe axa acesteia. Se presupune că se cunoaște diametrul după strunjire al piesei, $d = 5$ cm.



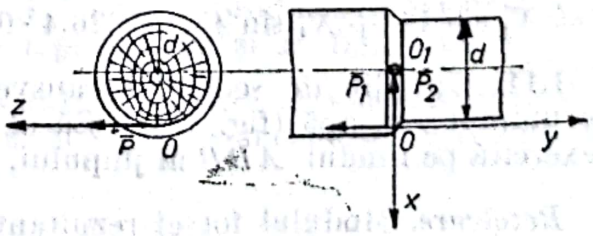


Fig. 1.12

Rezolvare. Se scriu, mai întîi, expresiile analitice ale celor trei forțe, în raport cu sistemul de referință triortogonal $xOyz$; rezultă :

$$\bar{P}_1 = -3\bar{j}\,; \quad \bar{P}_2 = -4\bar{i}\,;$$
$$\bar{P}_3 = 16\,\bar{k}.$$

Rezultanta sistemului celor trei forţe este :

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 = -4\bar{i} - 3\bar{j} + 16\,\bar{k}.$$

Modulul forţei rezultante va fi, deci :

$$|\bar{R}| = R = \sqrt{4^2 + 3^2 + 16^2} = 16{,}85 \text{ N}.$$

Torsorul de reducere al sistemului de forţe în punctul O_1 este :

$$\tau_{O_1}\{P_i\} = \begin{cases} \bar{R} = -4\bar{i} - 3\bar{j} + 16\,\bar{k}\,; \\ \bar{M}_{(O_1)} = \overline{O_1O} \times \bar{R}. \end{cases}$$

Calculăm momentul sistemului de forţe în raport cu punctul O_1 :

$$\bar{M}_{(O_1)} = \overline{O_1O} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0{,}025 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 16 \end{vmatrix} = -0{,}4\,\bar{j} - 0{,}075\,\bar{k}.$$

Valoarea absolută a momentului celor trei forţe va fi, deci :

$$|\bar{M}_{(O_1)}| = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}075^2} = 0{,}406 \text{ N.m}.$$

Prin urmare :

$$R = 16{,}85 \ N \text{ şi } M_{(O_1)} = 0{,}406 \text{ N.m}.$$

1.13. În procesul de frezare a lemnului, asupra unei freze de diametru d, fixată excentric în mandrina de diametru D, acţionează forţele : $\bar{P}$, forţa de tăiere şi $\bar{P}_0$ — reacţiunea care ia naştere în timpul procesului tehnologic de frezare (fig. 1.13). Se cere să se reducă sistemul de forţe în raport cu punctul O_1, de pe axa frezei şi în raport cu punctul O de pe axa mandrinei şi să se deducă ecuaţia axei centrale în raport cu sistemul de referinţă xOy.

Rezolvare. Expresiile analitice ale forţelor în raport cu sistemul de referinţă ales sînt respectiv :

$$\bar{P} = -P \cdot \sin\varphi \cdot \bar{i} - P \cdot \cos\varphi \cdot \bar{j};$$

$$\bar{P}_0 = -P_0 \cdot \cos\varphi \cdot \bar{i} + P_0 \cdot \sin\varphi \cdot \bar{j}.$$

Scanned with OKEN Scanner

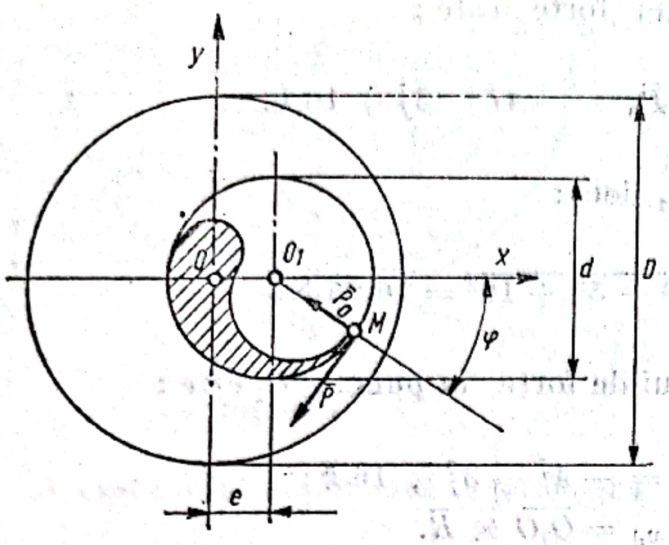


Fig. 1.13

Expresia analitică a forței rezultante $\bar{R}$ este :

$$\bar{R} = -(P \cdot \sin\varphi + P_0 \cdot \cos\varphi)\,\bar{i} - (P \cdot \cos\varphi - P_0 \cdot \sin\varphi)\,\bar{j}.$$

Momentul rezultant al sistemului celor două forțe în raport cu punctul O_1 este :

$$\bar{M}_{(O_1)} = \overline{O_1M} \times \bar{P} + \overline{O_1M} \times \bar{P}_0;$$

se observă, însă, că :

$$\overline{O_1M} \parallel \bar{P}_0$$

și prin urmare produsul vectorial $\overline{O_1M} \times \bar{P}_0 = 0$.
Ținînd seama că :

$$\overline{O_1M} = \frac{d}{2}\cos\varphi \cdot \bar{i} - \frac{d}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \bar{j},$$

rezultă

$$\bar{M}_{(O_1)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{d}{2}\cos\varphi & -\frac{d}{2}\sin\varphi & 0 \\ -P\sin\varphi & -P\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\frac{P \cdot d}{2}\,\bar{k}.$$

Torsorul de reducere al forțelor în punctul O_1 este :

$$\tau^{O_1} \begin{cases} \bar{R} = -(P\sin\varphi + P_0\cos\varphi)\,\bar{i} - (P_0\cos\varphi - P_0\sin\varphi)\,j; \\ \bar{M}_{(O_1)} = -\dfrac{P \cdot d}{2}\,\bar{k}. \end{cases}$$

Momentul celor două forțe în raport cu punctul O este :

$$\bar{M}_{(O)} = \bar{M}_{(O_1)} + \overline{OO_1} \times \bar{R}.$$

în care

$$\overline{OO_1} = e \cdot \bar{i}.$$

Rezultă :

$$\bar{M}_{(O)} = -\frac{P \cdot d}{2}\,\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e & 0 & 0 \\ -(P\cdot\sin\varphi + P_0\cdot\cos\varphi) & -(P\cdot\cos\varphi - P_0\cdot\sin\varphi) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{P \cdot d}{2}\,\bar{k} - e \cdot (P \cdot \cos\varphi - P_0 \cdot \sin\varphi)\,\bar{k} = -$$

$$-\left(\frac{P \cdot d}{2} + P \cdot e \cdot \cos\varphi - P_0 \cdot e \cdot \sin\varphi\right)\bar{k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Torsorul de reducere al forțelor în punctul O este deci :

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = -(P \sin \varphi + P_0 \cos \varphi)\,\bar{i} - (P \cos \varphi - P_0 \sin \varphi)\,\bar{j}; \\ \bar{M}_{(0)} = -\left(\dfrac{P \cdot d}{2} + P \cdot e \cdot \cos \varphi - P_0 \cdot e \cdot \sin \varphi\right)\bar{k}. \end{cases}$$

Ecuația axei centrale pentru un sitem de forțe coplanare fiind :

$$xY - yX = M_z,$$

rezultă

$$(P \cdot \cos \varphi - P_0 \cdot \sin \varphi)\, x - (P \cdot \sin \varphi + P_0 \cos \varphi)\, y =$$

$$= \frac{P \cdot d}{2} + P \cdot e \cdot \cos \varphi - P_0 \cdot e \cdot \sin \varphi.$$

Intersecțiile axei centrale cu axele sistemului de referință (tăieturile) sînt respectiv :

$$x = 0,\ y = \frac{P_0 \cdot e \cdot \sin \varphi - \dfrac{P \cdot d}{2} - P \cdot e \cdot \cos \varphi}{P \sin \varphi + P_0 \cos \varphi};$$

$$y = 0,\ x = \frac{P\,\dfrac{d}{2} + P \cdot e \cdot \cos \varphi - P_0 \cdot e \cdot \sin \varphi}{P \sin \varphi + P_0 \cos \varphi}.$$

1.14. Să se determine forța rezultantă și momentul rezultant în raport cu punctul O al forțelor aplicate pe grinda cu zăbrele de lemn AB (fig. 1.14) ; se dau :

$$F_1 = 250 \text{ daN};\ F_2 = 200 \text{ daN};\ F_3 = 800 \text{ daN}\ \text{și}\ F_4 = 400 \text{ daN}.$$

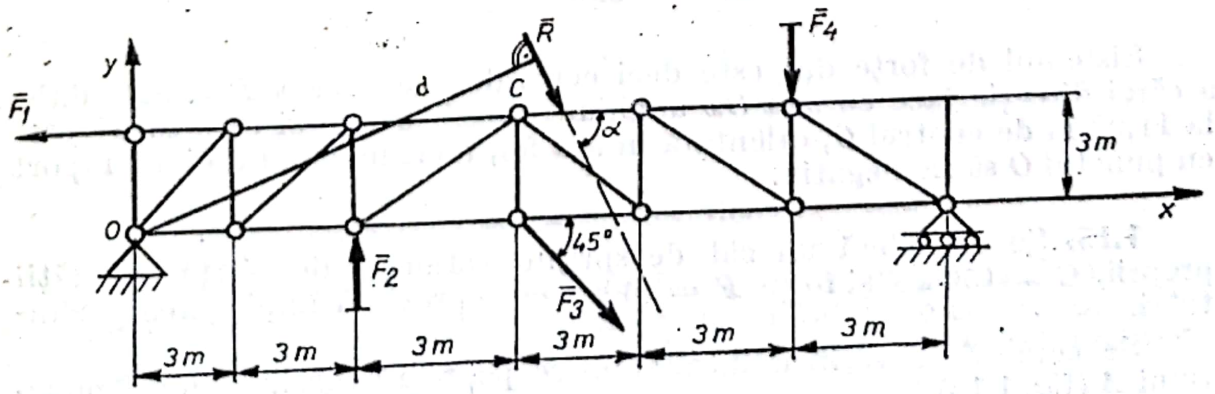


Fig. 1.14

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Proiecţiile forţei rezultante pe axele de coordonate sînt respectiv :

$$X = \sum_{i=1}^{4} X_i = -F_1 + F_3 \cos 45° = -250 + 800 \frac{\sqrt{2}}{2} = 314 \text{ daN};$$

$$Y = \sum_{i=1}^{4} Y_i = F_2 - F_3 \sin 45° - F_4 = 200 - 800 \frac{\sqrt{2}}{2} - 400 = -764 \text{ daN}.$$

Modulul forţei rezultante va fi :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{314^2 + 764^2} = 826 \text{ daN}.$$

Forţa rezultantă face cu direcţia axei Ox unghiul α definit prin :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X} = -\frac{764}{314} = -2{,}4;$$

pentru această valoare a unghiului α, corespunde :

$$\alpha = -67°30'$$

Momentul sistemului de forţe, calculat în raport cu punctul O, va fi :

$$M_{(O)} = 6 \cdot F_2 - 9 \cdot F_3 \cdot \sin 45° - 15 \cdot F_4 = 6.200 - 9.200 -$$

$$- 9.800 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 15.400 = 9876 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

Poziţia forţei rezultantă este dată de dreapta OC, care măsoară distanţa de la punctul O la suportul rezultantei :

$$d = \frac{|M_{(O)}|}{R} = \frac{9876}{826} = 11{,}92 \text{ m}.$$

Sistemul de forţe dat este deci echivalent cu forţa $R = 826$ daN, a cărei direcţie face cu axa Ox unghiul $\alpha = -67°30'$ şi care se găseşte la 11,92 m de centrul O, orientată în aşa fel, încît momentul ei în raport cu punctul O să fie negativ.

1.15. Se consideră un zid de sprijin acţionat de forţa greutăţii proprii, $G = 150$ kN şi forţa $F = 70$ kN ce reprezintă împingerea pămîntului.

Se cere să se verifice dacă zidul se poate răsturna în jurul punctului A (fig. 1.15).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Raportăm zidul la un sistem de referinţă ca în figura 1.15.

Rezultanta celor două forţe este :

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j},$$

în care :

$$X = -F \cdot \cos 30° = -70\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -6 \cdot 0{,}6 \text{ kN}$$

şi

$$Y = -G - F \cdot \sin 30° =$$

$$= -150 - 70\,\frac{1}{2} = -18{,}5 \text{ kN}.$$

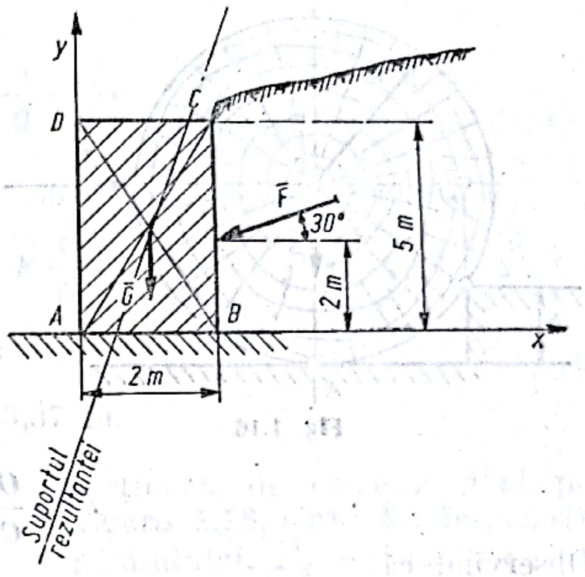


Fig. 1.15

Momentul sistemului de forţe calculat în raport cu axa Oz este :

$$\bar{M}_z = -G \cdot l \cdot \bar{k} - F \cdot \sin 30° \cdot 2 \cdot \bar{k} + F \cdot \cos 30° \cdot 2 \cdot \bar{k} =$$

$$= (-150 - 70 + 121)\,\bar{k} = -99\,\bar{k}.$$

Ecuaţia suportului rezultantei este :

$$xY - yX = M_z$$

În cazul de faţă, rezultă :

$$-18{,}50\,x + 6{,}06\,y = -9{,}9.$$

Condiţia ca zidul să nu se răstoarne este ca suportul forţei rezultante să intersecteze axa x într-un punct situat în dreapta muchiei A (cuprins între A şi B).

Intersecţiile suportului rezultantei cu axele de coordonate se obţin înlocuind în ecuaţia suportului $x = 0$, respectiv $y = 0$.

Rezultă :

$$x = \frac{9{,}9}{18{,}50} = 0{,}536 \text{ m şi } y = -\frac{9{,}9}{6{,}06} = -1{,}635 \text{ m}.$$

Prin urmare zidul nu se răstoarnă, deoarece $0{,}536 < 2$.

1.16. Un buştean de formă cilindrică, avînd greutatea $\bar{P}$ şi raza R, se află în faţa unui prag cu înălţimea h (fig. 1.16). Care este forţa orizontală minimă ce trebuie aplicată în axul bușteanului pentru ca el să poată fi ridicat deasupra pragului?

Scanned with OKEN Scanner

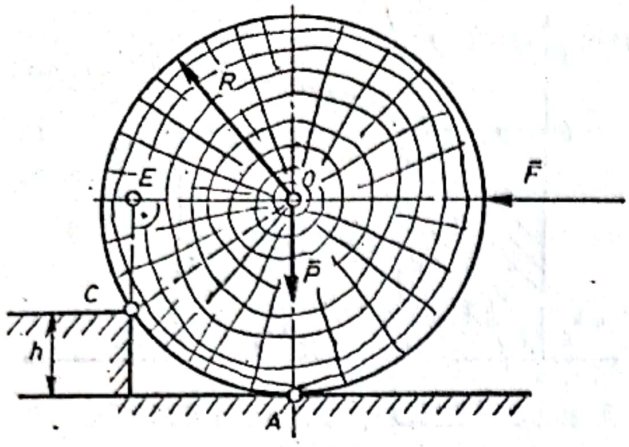


Fig. 1.16

Rezolvare. Bușteanul se va roti în jurul generatoarei punctului C. Notînd cu $\bar{F}$ forța orizontală minimă, aceasta se determină din condiția ca să creeze, în raport cu punctul C, un moment mai mare decît momentul forței P în raport cu același punct.

Vom putea, deci scrie, următoarea neegalitate :

$$CE \cdot F \geqslant OE \cdot P.$$

Rezultă forța căutată F :

$$F \geqslant \frac{OE}{CE} \cdot P$$

Observînd că

$$OE = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)}$$

și

$$CR = R - h.$$

rezultă

$$F \geqslant \frac{P}{R-h}\sqrt{h(2R-h)}.$$

1.17. Presiunea apei pe o suprafață mică dintr-un baraj crește proporțional cu distanța ei la suprafața liberă a apei și este egală cu greutatea coloanei de apă de înălțime egală cu această distanță și baza cît suprafața dată.

Să se determine grosimea barajului la bază, cunoscînd că secțiunea transversală a barajului este triunghiulară, iar coeficientul de stabilitate trebuie să fie 2. Greutatea specifică a betonului se dă, $\gamma_1 = 2200$ daN/m³. Înălțimea barajului este $h = 5$ m iar greutatea specifică a apei, $\gamma = 1\,000$ daN/m³ (fig. 1.17).

Rezolvare. Diagrama presiunii apei asupra barajului este liniară, valoarea maximă fiind γh. Forța care tinde să răstoarne zidul este :

$$F = \gamma h \frac{h}{2} = \frac{\gamma h^2}{2}.$$

Greutatea unui metru-lungime de zid este :

$$G = \gamma_1 \frac{bh}{2}.$$

Ecuația de momente scrisă în raport cu punctul A, ne dă :

$$\sum M_{(A)} = 0\,; \quad \frac{2}{3} b \cdot G - \frac{h}{3} F = 0.$$

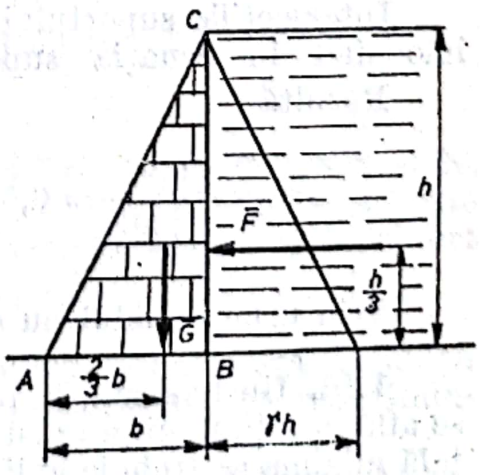


Fig. 1.17

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$b = \frac{h}{2} \cdot \frac{F}{G}.$$

Ţinînd seama de valoarea coeficientului de stabilitate, vom lua

$$b = h \frac{F}{G}.$$

Cu valori numerice, se obţine :

$$b = 3{,}37 \text{ m}.$$

1.18. Forţele care acţionează porţiunea de culee a unui pod armat a cărei secţiune este redată în figura 1.18, sînt : $\bar{F}_1$, împingerea pămîntului, $\bar{F}_2$ — greutatea ce se transmite prin stîlpi, $\bar{F}_3$ — forţa ce se transmite prin boltă şi $\bar{G}$ greutatea culeei de deasupra planului OA. Toate aceste forţe acţionează în acelaşi plan, iar punctele lor de aplicaţie sînt respectiv $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2 \cdot b_2)$, $A_3(a_3, b_3)$ şi $A_4(a_4, b_4)$, coordonatele fiind socotite în raport cu axele xOy din figură.

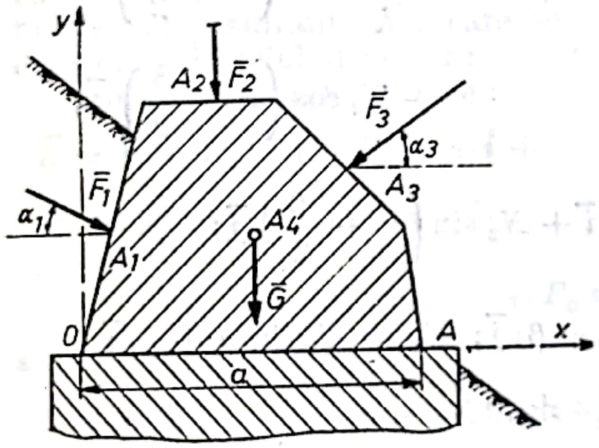


Fig. 1.18

Se cere să se reducă sistemul de forţe date în raport cu punctul A.

Rezolvare. Proiecţiile pe axele de coordonate a rezultantei celor patru forţe, sînt respectiv egale cu :

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{4} X_i = F_1 \cdot \cos \alpha_1 - F_3 \cdot \cos \alpha_3 ; \\ Y &= \sum_{i=1}^{4} Y_i = F_1 \sin \alpha_1 - F_2 - G - F_3 \sin \alpha_3. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a}$$

Suma momentelor celor patru forţe, calculate în raport cu punctul A este :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} M_{(A)i} = &- b_1 \cdot F_1 \cdot \cos \alpha_1 + (a - a_1) \cdot F_1 \cdot \sin \alpha_1 + \\ &+ (a - a_2) \cdot F_2 + (a - a_4)\, G + \\ &+ b_3 \cdot F_3 \cdot \cos \alpha_3 (a - a_3) \cdot F_3 \cdot \sin \alpha_3. \end{aligned}$$

1.19. În figura 1.19 sînt reprezentate forţele ce acţionează pe cuţit în timpul tăierii lemnului, forţe ce apar din interacţiunea lemn-cuţit. Să se reducă sistemul de forţe în punctul O, considerat practic vîrf al cuţitului.

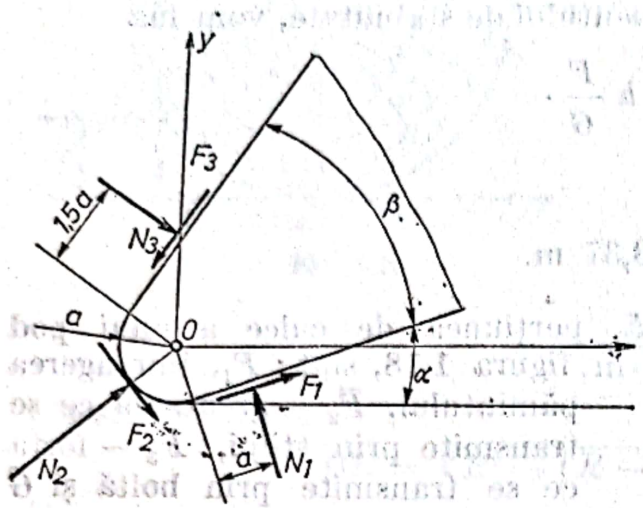


Fig. 1.19

Rezolvare. Se alege sistemul de referinţă xOy, faţă de care forţele au următoarele expresii vectoriale :

$$\bar{F}_1 = F_1 \cos \cdot \vec{i} + F_1 \sin \alpha \cdot \vec{j};$$

$$\bar{N}_1 = -N_1 \sin \alpha \cdot \vec{i} + N_1 \cos \alpha \cdot \vec{j};$$

$$\bar{F}_2 = F_2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\vec{i} - F_2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\vec{j};$$

$$\bar{N}_2 = N_2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\vec{i} + N_2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\vec{j};$$

$$\bar{F}_3 = F_3 \cos(\alpha + \beta)\vec{i} + F_3 \sin(\alpha + \beta)\vec{j}; \quad \bar{N}_3 = N_3 \sin(\alpha + \beta)\vec{i} - N_3 \cos(\alpha + \beta)\vec{j}.$$

Elementele de reducere ale sistemului de forţe în O sînt formate din forţa rezultantă ($\bar{R}$) şi momentul rezultant ($\bar{M}_0$) care se determină după cum urmează :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{3} \vec{N}_i = \left[F_1 \cos \alpha + F_2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + F_3 \cos(\alpha + \beta) - N_1 \sin \alpha + N_2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + N_3 \sin(\alpha + \beta)\right]\vec{i} +$$

$$+\left[F_1 \sin \alpha - F_2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + F_3 \sin(\alpha + \beta) + N_1 \cos \alpha + N_2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - N_3 \cos(\alpha + \beta)\right]\vec{j};$$

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^{6} \bar{M}_{(0)i} = (F_1 + F_2 - F_3 + N_1 - 1{,}5\, N_3)\, a\, \bar{k},$$

Scanned with OKEN Scanner

sau în mărime :

$$|\bar{M}_0| = (F_1 - F_2 - F_3 + N_1 - 1{,}5\,N_3)\,a.$$

1.20. În figura 1.20 sînt reprezentate forţa de tăiere $\bar{F}$ şi forţa de respingere $\bar{F}_0$ apărute în timpul procesului de tăierea lemnului cu pînze circulare. Să se determine efectul acestor forţe în axul O al discului circular.

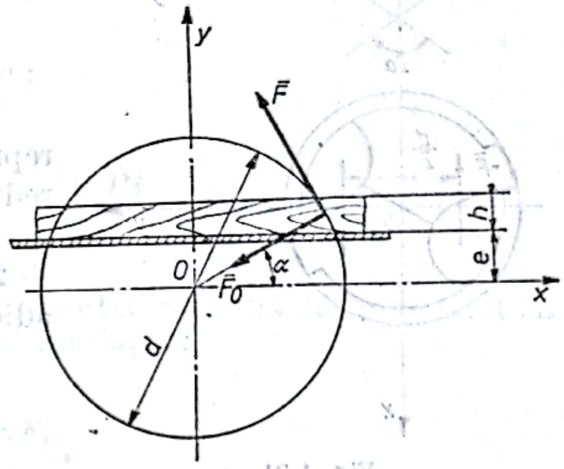


Fig. 1.20

Rezolvare. Se alege sistemul de referinţă xOy şi se reduce sistemul de forţe în punctul O. Elementele torsorului de reducere se compun din forţa rezultantă $\bar{R}$ şi momentul rezultant $\bar{M}_0$ care se determină în felul următor :

Forţa rezultantă $\bar{R}$ este :

$$\bar{R} = \bar{F} + \bar{F}_0 = (-F\sin\alpha\cdot\bar{i} + F\cos\alpha\cdot\bar{j}) - (F_0\cos\alpha\cdot\bar{i} + F_0\sin\alpha\cdot\bar{j}),$$

sau

$$\bar{R} = -(F\sin\alpha + F_0\cos\alpha)\,\bar{i} + (F\cos\alpha - F_0\sin\alpha)\,j,$$

în care unghiul α are valoarea :

$$\alpha = \arcsin\frac{e + \frac{h}{2}}{R}$$

În mărime forţa rezultantă este :

$$|\bar{R}| = \sqrt{F^2 + F_0^2}.$$

Momentul rezultant va fi :

$$\bar{M}_0 = \frac{d}{2}\cdot F\cdot\bar{k}, \text{ sau } |\bar{M}_0| = \frac{d\cdot F}{2}.$$

1.21. Forţele elementare care apar pe muchiile tăietoare ale burghiului în timpul găuririi lemnului sînt înlocuite cu forţele medii corespunzătoare, ca în figura 1.21 ; $\bar{F}$ este forţa de aşchiere $\bar{F}_1$ este forţa axială, $\bar{F}_2$ şi $\bar{F}_3$ reprezintă forţele de respingere ($F_2 = F_3$). Să se exprime efectul forţelor în punctul O situat pe axa burghiului.

Scanned with OKEN Scanner

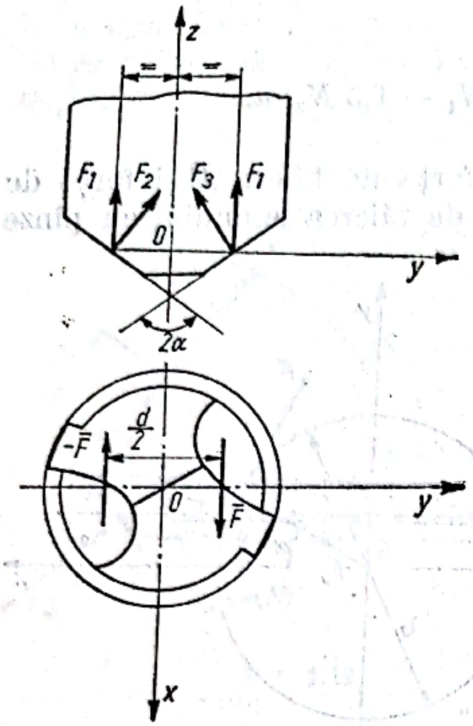


Fig. 1.21

Rezolvare. În raport cu sistemul de referinţă ales *xOyz*, forţele au următoarele expresii analitice :

$$\bar{F} = F \cdot \bar{i},\ \bar{F}_1 = F_1 \cdot \bar{k},\ \bar{F}_2 = F_2 \cos\alpha \bar{j} + F_2 \sin\alpha \bar{k} \text{ şi } \bar{F}_3 = -F_2 \cos\alpha \bar{j} + \bar{F}_2 \sin\alpha \bar{k},$$

Efectul forţelor în punctul O este reprezentat de elementele torsorului de reducere în O şi anume :

Forţa rezultantă $\bar{R} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} - \bar{F} + 2\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = (2F_1 + 2F_2 \sin\alpha)\bar{k}$, adică :

$$|\bar{R}| = 2F_1 + 2F_2 \sin\alpha$$

Momentul rezultant în O este :

$$\bar{M}_{(0)} = \sum_{i=1}^{4} \bar{M}_{(0)i} = -F\frac{d}{2}\bar{k},$$

adică :

$$|\bar{M}|_0 = F \cdot \frac{d}{2}.$$

Rezultă că în timpul aşchierii, în punctele axei burghiului acţionează un sistem format din forţa axială :

$$R = 2F_1 + 2F_2 \sin\alpha$$

şi un moment axial

$$M_0 = F\frac{d}{2}.$$

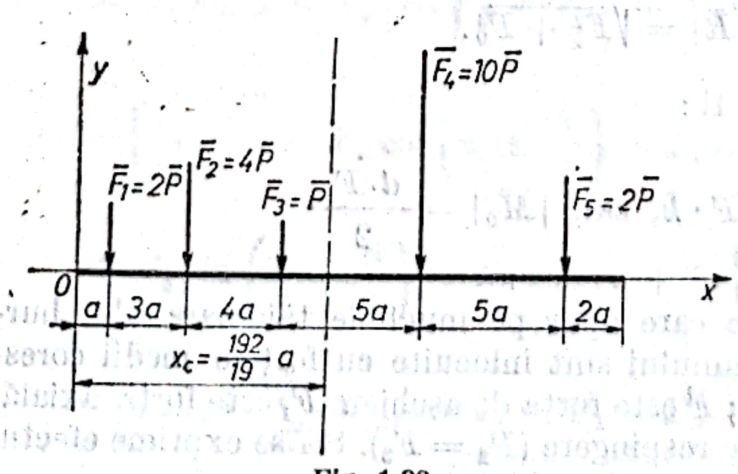


Fig. 1.22

1.22. Schema de încărcare a arborelui portcuţit la o maşină pentru debitat aşchii de lemn, este prezentată în figura 1.22. Forţele figurate reprezintă încărcări ce provin din greutatea proprie a arborelui, greutatea cuplajului şi a roţii de curea. Să se determine rezultanta sistemului de forţe şi poziţia ei.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se adoptă sistemul de referinţă xOy în raport cu care forţele au următoarele expresii vectoriale :

$$\bar{F}_1 = -2P\bar{j}\,;\ \bar{F}_2 = -4P\bar{j},\ \bar{F}_3 = -P\bar{j},$$

$$\bar{F}_4 = -10\,P\bar{j} \text{ şi } F_5 = -2\,P\bar{j}.$$

Rezultanta sistemului de forţe este :

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{5} \bar{F}_i = -19\,P\bar{j}.$$

şi acţionează pe un suport paralel cu direcţia comună forţelor aflat la distanţa x_C. Distanţa x_C se determină din relaţia :

$$x_C = \frac{\sum x_1 F_i}{\sum F_i},$$

adică :

$$x_C = \frac{2P\cdot a + 4P\cdot 4a + P\cdot 8a + 10P\cdot 13a + 2P\cdot 18a}{19P} = \frac{192}{19}\,a.$$

1.23. Forţa de aşchiere $\bar{F}$, care apare în procesul frezării frontale a lemnului, este reprezentată în figura 1.23. Să se determine efectul forţei de aşchiere în punctul O situat pe axa frezei.

Rezolvare. Se descompune forţa de aşchiere $\bar{F}$ în trei componente, paralele cu axele sistemului de referinţă ales $xOyz$ şi anume : forţa radială F_R paralelă cu axa Ox, forţa tangenţială F_T paralelă cu axa Oy şi forţa axială F_A paralelă cu axa Oz.

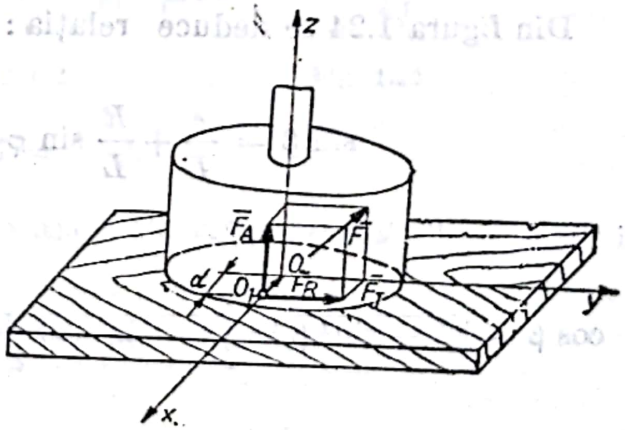


Fig. 1.23

Rezultă expresia analitică a forţei de aşchiere

$$\bar{F} = -F_R\bar{i} + F_T\bar{j} + F_A\bar{k}.$$

Efectul forţei $\bar{F}$ în punctul O este reprezentat de forţa $\bar{F}$ şi un moment

$$\bar{M}_0 = \overline{OO_1} \times \bar{F} = d\bar{i} \times (-F_R\bar{i} + F_T\bar{j} + F_A\bar{k}) = F_T\cdot d\bar{k} - F_A d\bar{j}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau în mărime

$$|\bar{F}| = \sqrt{F_R^2 + F_T^2 + F_A^2} \text{ și } |\bar{M}_0| = d\sqrt{F_T^2 + F_A^2}.$$

1.24. Să se determine poziția centrului forțelor paralele ce acționează asupra mecanismului mișcării principale (de tăiere) al gaterului vertical.

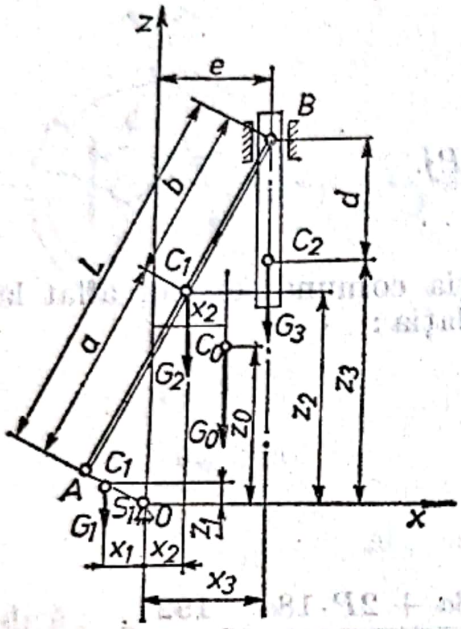


Fig. 1.24

Rezolvare. Coordonatele centrului forțelor paralele se determină cu relațiile :

$$Z_0 = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}, \quad x_0 = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i}$$

unde $\sum G_i z_i$ și $G_i x_i$ reprezintă suma momentelor statice ale greutăților părților componente ale mecanismului față de axele Ox și Oz

$\sum G_i = G_0$, reprezintă greutatea totală ;

$$\sum G_i = G_0 = G_1 + G_2 + G_3,$$

unde

G_1 este greutatea manivelei ; G_2—greutatea bielei ; G_3—greutatea cadrului cu pînze.

Coordonatele parțiale sînt (fig. 1.24) :

$$x_1 = s_1 \sin \varphi ; \quad x_2 = a \sin \beta - R \sin \varphi ; \quad x_3 = e.$$

$$z_1 = s_1 \cos \varphi ; \quad z_2 = R \cos \varphi + a \cos \beta ; z_3 = R \cos \varphi + L \cos \beta - d.$$

Din figura 1.24 se deduce relația :

$$\sin \beta = \frac{e}{L} + \frac{R}{L} \sin \varphi = \xi + \lambda \sin \varphi$$

și rezultă

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - (\xi - \lambda \sin \varphi)^2} \cong 1 - \frac{1}{2} (\xi - \lambda \sin \varphi)^2.$$

Făcînd înlocuirile în expresiile inițiale rezultă în final

$$z_0 = A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2 \varphi - A_3 \cos \varphi,$$

$$x_0 = B_0 - B_1 \sin \varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

În relațiile de mai sus s-au făcut notațiile :

$$A_0 = \frac{L}{G_0}\left[G_B\left(1 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\xi^2}{2}\right) - G_3\frac{d}{L}\right],\ A_1 - = R\frac{G_B + G_A}{G_0},$$

$$A_2 = R\frac{\lambda G_B}{4G_0},\ A_3 = R\frac{\xi G_B}{G_0},\ B_0 = e\frac{G_B}{G_0},\ B_1 = R\frac{G_A}{G_0},$$

unde

$$G_A = G_1\frac{s_1}{R} + G_2\frac{b}{L} \text{ și } G_B = G_3 = G_3 + G_2\frac{a}{L}$$

reprezintă greutatea mecanismului repartizat în expremitățile A și B ale bielei.

1.25. Un panou de lemn de formă dreptunghiulară $ABCD$, de lățime a, lungime b și greutate Q, este susținut prin două fire verticale în poziție orizontală (fig. 1.25). Să se determine eforturile din fire.

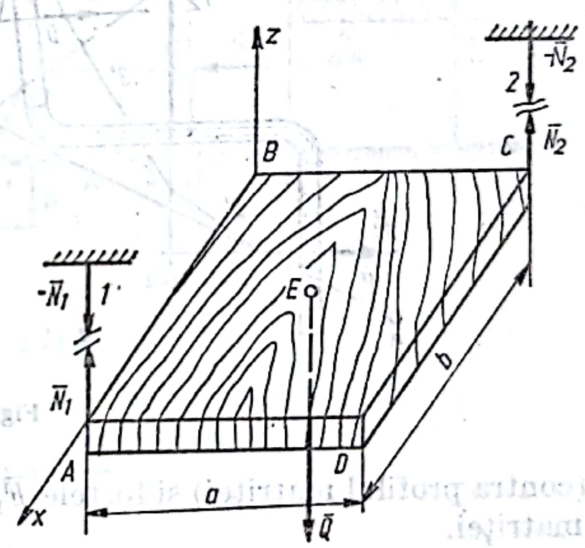


Fig. 1.25

Rezolvare. Problema revine la descompunerea forței Q după două direcții paralele cu suportul său și conținute în același plan.

Coordonatele punctelor de aplicații ale acestor componente sînt :

$A(b, O, O)$ și $C(O,\ a,\ O)$.

Proiecția forței Q pe axa Oz este :

$$Z = -Q.$$

Momentele forței Q față de axele Ox respectiv Oy sînt, respectiv :

$$M_x = -\frac{a}{2}Q,\ M_y = \frac{b}{2}Q.$$

Se obține următorul sistem de ecuații care definește descompunerea :

$$\left.\begin{aligned} F_1 + F_2 &= -G; \\ a\cdot F_2 &= -\frac{a}{2}Q, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

din care rezultă :

$$F_1 = -N_1 = -\frac{1}{2}Q\,;\; F_2 = -N_2 = -\frac{1}{2}Q.$$

Aceste valori deduse din ultimele două ecuații, verifică și prima ecuație.

1.26. Să se determine pe cale grafică poziția axei verticale (suportul rezultantei sistemului de forțe) la matrița superioară a unei prese pentru mularea scaunelor. În figura 1.26 este reprezentat profilul scaunului

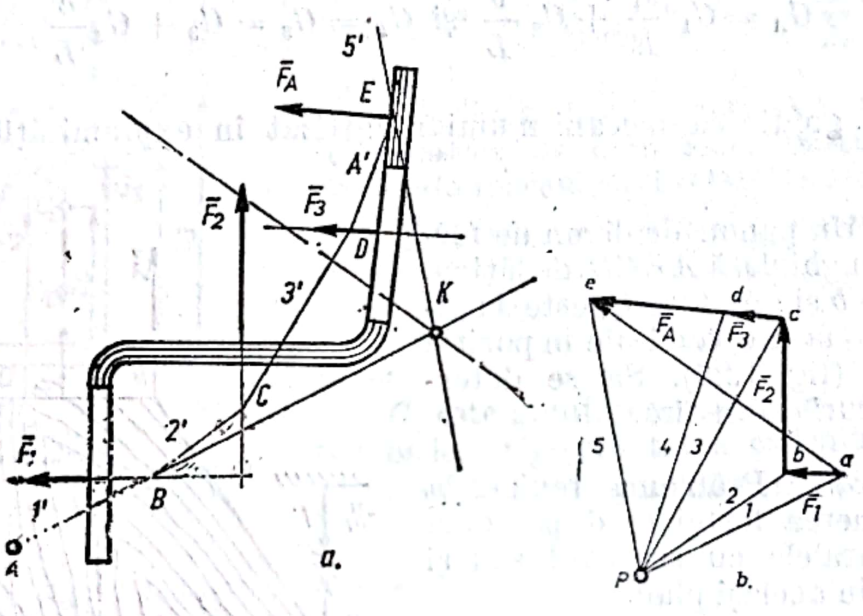


Fig. 1.26

(contra profilul matriței) și forțele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ și $\bar{F}_4$ care acționează asupra matriței.

Rezolvare. Suportul rezultantei se obține făcînd reducerea grafică a sistemului dat de forțe coplanare (mărimile forțelor se cunosc, ele fiind proporționale cu suprafețele de presare : $F_i = p \cdot A_i$, unde p este presiunea de mulare și A — suprafața de presare).

Se determină mai întîi rezultanta sistemului de forțe, construind la scară poligonul forțelor, adică linia frîntă a, b, c, d, e, dreapta $\overline{ac}$ este forța rezultantă. Se alege un punct oarecare P drept pol și se construiește apoi în planul forțelor linia frîntă $ABCD$, adică poligonul funicular, ducînd razele polare.

Punctul K obținut prin intersecția direcțiilor 1′ și 5′ se află pe suportul rezultantei sistemului de forțe. Se construiește suportul rezultantei ducînd prin K o paralelă la rezultanta R a sistemului de forțe.

La așezarea matriței de mulare între platanele presei se va avea grijă ca direcția rezultantei să fie verticală, respectiv perpendiculara pe acestea.

Scanned with OKEN Scanner

1.27. Fie $ABCD$ secțiunea unui zid de sprijin drept (fig. 1.27), format dintr-un material omogen de greutate specifică $\gamma = 2$ daN/cm³; figura $ABCD$ este un trapez cu înălțimea $BC = i$ și cu bazele $AB = 2b$ și $CD = b$ (lungimea zidului se va lua 1 m). Pe fața verticală se exercită o presiune de apă, pînă la muchia C. Să se determine grosimea b a zidului, astfel ca rezultanta R, a greutății zidului P și a împingerii apei H să treacă prin treimea mijlocie a bazei AB.
Se dă

$$AM = MN = NB.$$

Rezolvare. Se calculează mai întîi forța de împingere a apei. Pentru o suprafață elementară dA situată la înălțimea z, de lățime dz presiunea elementară dH, perpendiculară pe suprafața dA va fi:

$$dH = \gamma z dA,$$

Unde γ este greutatea specifică a apei:

$$\gamma = 10^3 \text{ daN/m}^3 = 1\text{tf/m}^3$$

rezultă:

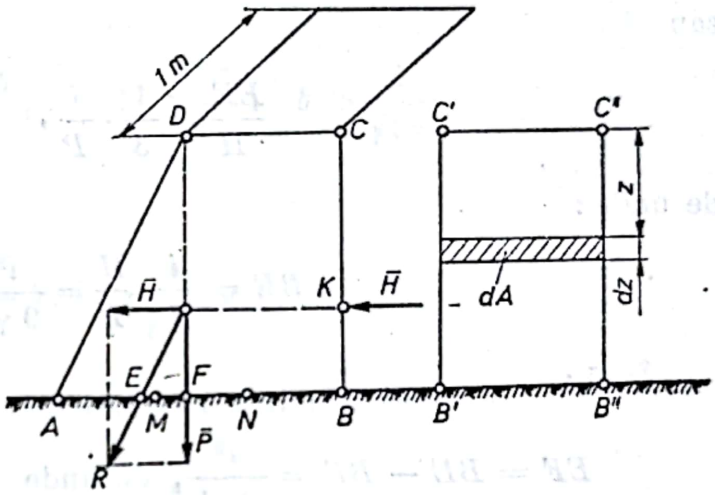


Fig. 1.27

$$dH = z dz$$

Prin urmare:

$$H = \int_0^i z dz = \frac{i^2}{2}.$$

Poziția forței H se determină aplicînd teorema momentelor în raport cu muchia proiectată în punctul C. Notînd prin K punctul de aplicație al forței H, se poate scrie:

$$H \cdot CK = \int_0^i z^2 \, dz = \frac{i^3}{3}.$$

Rezultă

$$CK = \frac{2}{3} i \text{ și } BK = \frac{i}{3}.$$

Greutatea P a zidului este egală cu aria trapezului, multiplicată cu lungimea zidului, care s-a considerat 1 m și cu greutatea sa specifică γ:

$$P = \frac{2b + b}{2} \cdot i \cdot l \cdot \gamma = \frac{3}{2} b \cdot i \cdot \gamma.$$

Scanned with OKEN Scanner

Greutatea $\bar{P}$ şi forţa de împingere a apei $\bar{H}$ sînt situate în acelaşi plan şi anume în planul median vertical dus prin mijlocul lungimii zidului, perpendicular pe această lungime, $\bar{P}$ fiind aplicat în centrul de greutate G al trapezului.

Compunînd forţele $\bar{P}$ şi $\bar{H}$, se obţine forţa rezultantă $\bar{R}$. Din triunghiurile GRP şi GEF, se deduce :

$$\frac{EF}{H} = \frac{GF}{P},$$

sau

$$\frac{EF}{H} = \frac{1}{3} \cdot \frac{i}{P},$$

de unde :

$$BE = \frac{i}{3} \cdot \frac{H}{P} = \frac{i^2}{9\,\gamma b}$$

Însă :

$$EF = BE - BF = \frac{i^2}{9\,\gamma b}, \text{ de unde } BE = \frac{i^2}{9\,\gamma b} + BF,$$

în care BF este distanţa centrului de greutate al trapezului la faţa BC, care se determină după cum urmează : se descompune suprafaţa trapezului, printr-o perpendiculară în D, într-un dreptunghi cu centrul de greutate la distanţa $\frac{b}{2}$ de CG, de arie $BC \cdot CD$ şi într-un triunghi de arie, $\frac{1}{2}(AB - CD) \cdot CB$, cu centrul de greutate la distanţa $b + \frac{b}{3}$ faţă de CB. Aplicînd teorema momentelor în raport cu punctul B, rezultă :

$$\frac{3}{2}\gamma \cdot b \cdot i \cdot BF = \gamma \cdot b \cdot i \cdot \frac{b}{2} + \gamma \frac{h \cdot i}{2}\left(b + \frac{b}{3}\right) = \frac{7}{6}\gamma\, b^2 i,$$

de unde

$$BF = \frac{7}{9}\, b$$

Se obţine :

$$BE = \frac{i^2}{9\,\gamma b} + \frac{7b}{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca E să se găsească între M și N, trebuie ca

$$BN < BE < BM.$$

Dar condiția $NB < BE$ este îndeplinită de la sine. Rămîne astfel condiția

$$\frac{i^2}{9\,\gamma b} + \frac{7b}{9} < BM = \frac{4b}{3},$$

de unde

$$\frac{i^2}{9\,\gamma b} < \frac{5}{9}, \text{ sau } b^2 > \frac{i^2}{5\gamma}; \quad b > \frac{i}{\sqrt{5\gamma}}.$$

Pentru

$$\gamma = 2,\ b > \frac{i}{\sqrt{10}} \cong 0{,}3\ i.$$

Coeficientul de stabilitate a zidului, în cazul limită, este

$$b = \frac{i}{\sqrt{5\gamma}}.$$

Momentul de răsturnare al zidului, în raport cu muchia de răsturnare A, este

$$M_r = H \cdot BK = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{i}{3} \cdot \frac{i^3}{6}.$$

Momentul de stabilitate în raport cu aceeași muchie este:

$$M_s = P \cdot AF = P \cdot (AB - BF) = \frac{11}{6}\,\gamma b^2 \cdot i.$$

Rezultă:

$$k = \frac{M_s}{M_r} = \frac{11\gamma b^2}{i^2} = \frac{11}{5} = 2{,}2 > 1{,}5.$$

1.28. Pe grinda de lemn din figura 1.28, este așezată o greutate $Q = 200$ N în punctul C. Să se determine pe cale grafică, presiunile din punctele A și B, P_A și P_B.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se construiește poligonul forțelor și poligonul funicular și se pune condiția ca poligonul funicular să se închidă. Lucrînd la scară, se obține :

$$P_A = 62 \text{ N} \text{ și } P_B = 262 \text{ N}.$$

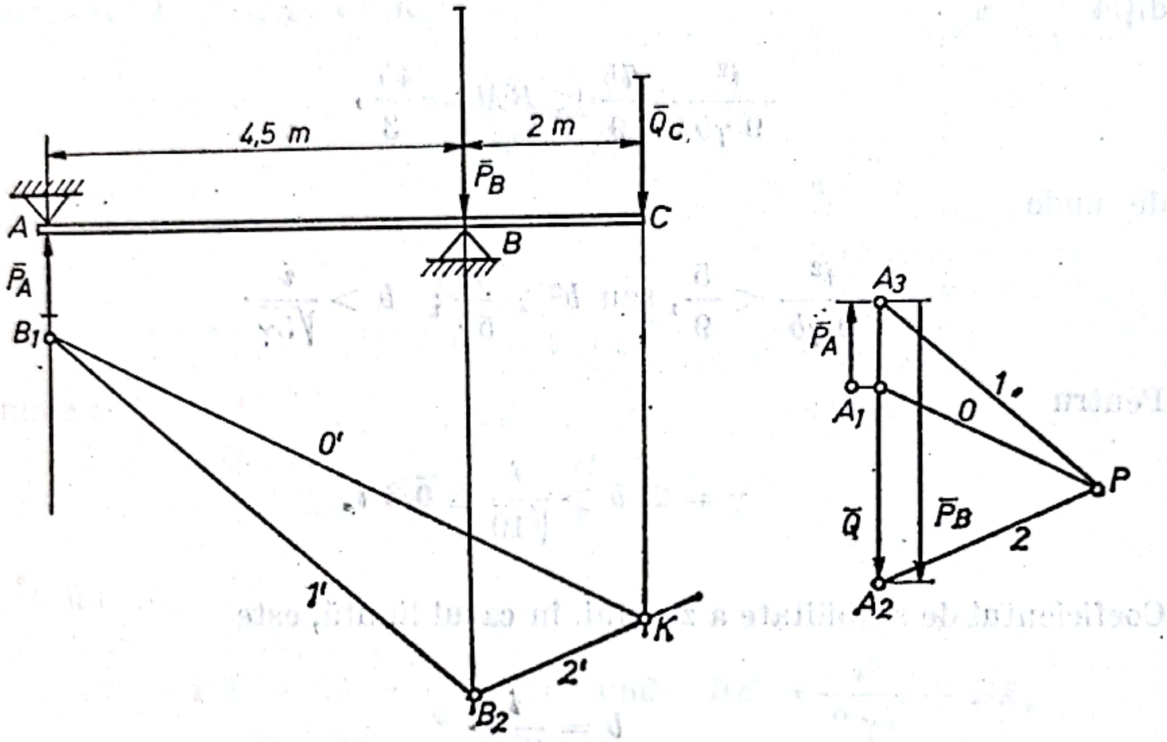


Fig. 1.28

1.29. O grindă de lemn AB, de greutate G, este susținută prin intermediul firelor BD, AE și AH (fig. 1.29). Să se determine pe cale grafică eforturile N_1, N_2 și N_3 din aceste fire.

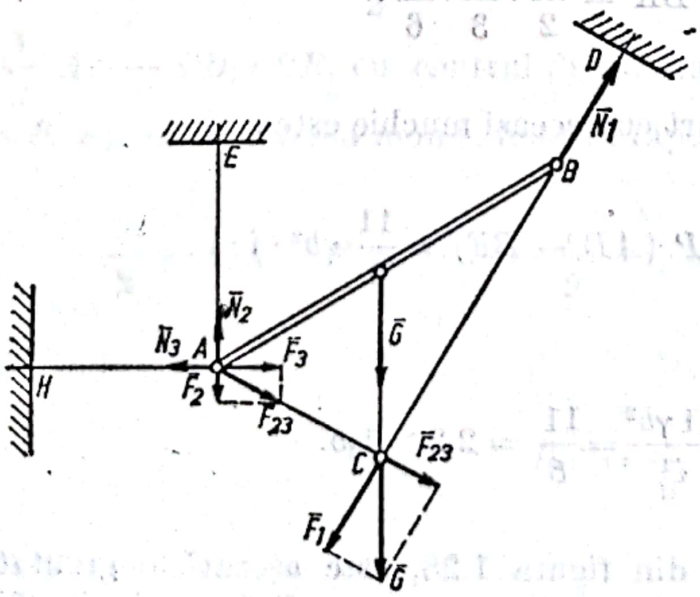


Fig. 1.29

Rezolvare. Problema se reduce la descompunerea forței G pe direcțiile BD, AE și AH. În acest scop se prelungește direcția BD, pînă cînd intersectează suportul forței G în punctul C.

Se unește apoi C cu A, se deplasează forța G pînă cînd ajunge cu punctul de aplicație în C și se descompune după cele două direcții BD și CA, obținîndu-se componentele $\bar{F}_1$ respectiv $\bar{F}_{23}$. Componenta $\bar{F}_{23}$ se deplasează în A și se descompune după direcțiile EA și AH, obținîndu-se componentele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_3$.

Forţele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ şi $\bar{F}_3$ reprezintă acţiunea greutăţii $\bar{G}$ asupra punctelor D, E şi H, care vor reacţiona cu forţele $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ şi $\bar{N}_3$, egale în modul şi direct opuse forţelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ şi $\bar{F}_3$. Forţele $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ şi $\bar{N}_3$ reprezintă eforturile din fire.

1.30. Un zid de sprijin de piatră cu greutatea $G = 15000$ daN suportă împingerea pământului $H = 8000$ daN (fig. 1.30).

Să se determine forţa transmisă asupra fundaţiei şi unghiul format de această forţă cu orizontala.

R 17000 daN; 62°

1.31. La mijlocul unui cablu funicular, cu extremităţile fixate, este suspendat un indicator cu greutatea $G = 3$ daN (fig. 1.31.) Să se determine forţa de întindere în cablu, dacă lungimea lui ABC este egală cu 30 m, iar săgeata DB este de 0,15 m.

$R \cdot N_1 = N_2 = 150$ daN.

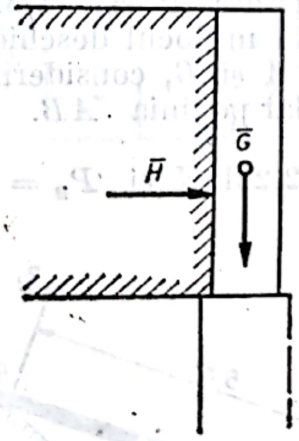


Fig. 1.30

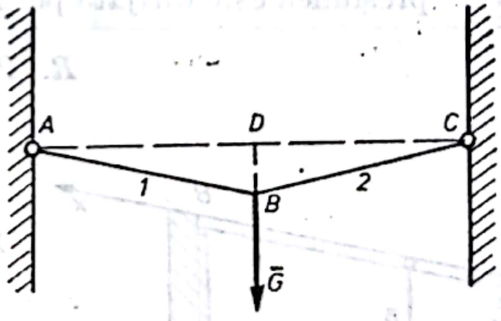


Fig. 1.31

1.32. Pe planul înclinat şi neted AB este suspendat cu o frînghie, care formează cu planul unghiul $\alpha = 15°$, un buştean de 350 daN (fig. 1.32). Să se determine forţa de întindere din frînghie şi forţa de apăsare a bustenului pe plan.

R. 313 daN; 256 daN.

1.33. Să se determine eforturile din barele macaralei utilizată la încărcarea buştenilor, cunoscînd că sarcina maximă pe care o poate ridica este $P = 3000$ daN (fig. 1.33).

R. $N_1 = 1100$ daN; $N_2 = -4100$ daN.

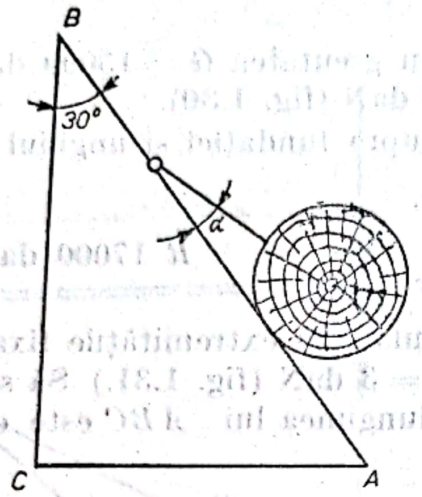


Fig. 1.32

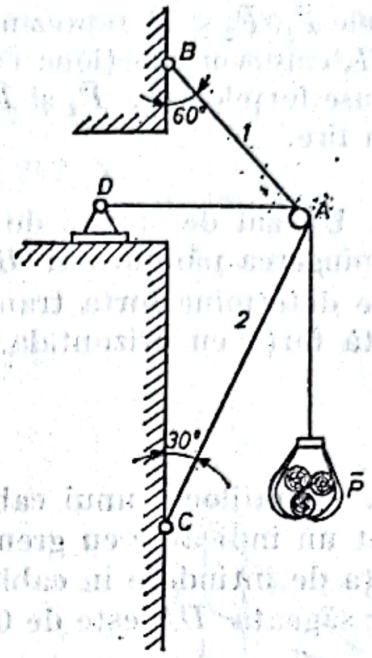


Fig. 1.33

1.34. Un căprior de acoperiș, așezat cu panta $\operatorname{tg} \alpha = 1/3$, suportă o sarcină verticală $P = 1000$ daN, aplicată la mijlocul deschiderii (fig. 1.34). Să se determine presiunile în punctele A și B, considerînd că în punctul B presiunea este dirijată perpendicular pe linia AB.

R. $P_A = 572{,}2$ daN și $P_B = 472$ daN.

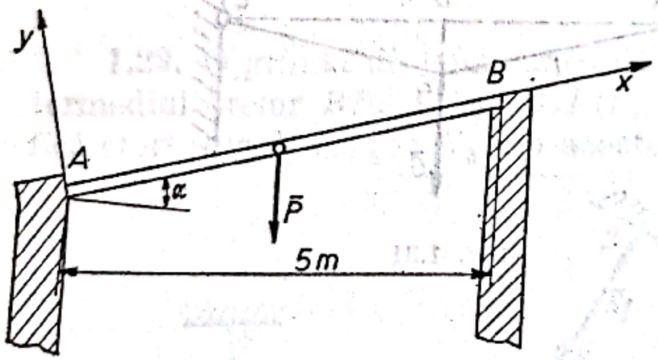


Fig. 1.34

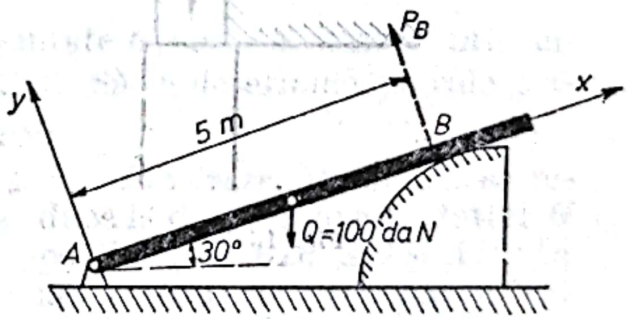


Fig. 1.35

1.35. Bara de lemn AB în greutate de 100 daN și cu lungimea de 5 m, înclinată față de orizontală cu 30° este articulată în punctul A și rezemată pe un cilindru în punctul B (fig. 1. 35). Să se determine reacțiunile din articulația A și presiunea din punctul B.

R. $P_x = 50$ daN; $P_y = 43{,}3$ daN; $P_B = 43{,}3$ daN.

1.36. Să se determine punctul de aplicație al sarcinii $P = 70$ daN pe grinda orizontală de lemn din figura 1.36 (grinda AB).

R. $x = 2{,}41$ m.

Scanned with OKEN Scanner

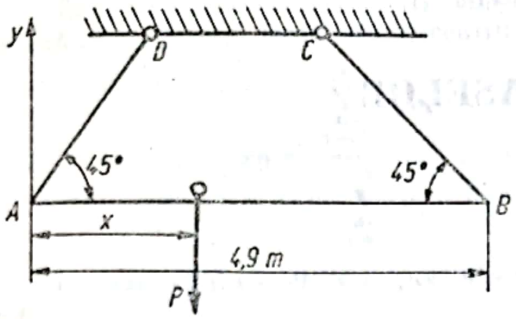


Fig. 1.36

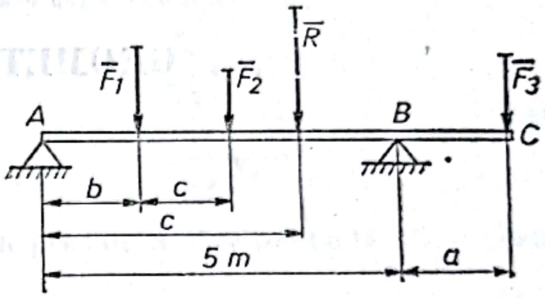


Fig. 1.37

1.37. Să se determine grafic și să se verifice pe cale analitică, presiunile din reazemele grinzii de lemn din figura 1.37, încărcată cu forțele F_1, F_2 și F_3, precum și valoarea și poziția forței rezultante indicate. Să se examineze următoarele cazuri:

Nr. crt.	Forța în [kN]			Distanța în [m]			Răspuns			
	F_1	F_2	F_3	a	b	c	R [kN]	e [m]	P_A	P_B
1	3	2	2	2	2	1,5	7	3,86	1,6	5,4
2	2,5	2	3	1,5	2	1,5	7,5	4,2	1,2	6,3
3	4	3	2	2	1	3	9	3	3,6	5,1

CAPITOLUL II

GEOMETRIA MASELOR

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

2.1. CENTRE DE GREUTATE

2.1.1. CENTRELE DE GREUTATE ALE CORPURILOR OMOGENE

Toate corpurile și sistemele materiale oarecare pot fi considerate compuse dintr-un număr foarte mare de particele foarte mici, fiecare dintre acestea avînd volumul său V_i, o masă $m_i = \rho_i V_i$ și o greutate $G_i = m_i g = \rho_i g V_i$, în care $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ este intensitatea cîmpului gravitațional terestru. Considerînd cîmpul g constant, greutățile G_i pot fi socotite forțe paralele, de același sens și dirijate vertical în jos. Vectorul de poziție al centrului forțelor paralele, în cazul în care forțele reprezintă greutăți, corespunde vectorului de poziție al centrului de greutate și are expresia :

$$\bar{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}. \tag{2.1}$$

Înlocuind $G_i = m_i g$, rezultă pentru vectorul de poziție al centrului de greutate relația :

$$\bar{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2.2}$$

Din formula (2.2), se vede că poziția centrului de greutate al unui sistem material depinde numai de distribuția maselor. Pentru acest motiv centrul de greutate al unui sistem material se mai numește și centrul de masă al sistemului.

Proiectînd relația (2.2) a vectorului de poziție al centrului de greutate pe axele unui sistem de referință ortonormat (trirectangular drept) se obțin coordonatele centrului de greutate al unui sistem material :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul sistemelor de corpuri omogene, notînd cu ρ densitatea (masa unității de volum), rezultă $m_i = \rho V_i$ și coordonatele centrului de greutate capătă forma :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}; \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}. \tag{2.4}$$

În cazul cînd corpurile se prezintă sub formă de plăci de grosime constantă δ, se poate scrie :

$$V_i = A_i \cdot \delta, \tag{2.5}$$

A_i fiind ariile corespunzătoare volumelor V_i. Substituind (2.5) în (2.4), formulele centrului de greutate, pentru corpurile în formă de plăci, care au aceeași grosime devine, în urma simplificării cu δ :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}. \tag{2.6}$$

În cazul sistemelor de bare cu lungimi diferite (corpuri filiforme) însă de secțiune constantă A, avem :

$$V_i = A \cdot L_i; \tag{2.7}$$

ținînd seama de (2.7), relațiile (2.4) devin :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}; \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}. \tag{2.8}$$

În cazul corpurilor continue, acestea se pot împărți într-un număr nelimitat de părți foarte mici și sumele devin integrale ; formulele centrului de greutate se scriu, în aceste cazuri, după cum urmează :

$$x_G = \frac{\int x\,dm}{\int dm}; \quad y_G = \frac{\int y\,dm}{\int dm}; \quad z_G = \frac{\int z\,dm}{\int dm}; \tag{2.9}$$

$$x_G = \frac{\int x\,dV}{\int dV}; \quad y_G = \frac{\int y\,dV}{\int dV}; \quad z_G = \frac{\int z\,dV}{\int dV}; \tag{2.10}$$

$$x_G = \frac{\int x\,dA}{\int dA}; \quad y_G = \frac{\int y\,dA}{\int dA}; \tag{2.11}$$

$$x_G = \frac{\int x\,dL}{\int dL}; \quad y_G = \frac{\int y\,dL}{\int dL}; \quad z_G = \frac{\int z\,dL}{\int dL}. \tag{2.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

La calculul centrelor de greutate ale volumelor și suprafețelor omogene, se pot utiliza integralele multiple. Formulele coordonatelor centrelor de greutate exprimate prin integrale multiple sînt :

— Pentru volume :

$$x_G = \frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}\,;\quad y_G = \frac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}\,;\quad z_G = \frac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz} \tag{2.13}$$

— Pentru suprafețe :

$$x_G = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}\,;\quad y_G = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}\,. \tag{2.14}$$

În cazul corpurilor neomogene, considerînd o placă de grosime constantă δ, de exemplu compusă din porțiunile: ①, ②, ③, ④ și ⑤, pentru a determina coordonatele centrului de greutate la întregii plăci, se pun în centrele de greutate ale porțiunilor greutățile acestora și se consideră greutatea G a întregii plăci ca o forță concentrată în centrul de greutate G al plăcii (fig. 2, *a*).

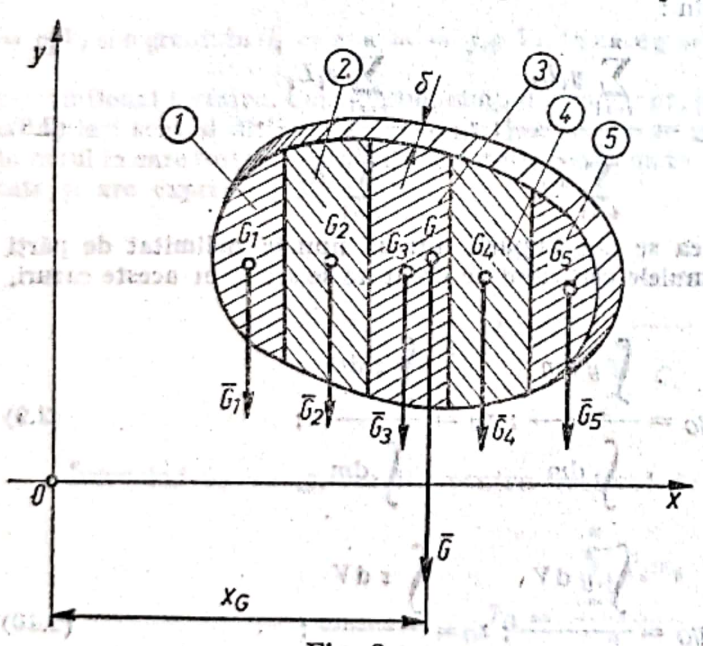


Fig. 2.a

Greutățile porțiunilor fiind forțe paralele și coplanare, coordonatele centrului de greutate al plăcii vor fi :

$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i \cdot \delta \cdot \gamma_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \delta \cdot \gamma_i}\,; \\ y_G &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i \cdot \delta \cdot \gamma_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \delta \cdot \gamma_i}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.14, a}$$

sau în urma simplificării cu δ :

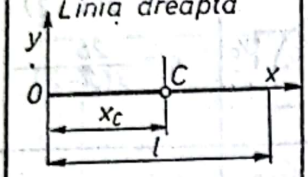
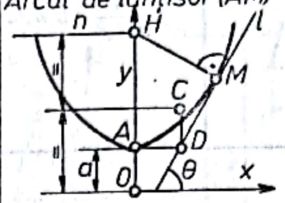
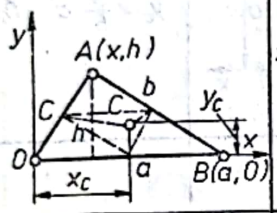
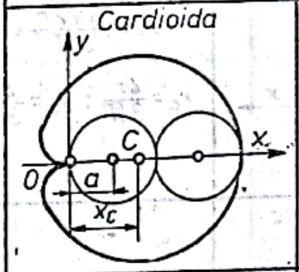
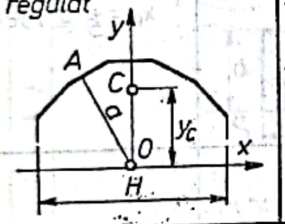
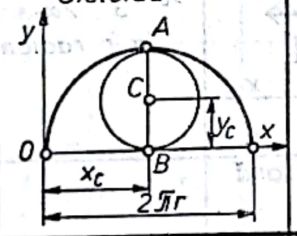
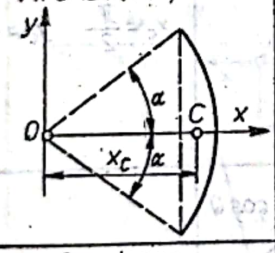
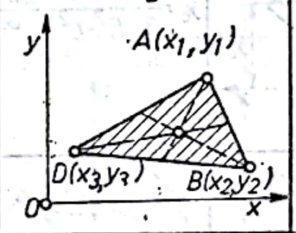
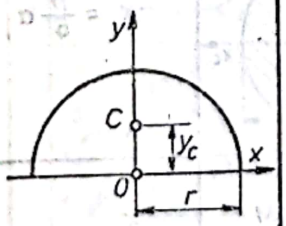
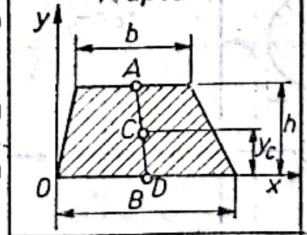
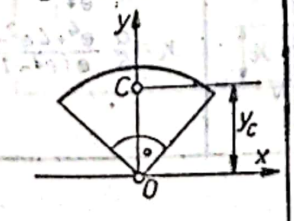
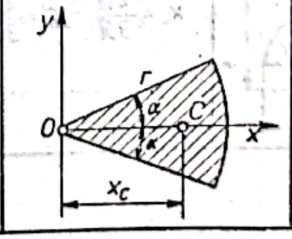
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i \cdot \gamma_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \gamma_i}\,;\quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i \cdot \gamma_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \gamma_i} \tag{2.15}$$

În aceste relații, γ_i reprezintă greutățile specifice (unității de volum) ale materialelor din care sînt confecționate elementele (porțiunile) ce constituie placa.

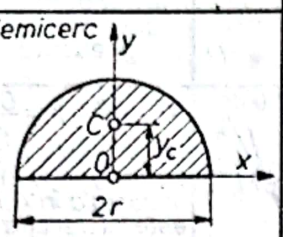
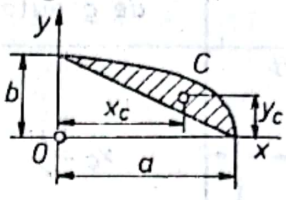
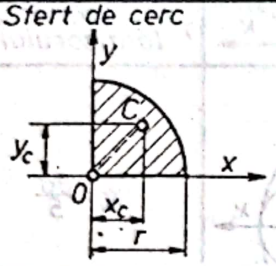
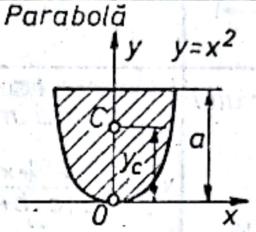
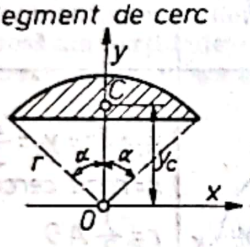
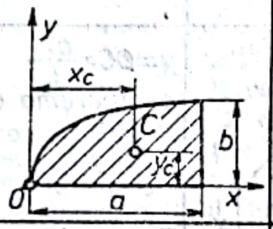
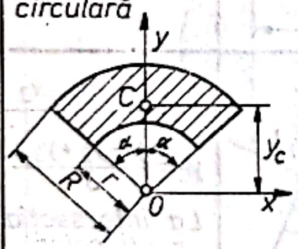
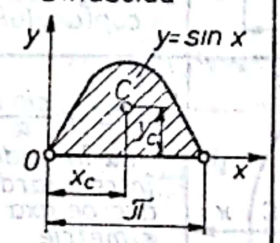
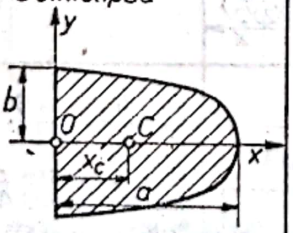
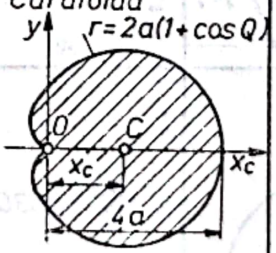
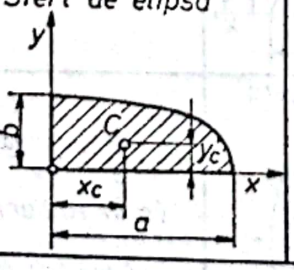
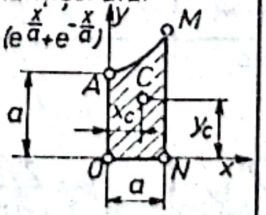
În tabelul 2.*a* se dau coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor uzuale (linii, suprafețe, volume), pentru a fi utilizate la rezolvarea problemelor.

Scanned with OKEN Scanner

Centre de greutate

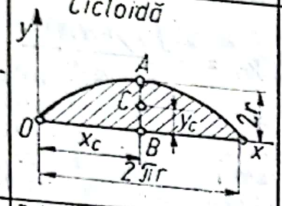
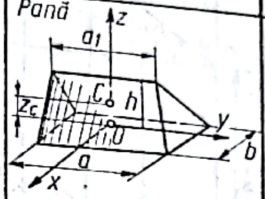
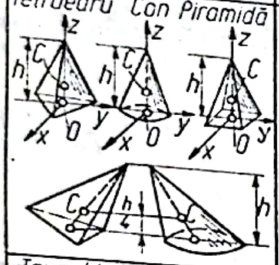
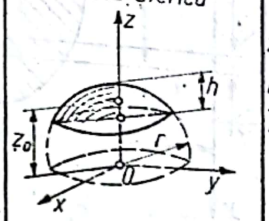
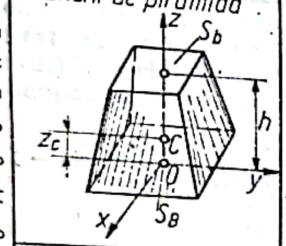
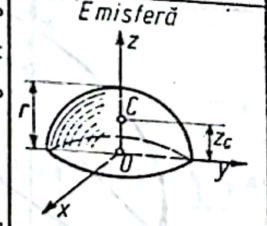
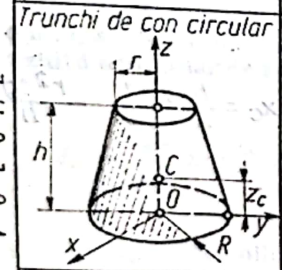
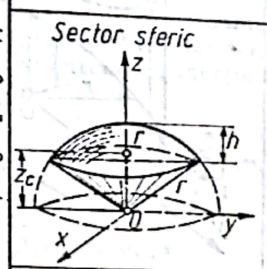
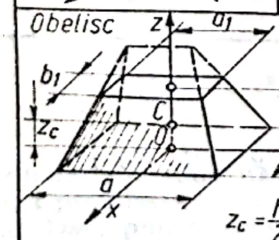
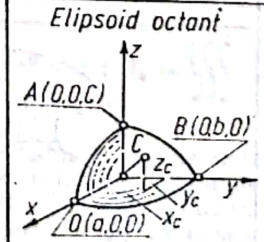
Figura și sistemul de coordonate	Coordonatele centrului de greutate	Figura și sistemul de coordonate	Coordonatele centrului de greutate
LINII OMOGENE			
Linia dreaptă 	$x_C = \frac{l}{2}$	Arcul de lănțișor (AM) 	$x_C = AD$; $y_C = \frac{OH}{2}$; Unde D este intersecția tangentei în M cu orizontala în A, iar H este intersecția normalei în M cu Oy și a = parametrul lănțișorului
Conturul triunghiului 	Intersecția bisectoarelor triunghiului median $x_C = \frac{a(a+2b)+x(c-b)}{2(a+b+c)}$ $y_C = \frac{h}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$	Cardioida 	$x_C = \frac{8a}{5}$
Contur poligonal regulat 	$y_C = OC = \frac{aH}{L}$ a = apotema 0A H = proiecția conturului poligonal pe o direcție Ox perpendiculară la axa de simetrie L = lungimea conturului	Cicloida 	$x_C = \pi r$; $y_C = \frac{4}{3} r$ r = raza cercului $r = \frac{1}{2} AB$
Arc de cerc 	$x_C = OC = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (α în radiani) între coarda și arc pe axa de simetrie	**SUPRAFEȚE OMOGENE** Triunghi 	$x_C = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ $y_C = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ La intersecția medianelor
Semicerc 	$y_C = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366\, r$	Trapez 	$y_C = \frac{h}{3} \frac{2b+B}{B+b}$ C se găsește pe segmentul AD, A și D fiind mijloacele bazelor la cota y_C
Sfert de cerc 	$y_C = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r$	Sector de cerc 	$x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (α în radiani)

SUPRAFEȚE OMOGENE

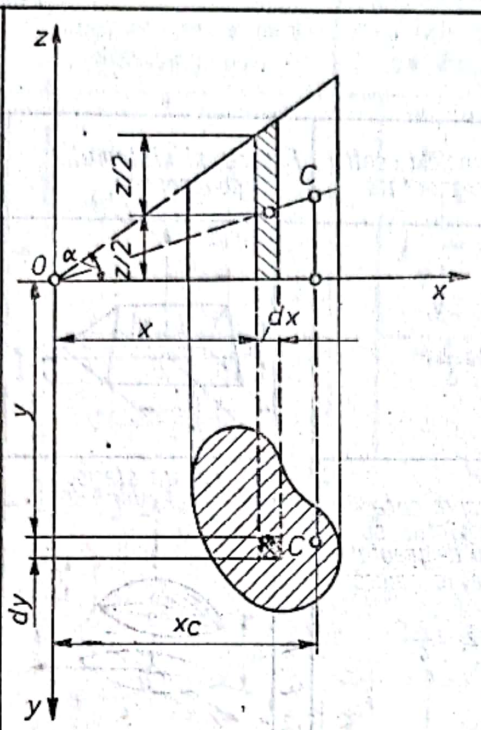
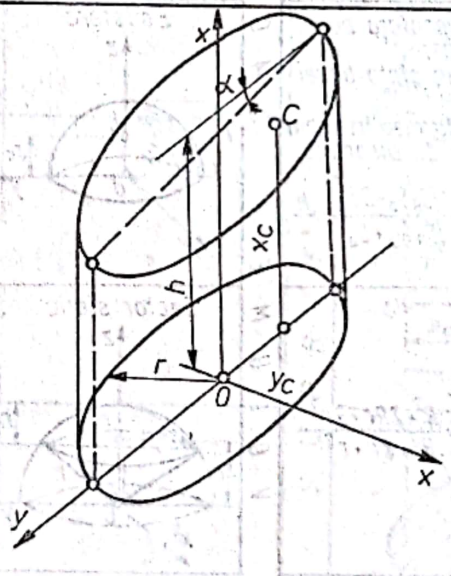
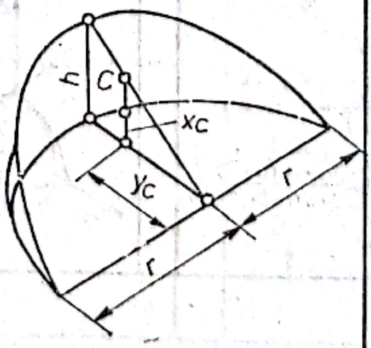
Figura și sistemul coordonate	Coordonatele centrului de greutate	Figura și sistemul de coordonate	Coordonatele centrului de greutate
Semicerc 	$y_c = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}4244\,r$	Segment de elipsă 	$x_c = \frac{2a}{3(\pi-2)}$ $y_c = \frac{2b}{3(\pi-2)}$
Sfert de cerc 	$OC = \frac{4\sqrt{2}r}{3\pi}$ $x_c = \frac{4r}{3\pi}$; $y_c = \frac{4r}{3\pi}$	Parabolă 	$y_c = \frac{3}{5}\,a = 0{,}6\,a$
Segment de cerc 	$y_c = \frac{4}{3}\,\frac{r\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$ (α în radiani)	Jumătate de parabolă 	$x_c = \frac{3}{5}\,a$; $y_c = \frac{3}{8}\,b$
Portiune de coroană circulară 	$y_c = \frac{2}{3}\,\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$	Sinusoidă 	$x_c = \frac{\pi}{2}$ $y_c = \frac{\pi}{8}$
Semielipsă 	$x_c = \frac{4a}{3\pi}$	Cardioida 	$x = \frac{11}{6}\,a$
Sfert de elipsă 	$x_c = \frac{4a}{3\pi}$; $y_c = \frac{4b}{3\pi}$	Aria suprafeței OAMN a lanțișorului $y = (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ 	$x_c = \frac{2a}{e+1}$ $y_c = \frac{a}{6}\,\frac{e^4+4e^2-1}{e(e^2-1)}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.a (continuare)

Figura și sistemul coordonate	Coordonatele centrului de greutate	Figura și sistemul de coordonate	Coordonatele centrului de greutate
SUPRAFEȚE		VOLUME OMOGENE	
Cicloidă 	$x_c = \pi r$ $y_c = \frac{5}{6} r$	Pană 	$z_c = \frac{h}{2} \frac{(a+a_1)}{2a-a_1}$
Tetraedru Con Piramidă 	Pe dreapta care unește vîrful cu centrul de greutate al bazei la calotă $z_c = \frac{h}{4}$	Calotă sferică 	$z_c = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$ Formula valabilă și pentru elipsoidul de revoluție de axă egală cu diametrul sferei
Trunchi de piramidă 	S_B - Suprafața bazei mari S_b - Suprafața bazei mici h - Înălțimea trunchiului de piramidă $z_c = \frac{S_B + 2\sqrt{S_B S_b} + 3S_b}{S_B + \sqrt{S_B S_b} + S_b} \frac{h}{4}$	Emisferă 	$z_c = \frac{3}{8} r$
Trunchi de con circular 	$z_c = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$	Sector sferic 	$z_c = \frac{3}{8}(2r-h)$
Obelisc 	$z_c = \frac{h}{2} \frac{a(b+b_1) + a_1(b+3b_1)}{b(2a+a_1) + b_1(a+2a_1)}$	Elipsoid octant 	$x_c = \frac{3}{8} a$ $y_c = \frac{3}{8} b$ $z_c = \frac{3}{8} c$

Scanned with OKEN Scanner

Corpul, figura și sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Cilindrul trunchiat oblic $S_y = \int x\,dA$ este momentul static, $J_y = \int x^2 dA$ momentul de inerție al bazei în raport cu axa y, iar $J_{xy} = \int xy dA$ momentul de inerție centrifugal al bazei față de axele x și y		$x_C = \frac{\int x^2 dA}{\int x\,dA}$ $y_C = \frac{\int xy\,dA}{\int x\,dA}$ $z_C = x_C \quad tg\,\frac{\alpha}{2}$
Cilindrul circular drept taiat oblic Fie planul xy plan de simetrie, h lungimea axei și raza cercului, α unghiul de înclinare a secțiunii oblice față de bază		$y_C = \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2 tg\,\alpha}{h}$; $x_C = \frac{h}{2} + \frac{1}{8} \frac{r^2 tg^2 \alpha}{h}$
Copita cilindrului Copita goală (R raza exterioara, r cea interioara H înălțimea exterioara, h cea interioară) $y_G = \frac{3}{16} \pi (R^4 - r^4)/(R^3 - r^3)$ $x_G = \frac{3}{32} \pi (H^4 - h^4)(H^3 - h^3)$		$x_C = \frac{3}{32} \pi h$; $y_C \quad \frac{3}{32} \pi h$

Scanned with OKEN Scanner

2.2.1. DEFINIȚIA MOMENTELOR DE INERȚIE

Momentele de inerție sînt mărimi mecanice scalare, care oferă o imagine asupra modului în care este repartizată masa unui corp, în raport cu un sistem de referință. Această mărime apare deseori în mecanica aplicată și constituie un prețios instrument de calcul pentru ingineri.

Fie un sistem format din n puncte materiale; un punct oarecare al sistemului, A_i are masa m_i și este determinat, față de un sistem ortonormat de referință (fig. 2. *b*), prin vectorul său de poziție:

$$\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}. \tag{2.16}$$

Se notează cu $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, masa totală a sistemului material.

Se numește *moment de inerție planar* al sistemului de puncte materiale, față de un plan oarecare, suma produselor maselor m_i prin pătratul distanțelor acestor mase la planul considerat.

În cazul prezentat în figura 2. *b*, momentele de inerție planare ale sistemului material respectiv sînt:

$$J_{xoy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2;\ J_{xoz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2;$$

$$J_{yoz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2. \tag{2.17}$$

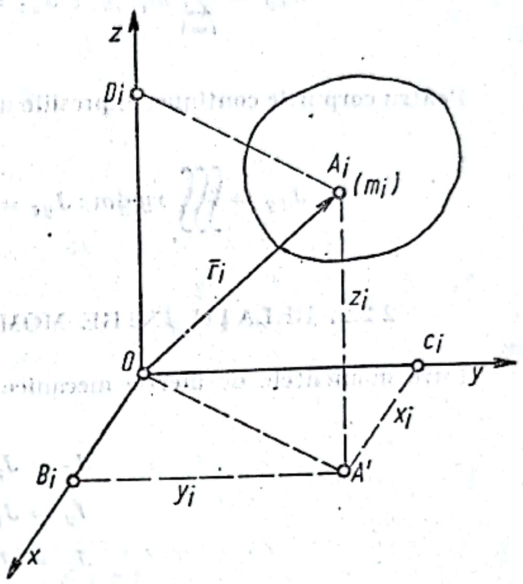


Fig. 2. b

Dacă masele sînt distribuite în mod continuu, cum este cazul corpurilor solide sumele din expresiile (2.17) devin integrale, extinse la întreg volumul ocupat de mase; rezultă:

$$J_{xoy} = \iiint z^2\,dm;\ J_{xoz} = \iiint y^2\,dm;\ J_{yoz} = \iiint x^2\,dm. \tag{2.18}$$

Se numește moment de inerție mecanic axial (ecuatorial) al sistemului de puncte materiale față de o axă, suma produselor maselor m_i, prin pătratul distanțelor acestor mase la axa considerată; rezultă următoarele relații de definiție ale momentelor de inerție axiale:

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2);\ J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2);\ J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2). \tag{2.19}$$

În cazul corpurilor solide continue, relațiile (2.19) devin:

$$J_x = \iiint (y^2 + z^2)\,dm;\ J_y = \iiint (x^2 + z^2)\,dm;\ J_z = \iiint (x^2 + y^2)\,dm. \tag{2.20}$$

Se numește moment de inerție polar, al unui sistem de puncte materiale față de un punct (pol), suma produselor maselor m_i, prin pătratul distanțelor acestor mase la punctul (polul) considerat. Dacă punctul în raport cu care se calculează momentul de inerție este chiar originea O a sistemului de referință $xOyz$, momentul de inerție polar va avea expresia:

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \tag{2.21}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru corpurile solide și continue :

$$J_o = \iiint r^2 \, dm = \iiint (x^2 + y^2 + z^2) \, dm. \tag{2.22}$$

Se numește moment de inerție centrifugal al sistemului material față de două plane rectangulare, suma produselor maselor m_i, prin distanțele respective la cele două plane, adică :

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \; ; \; J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \; ; \; J_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \, . \tag{2.23}$$

Pentru corpurile continue, expresiile momentelor de inerție centrifugale devin :

$$J_{xy} = \iiint xy \, dm \; ; \; J_{yz} = \iiint yz \, dm \; ; \; J_{zx} = \iiint zx \, dm. \tag{2.24}$$

2.2.2. RELAȚII ÎNTRE MOMENTELE DE INERȚIE MECANICE

Între momentele de inerție mecanice axiale și cele planare, există următoarele relații :

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_{xOy} + J_{xOz} \; ; \\ J_y &= J_{yOz} + J_{xOz} \; ; \\ J_z &= J_{xOz} + J_{yOz} \; ; \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

iar între momentul de inerție mecanic polar și momentele de inerție axiale și planare :

$$\left.\begin{aligned} J_o &= J_x + J_{yOz} \; ; \\ J_o &= J_y + J_{xOz} \; ; \\ J_o &= J_z + J_{xOy}. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

De asemenea, momentul de inerție polar se mai poate scrie :

$$J_o = J_{xOy} + J_{yOz} + J_{xOz}, \tag{2.27}$$

și încă :

$$J_o = \frac{J_x + J_y + J_z}{2} \, . \tag{2.28}$$

2.2.3. LEGĂTURA DINTRE MOMENTELE DE INERȚIE MECANICE ȘI CELE GEOMETRICE

Considerînd un corp solid, momentul de inerție axial al acestuia în raport cu o axă (Δ) este :

$$J_\Delta = \int_V u^2 \, dm, \tag{2.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

u fiind distanța de la elementul de masă dm la axa (Δ). Dacă se notează cu ρ masa specifică și cu dV elementul de volum, se poate scrie

$$dm = \rho\, dV,$$

iar momentul de inerție devine:

$$J_\Delta = \int_V \rho\, u^2\, dV,$$

integrala fiind extinsă la întreg volumul V. Presupunînd corpul omogen, ρ = constant și prin urmare:

$$J_\Delta = \rho \int_V u^2\, dV.$$

Expresia:

$$\int_V u^2\, dV = \iiint_V u^2\, dx\, dy\, dz = I_\Delta,$$

reprezintă momentul inerție geometric axial al corpului, exprimat prin puterea a cincea a unității de lungime.

Relația (2.29) devine, deci:

$$J_\Delta = \rho \cdot I_\Delta;$$

În cazul corpurilor care se prezintă sub formă de plăci subțiri, de grosime constantă, se admite că masele sînt uniform distribuite pe suprafețe; în acest caz: $dm = \rho \cdot dA$, unde $dA = dx \cdot dy$. Expresia momentului de inerție devine:

$$J_\Delta = \int_A u^2\, dm = \int_A \rho\, u^2\, dA = \rho \int_A u^2\, dA,$$

în care:

$$\int_A u^2\, dA = \int_A u^2\, dx \cdot dy = I_\Delta$$

reprezintă momentul de inerție axial al suprafeței corpului, intergrala fiind extinsă la întreaga suprafață A a acestuia.

În cazul în care corpurile au formă de bare, se consideră că masa corpului are o distribuție liniară; în acest caz: $dm = \rho\, dL$, unde dL este elementul de lungime; expresia momentului de inerție devine în acest caz:

$$J_\Delta = \int_L u^2\, dm = \rho \int_L u^2\, dL,$$

unde:

$$I_\Delta = \int_L u^2\, dL$$

reprezintă momentul de inerție geometric al liniei considerate.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare relaţia (2.30) se poate aplica atît la volume omogene, cît şi la suprafeţe sau linii materiale omogene. Rezultă, deci că momentul de inerţie geometric al volumului, suprafeţei sau liniei, înmulţit cu masa specifică ρ, dă momentul de inerţie mecanic respectiv.

În multe probleme de mecanică este util să se exprime momentul de inerţie J sub forma :

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot d_i^2 = M \cdot i^2, \tag{2.31}$$

în care M este masa totală a corpului, iar distanţa i poartă numele de *rază de inerţie* (rază de giraţie) a maselor date în raport cu planul, axa sau polul faţă de care s-a considerat momentul de inerţie.

Din (2.31) se deduce expresia razei de inerţie :

$$i = \sqrt{\frac{J}{M}}. \tag{2.32}$$

2.2.4. VARIAŢIA MOMENTELOR DE INERŢIE FAŢĂ DE AXE PARALELE ŞI FAŢĂ DE AXE CONCURENTE

Momentul de inerţie al unui sistem de puncte materiale, faţă de o axă (Δ_1), paralelă cu o axă dată (Δ) şi faţă de care se cunoaşte momentul de inerţie J_Δ se poate calcula cu ajutorul relaţiei :

$$J_{\Delta_1} = J_\Delta + M \cdot d^2, \tag{2.33}$$

cunoscută sub denumirea de *teorema lui Steiner*.

În relaţia (2.33), M reprezintă masa totală a sistemului material, J_Δ momentul de inerţie al sistemului material, în raport cu o axă (Δ) ce trece prin centrul de greutate al sistemul (fig. 2, *c*), iar J_{Δ_1}, momentul de inerţie mecanic al sistemului material în raport cu o axă (Δ_1) paralelă cu axa (Δ) şi situată la distanţa d faţă de aceasta.

Momentul de inerţie al unui sistem material în raport cu o axă (Δ) ce trece prin originea sistemului de referinţă şi are cosinuşii directori egali respectiv cu α, β şi γ (fig. 2. *d*), se determină cu ajutorul relaţiei :

$$J_\Delta = \alpha^2 \cdot J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\beta\gamma J_{yz} - 2\alpha\gamma J_{xz}. \tag{2.3}$$

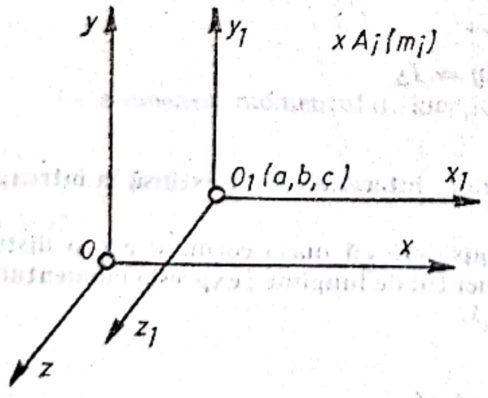


Fig. 2.c

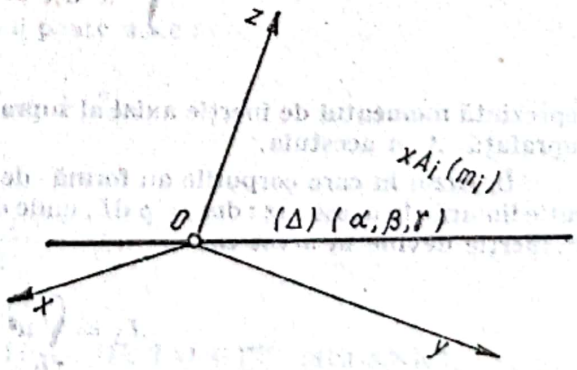


Fig. 2.d

În cazul în care sistemul material poate fi considerat figură plană, căreia trebuie să i se determine momentul de inerţie faţă de o axă rotită, situată în planul figurii şi care trece prin originea sistemului de referinţă, relaţia (2.34) devine :

$$J_\Delta = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y - 2\alpha\beta J_{xy}, \tag{2.35}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$J_\Delta = J_z \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - J_{zy} \sin 2\varphi, \tag{2.36}$$

unde φ este unghiul pe care axa rotită îl face cu sensul pozitiv al axei Oz.

Se definesc direcţii principale de inerţie drept direcţiile faţă de care momentele de inerţie mecanice au valori maxime şi minime. Ele devin momente principale de inerţie.

În cazul plăcilor sau secţiunilor plane, se pot calcula momentele de inerţie geometrice principale şi direcţiile principale cu ajutorul relaţiilor :

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}\,; \tag{2.37}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{-2I_{zy}}{I_z - I_y}. \tag{2.38}$$

Pentru a calcula momentul de inerţie centrifugal faţă de două axe care trec prin centrul de greutate al unei secţiuni plane nesimetrice, se utilizează relaţia :

$$I_{zy} = \frac{I_{z_1} - I_{y_1}}{2} \sin 2\alpha, \tag{2.39}$$

unde α este unghiul axei z cu direcţia principală z_1.

Dacă direcţiile principale de inerţie trec prin centrul de greutate al corpului ele se numesc direcţii principale de inerţie. Faţă de aceste axe se calculează momentele de inerţie principale centrale.

2.3. MOMENTE STATICE

Dacă se raportează un sistem de puncte materiale la un sistem de axe carteziene triortogonale $xOyz$, atunci expresiile de formă generală :

$$\sum x_i^m y_i^n z_i^p m_i, \tag{2.40}$$

în care m, n, p sînt numere întregi şi pozitive, poartă numele generic de *moment*. Ordinul unui astfel de moment este

$$m + n + p.$$

În funcţie de ordinul momentului, distingem :

a) Momentul de ordinul zero

$$\sum m_i = M, \tag{2.41}$$

care este chiar masa corpului.

b) Momente de ordinul întîi

$$\sum m_i x_i\,;\ \sum m_i y_i\,;\ \sum m_i z_i \tag{2.42}$$

se numesc momente statice.

În prima sumă masele punctelor se înmulţesc cu abscisele lor x_i (distanţele la planul yOz) ; această sumă poartă numele de *moment static* în raport cu planul yOz. Celelalte două momente statice sînt, respectiv, în raport cu planele xOz şi xOy.

c) Momentele de ordinul al doilea

$$\sum m_i(y_i^2 + z_i^2);\ \sum m_i x_i y_i;\ \sum m_i x_i^2;\ \sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad \text{etc.}$$

sînt momente de inerție, pe care le-am prezentat mai sus.

d) Momentele de ordinul al treilea, al patrulea etc. de forma :

$$\sum m_i x_i^3;\ \sum m_i x_i^2 y_i;\ \sum m_i y_i z_i;\ \sum m_i x_i^4, \tag{2.43}$$

se numesc momente de ordin superior și intervin mai rar în problemele tehnice.

Așadar, momentele statice mecanice sînt considerate momente de ordinul întîi de forma :

$$S = \sum m_i d_i \tag{2.44}$$

ale maselor unui sistem de puncte materiale, în raport cu un anumit reper, unde d_i este distanța la acest reper al elementului de masă m_i.

Prin definiție se numește moment static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un anumit reper (punct, axă, plan), suma produselor acestor mase prin distanțele lor la reperul considerat.

În funcție de reperul admis, există următoarele tipuri de momente statice :

— *Momente statice planare* :

$$S_{xOy} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i;\ S_{xOz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i;\ S_{yOz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{2.45}$$

— *Momente statice axiale* :

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \sqrt{y_i^2 + z_i^2};\ S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \sqrt{x_i^2 + z_i^2};\ S_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \sqrt{x_i^2 + y_i^2}. \tag{2.46}$$

— *Moment static polar* :

$$S_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right)^2}. \tag{2.47}$$

În cazul unui corp solid sumele din relațiile (2.45), (2.46) și (2.47) capătă respectiv forma :

— *Momente statice planare*

$$S_{xOy} = \int z\,dm;\ S_{xOz} = \int y\,dm;\ S_{yOz} = \int x\,dm, \tag{2.48}$$

— *Momente statice axiale*

$$S_x = \int \sqrt{y^2 + z^2}\,dm;\ S_y = \int \sqrt{x^2 + z^2}\,dm;\ S_z = \int \sqrt{x^2 + y^2}\,dm. \tag{2.49}$$

— *Moment static polar*

$$S_0 = \int r\,dm. \tag{2.50}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul plăcilor subțiri (table, foi de placaj etc.), corpuri la care una din dimensiuni este mică față de celelalte două și la care avem deci o distribuție superficială a maselor, se poate scrie :

$$dm = \rho_A \, dA,$$

unde dA este elementul de suprafață, iar ρ_A densitatea superficială a corpului. Rezultă momentele statice axiale, respectiv polar :

$$S_y = \int z \, dA \; ; \quad S_z = \int y \, dA \; ; \quad S_0 = \int r \, dA = \int \sqrt{y^2 + z^2} \, dA. \tag{2.51}$$

Momentul static al unei secțiuni plane, potrivit teoremei momentelor statice, se calculează față de o axă cu relația :

$$S_z = y_G \cdot A, \tag{2.52}$$

unde y_G este distanța de la centrul de greutate al ariei A la axa Ox.

Modulul de rezistență axial este o caracteristică a secțiunii transversale și se obține efectuînd raportul dintre momentul de inerție axial și distanța pînă la fibra cea mai depărtată de axa neutră.

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \tag{2.53}$$

Modulul de rezistență polar este :

$$W_0 = \frac{I_0}{\rho_{max}}. \tag{2.54}$$

Pentru cele mai întîlnite forme de secțiuni plane și pentru profile normalizate sînt date valorile caracteristicilor de secțiune în tabele.

Pentru corpuri compuse, este indicat să se calculeze mai întîi momentele de inerție geometrice și în final să se determine momentul de inerție mecanic în funcție de masa corpului compus.

2.4. MOMENTELE DE INERȚIE ALE CORPURILOR DE ROTAȚIE

Se consideră corpul de rotație din figura 2. *e*, generat prin rotirea curbei plane

$$y = f(x)$$

în jurul axei Ox. Momentul de inerție al acestui corp în raport cu axa de rotație este :

$$J_x = \frac{\pi M}{2V} \int_{AB} y^4 \, dx, \tag{2.55}$$

V fiind volumul corpului de rotație.

Momentele de inerție față de axele normale la axa de rotație sînt respectiv :

$$J_y = J_z = \frac{1}{2} J_x + J_{yOz}, \tag{2.56}$$

în care :

$$J_{yOz} = \frac{\pi M}{V} \int_{AB} x^2 y^2 \tag{2.57}$$

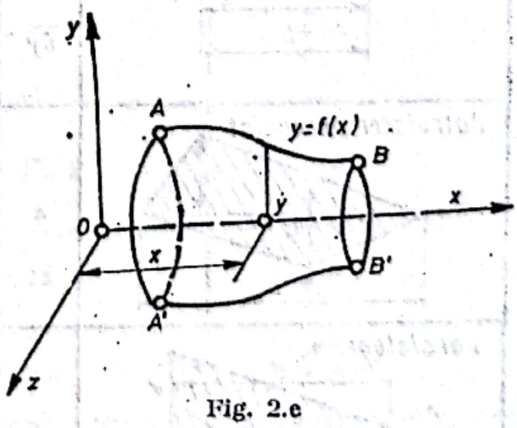


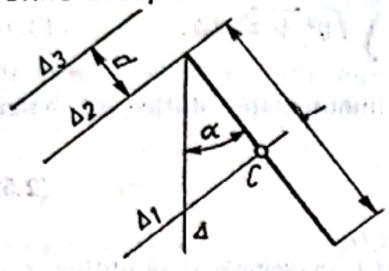
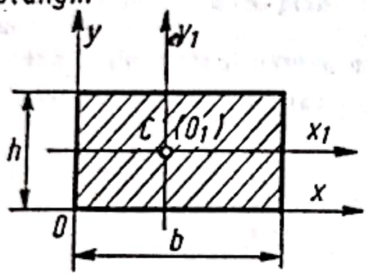
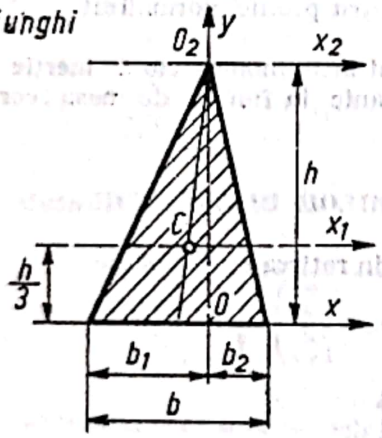
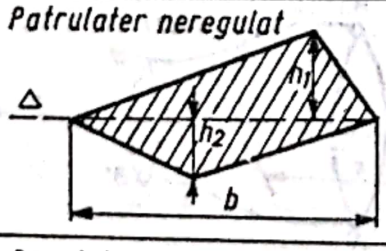
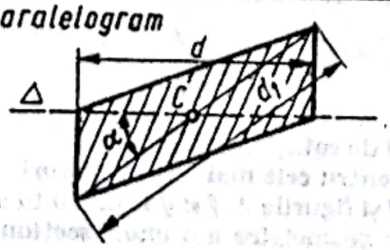
Fig. 2.e

este momentul de inerție transversal sau ecuatorial al corpului de rotație.

În tabelul 2, *b*, se dau expresiile momentelor de inerție pentru cele mai uzuale figuri geometrice întîlnite în practica inginerească, iar în tabelele 2, *c* și *d* și figurile 2. *f* și *g* se prezintă unele nomograme, necesare calculului operativ, ale caracteristicilor geometrice ale unor secțiuni de configurație specială, întîlnite în economia forestieră.

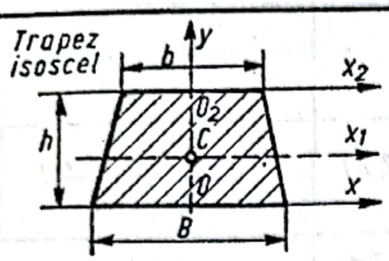
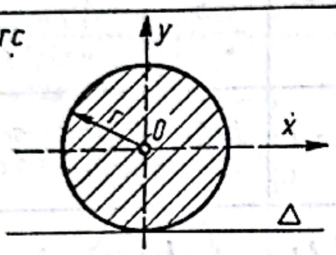
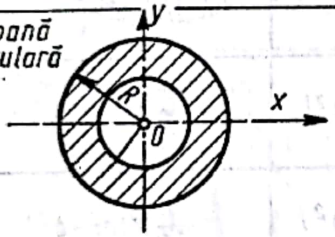
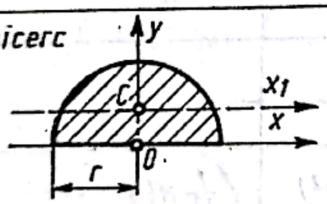
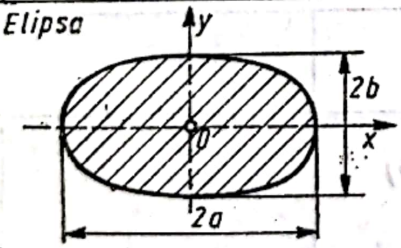
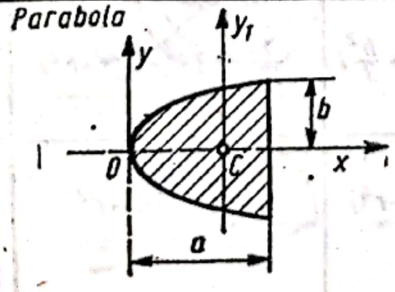
Scanned with OKEN Scanner

Momente de inerție

Figura	Axa	Momentul de inerție	
		geometric	mecanic
Linia dreaptă 	Δ_2	$\frac{l^3}{3}$	$M\frac{l^2}{3}$
	Δ_1	$\frac{l^3}{12}$	$M\frac{l^2}{12}$
	Δ	$\frac{l^3}{3}\sin^2\alpha$	$M\frac{l^2}{3}\sin^2\alpha$
	Δ_3	$\frac{l}{3}(3d^2+3dl+l^2)$	$M(d^2+dl+\frac{l^2}{3})$
Dreptunghi 	O_1x_1	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}Mh^2$
	O_1y_1	$\frac{1}{12}b^3h$	$\frac{1}{12}Mb^2$
	Ox	$\frac{1}{3}bh^3$	$\frac{1}{3}Mh^2$
	Oy	$\frac{1}{3}b^3h$	$\frac{1}{3}Mb^2$
Triunghi 	Ox	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{6}Mh^2$
	Cx_1	$\frac{1}{36}bh^3$	$\frac{1}{18}Mh^2$
	O_2x_2	$\frac{1}{4}bh^3$	$\frac{1}{2}Mh^2$
	Oy	$\frac{1}{12}(b_1^3+b_2^3)h$	$\frac{1}{6b}M(b_1^3+b_2^3)$
Patrulater neregulat 	Δ	$\frac{1}{12}b(h_1^3+h_2^3)$	$\frac{1}{6}M\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1+h_2}$
Paralelogram 	Δ	$\frac{1}{48}dd_1^3\sin^3\alpha$	$\frac{1}{24}Md_1^2\sin^2\alpha$

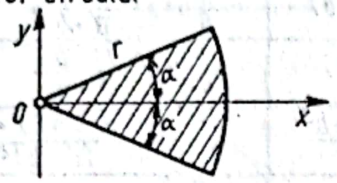
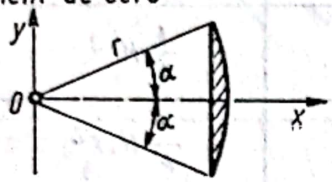
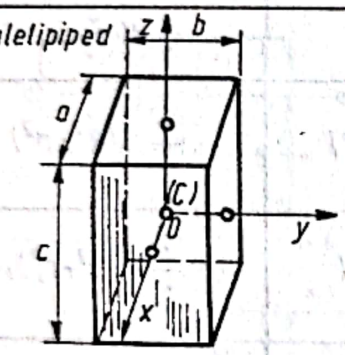
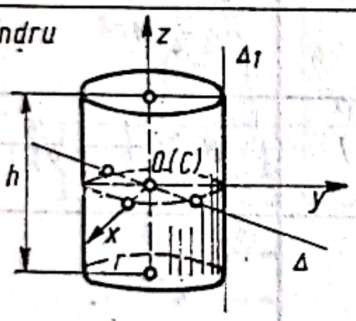
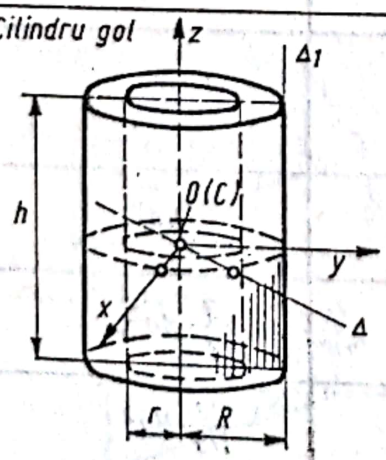
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.b (continuare)

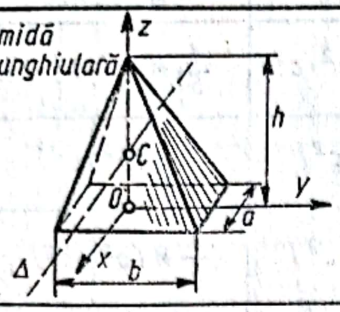
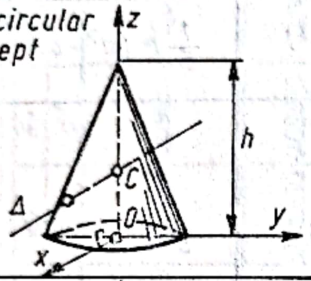
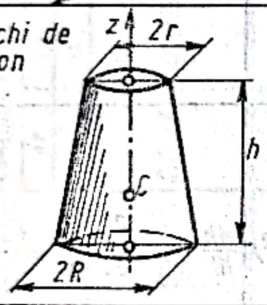
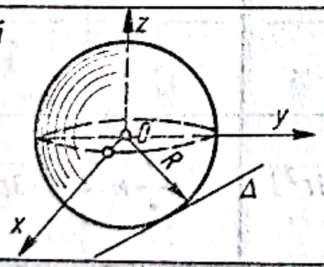
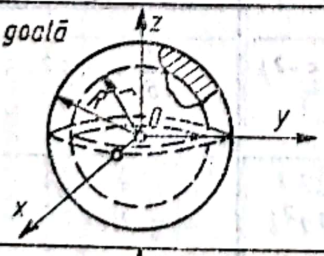
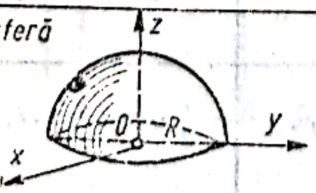
Figura	Axa	Momentul de inerție	
		geometric	mecanic
Trapez isoscel 	Ox	$\frac{1}{12}h^3(B+3b)$	$\frac{1}{6}Mh^2\frac{B+3b}{B+b}$
	O_2x_2	$\frac{1}{12}h^3(3B+b)$	$\frac{1}{6}Mh^2\frac{3B+b}{B+b}$
	Cx_1	$\frac{1}{36}h^3\frac{B^2+4Bb+b^2}{B+b}$	$\frac{1}{18}Mh^2\frac{B^2+4Bb+b^2}{(B+b)^2}$
	Oy	$\frac{1}{48}h\frac{B^4-b^4}{B-b}$	$\frac{1}{24}M(B^2+b^2)$
Cerc 	Polul O	$\frac{1}{2}\pi r^4$	$\frac{1}{2}Mr^2$
	Ox Oy	$\frac{1}{4}\pi r^4$	$\frac{1}{4}M,r^2$
	Δ	$\frac{5}{4}\pi r^4$	$\frac{5}{4}Mr^2$
Coroană circulară 	Polul O	$\frac{1}{2}\pi(R^4-r^4)$	$\frac{1}{2}M(R^2+r^2)$
	Ox Oy	$\frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)$	$\frac{1}{4}M(R^2+r^2)$
Semicerc 	Ox Oy	$\frac{1}{8}\pi r^4$	$\frac{1}{4}Mr^2$
	Cx_1	$\pi r^4\left(\frac{1}{8}-\frac{8}{9\pi^2}\right)$	$Mr^2\left(\frac{1}{4}-\frac{16}{9\pi^2}\right)$
Elipsa 	Ox	$\frac{1}{4}\pi ab^3$	$\frac{1}{4}Mb^2$
	Oy	$\frac{1}{4}\pi a^3b$	$\frac{1}{4}Ma^2$
Parabola 	Ox	$\frac{4}{15}ab^3$	$\frac{1}{5}Mb^2$
	Oy	$\frac{4}{7}a^3b$	$\frac{3}{7}Ma^2$
	Cy_1	$\frac{16}{175}a^3b$	$\frac{12}{175}Ma^2$

Scanned with OKEN Scanner

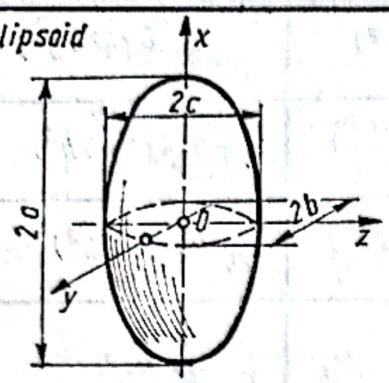
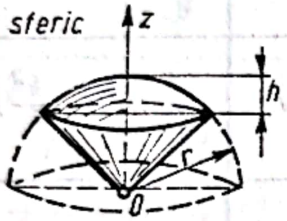
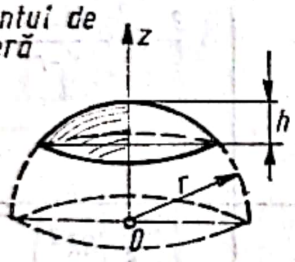
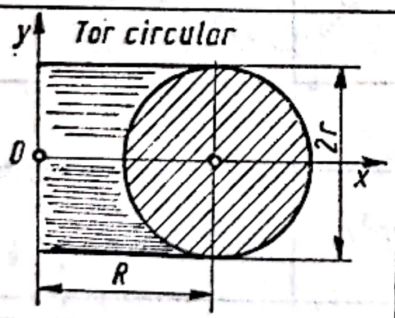
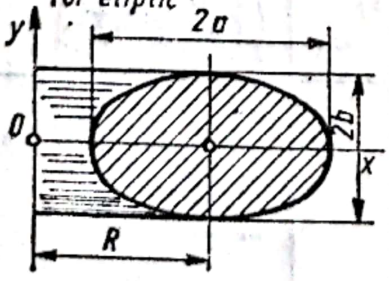
Tabelul 2.b (continuare)

Figura	Axa	Momentul de inerție	
		geometric	mecanic
Sector circular 	Ox	$\frac{1}{8} r^4 (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$\frac{1}{4} Mr^2 (1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha})$
	Oy	$\frac{1}{8} r^4 (2\alpha + \sin 2\alpha)$	$\frac{1}{4} Mr^2 (1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha})$
Segment de cerc 	Ox	$\frac{r^4}{8} (2\alpha - \frac{4}{3} \sin 2\alpha + \frac{1}{6} \sin 4\alpha$	$\frac{Mr^2}{4} (1 - \frac{1}{6} \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha})$
	Oy	$\frac{1}{8} r^4 (2\alpha - \frac{1}{2} \sin 4\alpha)$	$\frac{Mr^2}{4} (1 + \frac{1}{2} \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha})$
Paralelipiped 	Ox	$\frac{1}{12} abc (b^2 + c^2)$	$\frac{1}{12} M (b^2 + c^2)$
	Oy	$\frac{1}{12} abc (c^2 + a^2)$	$\frac{1}{12} M (c^2 + a^2)$
	Oz	$\frac{1}{12} abc (a^2 + b^2)$	$\frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$
Cilindru 	Oz	$\frac{1}{2} \pi r^4 h$	$\frac{1}{2} Mr^2$
	Ox Oy Δ	$\frac{1}{12} \pi r^2 h (3r^2 + h^2)$	$\frac{1}{12} M (3r^2 + h^2)$
	Δ_1	$\frac{3}{2} \pi r^4 h$	$\frac{3}{2} Mr^2$
Cilindru gol 	Oz	$\frac{1}{2} \pi h (R^4 - r^4)$	$\frac{1}{2} M (R^2 + r^2)$
	Ox Oy Δ	$\frac{\pi (R^2 - r^2) h}{4} (R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3})$	$\frac{1}{12} M (3R^2 + 3r^2 + h^2)$
	Δ_1	$\frac{3}{2} \pi h (3R^4 - 2R^2 r^2 - r^4)$	$\frac{1}{2} M (3R^2 + r^2)$

Scanned with OKEN Scanner

Figura	Axa	Momentul de inerție	
		geometric	mecanic
Piramidă dreptunghiulară 	Oz	$\frac{1}{60}abh(a^2+b^2)$	$\frac{1}{20}M(a^2+b^2)$
	Δ	$\frac{1}{60}abh(b^2+\frac{3h^2}{4})$	$\frac{1}{80}M(4b^2+3h^2)$
	Ox	$\frac{1}{60}abh(b^2+2h^2)$	$\frac{1}{20}M(b^2+2h^2)$
Con circular drept 	Oz	$\frac{1}{10}\pi r^4 h$	$\frac{3}{10}Mr^2$
	Δ	$\frac{1}{20}\pi r^2 h(r^2+\frac{h^2}{4})$	$\frac{3}{20}M(r^2+\frac{h^2}{4})$
Trunchi de con 	Cz	$\frac{1}{10}\pi h\frac{R^5-r^5}{R-r}$	$\frac{3}{10}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
Sferă 	Polul O	$\frac{4}{5}\pi R^5$	$\frac{3}{5}MR^2$
	Oz Ox Oy	$\frac{8}{15}\pi R^5$	$\frac{2}{5}MR^2$
	Tangenta Δ	$\frac{28}{15}\pi R^5$	$\frac{7}{5}MR^2$
Sferă goală 	Polul O	$\frac{4}{5}\pi(R^5-r^5)$	$\frac{3}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
	Ox Oy Oz	$\frac{8}{15}\pi(R^5-r^5)$	$\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
Semisferă 	Ox Oz Oy	$\frac{4}{15}\pi R^5$	$\frac{2}{5}MR^2$

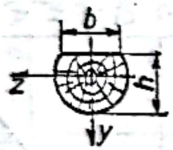
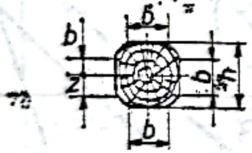
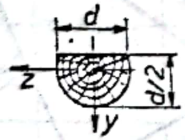
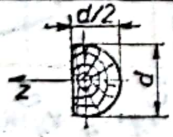
Scanned with OKEN Scanner

Figura	Axa	Momentul de inerție	
		geometric	mecanic
Elipsoid 	Polul 0	$\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$	$\frac{1}{5}M(a^2+b^2+c^2)$
	$0x$	$\frac{4}{15}\pi abc(b^2+c^2)$	$\frac{1}{5}M(b^2+c^2)$
	$0y$	$\frac{4}{15}\pi abc(a^2+c^2)$	$\frac{1}{5}M(a^2+c^2)$
	$0z$	$\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2)$	$\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$
Sector sferic 	$0z$	$\frac{2}{15}\pi r^2h^2(3r-h)$	$\frac{1}{5}Mh(3r-h)$
Segmentul de sferă 	$0z$	$\frac{1}{30}\pi h^3(20r^2-15rh+3h^2)$	$\frac{Mh}{10}\times\frac{20r^2-15rh+3h^2}{3r-h}$
Tor circular 	$0y$	$\frac{1}{2}\pi^2Rr^2(4R^2+3r^2)$	$\frac{1}{4}M(4R^2+3r^2)$
	$0x$	$\frac{1}{4}\pi 2Rr^2(4R^2+5r^2)$	$\frac{1}{8}M(4R^2+5r^2)$
Tor eliptic 	$0y$	$\frac{1}{2}\pi^2Rab(4R^2+3a^2)$	$\frac{1}{4}M(4R^2+3a^2)$
	$0x$	$\frac{1}{4}\pi^2Rab(4R^2+3a^2+2b^2)$	$\frac{1}{8}M(4R^2+3a^2+2b^2)$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.c

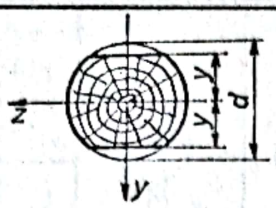
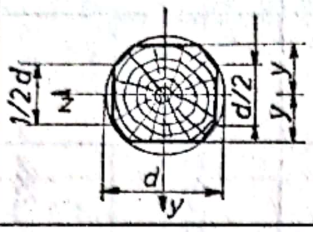
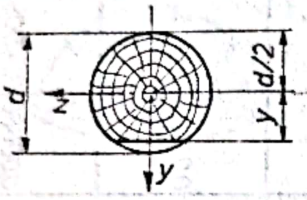
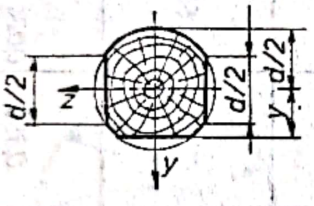
Coeficienții pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunilor transversale ale pieselor rotunde și semilecarisate

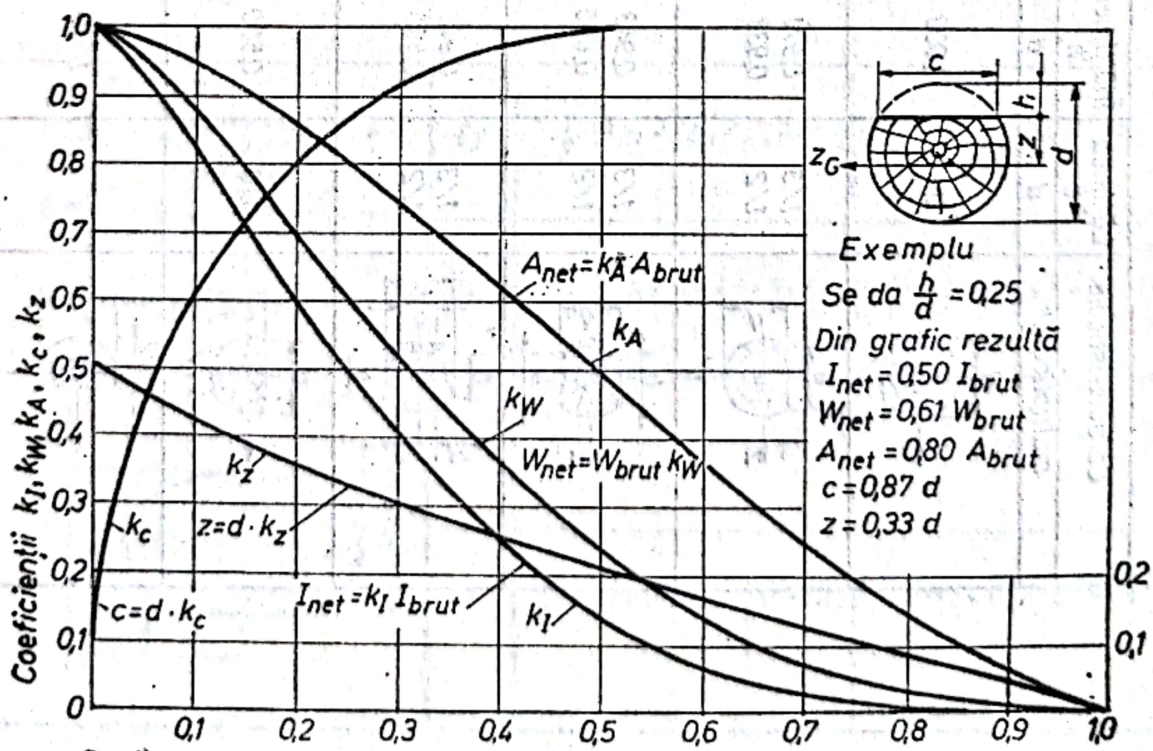
Caracteristicile	Lățimea b	Înălțimea h	Secțiunea A	Momentul de inerție		Modulul de rezistență		Momentul static	Raza de inerție	
				I_z	I_y	W_z	W_y	$S_{z1/2}$	i_z	i_y
multiplicator	d	d	d^2	d^4	d^4	d^3	d^3	d^3	d	d
	0,0	1,000	0,785	0,04909	0,04909	0,09817	0,09817	0,083	0,250	0,250
	1/3 1/2	0,971 0,933	0,779 0,763	0,04758 0,04415	0,04905 0,04880	0,09593 0,09077	0,09810 0,09760	0,080 0,073	0,247 0,245	0,251 0,252
	1/3 1/2	0,943 0,866	0,773 0,740	0,04611 0,03949	0,04901 0,04852	0,09781 0,09120	0,09802 0,09704	0,080 0,073	0,244 0,231	0,252 0,256
	1/3 1/2	0,943 0,866	0,760 0,695	0,04603 0,03892	0,04603 0,03892	0,09766 0,08990	0,09766 0,08990	0,080 0,071	0,246 0,236	0,246 0,236
	0,0	0,500	0,393	0,00686	0,02454	0,02384	0,04909	0,022	0,132	0,250
	0,0	1,000	0,393	0,02454	0,00686	0,04909	0,02384	0,041	0,250	0,132

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.d

Formulele aproximative pentru calculul caracteristicilor mecanice ale unor grinzi din lemn cioplit

Nr. crt.	Secțiunea	Suprafața secțiunii A	Momentul de inerție I_z	Modulul de rezistență W_z
1		$(2{,}5\frac{d}{y}-1{,}85)y^2$	$(\frac{d}{y}-1{,}2)\,y^4$	$(\frac{d}{y}-1{,}2)\,y^3$
2		$(2{,}25\frac{d}{y}-1{,}55)y^2$	$(\frac{d}{y}-1{,}2)\,y^4$	$(\frac{d}{y}-1{,}2)\,y^3$
3		$(3\frac{d}{y}-2{,}85)y^2$	$(1{,}5\frac{d}{y}-2{,}2)\,y^4$	$(\frac{d}{y}-1{,}2)\,y^3$
4		$(2{,}8\frac{d}{y}-2{,}65)y^2$	$(1{,}5\frac{d}{y}-2{,}2)\,y^4$	$(\frac{d}{y}-1{,}2)\,y^3$



Grafic pentru calculul mărimilor $A_{net}, W_{net}, I_{net}, c$ și z ale bușteniilor prelucrați pe o singură parte

$I_{brut}=\frac{\pi d^4}{64}$; $W_{brut}=\frac{\pi d^3}{32}$; $A_{brut}=\frac{\pi d^2}{4}$

Fig. 2.f

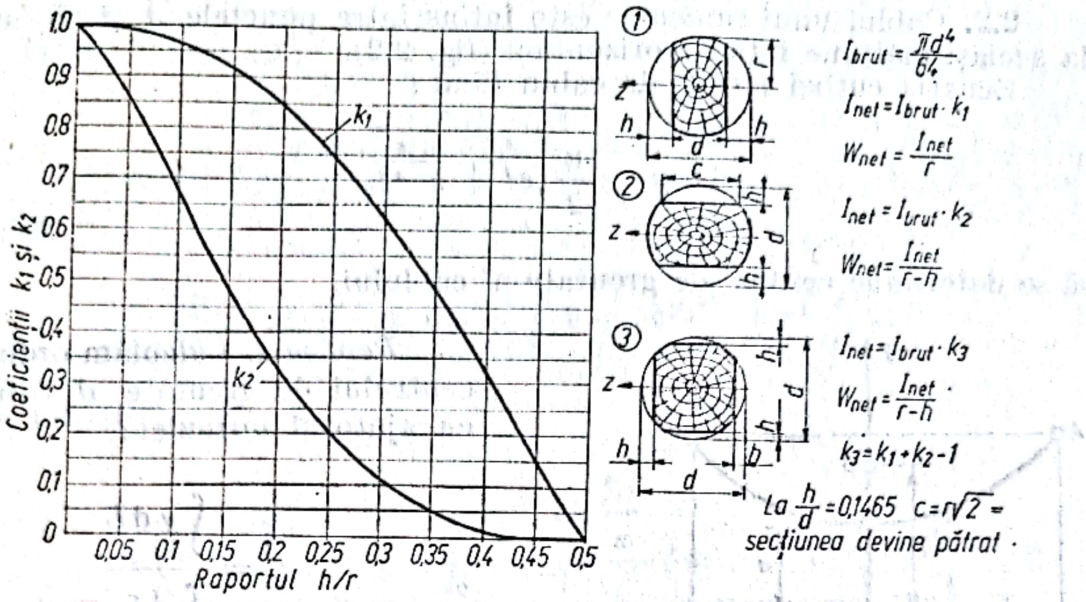


Fig. 2.g

II. APLICAȚII

2.1. Să se determine centrul de greutate al scheletului unei mese, ale cărei dimensiuni sînt date în figura 2.1.

Rezolvare. Neglijînd grosimea elementelor care compun masa, rezultă :

$$x_G = 0 ;$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}$$

Observînd că :

$$y_1 = \frac{a}{4} ; y_2 = y_3 = \frac{a}{2} ; y_4 = a ;$$

$$L_1 = a ; \; L_2 = L_3 = a ; \; L_4 = \frac{3a}{2},$$

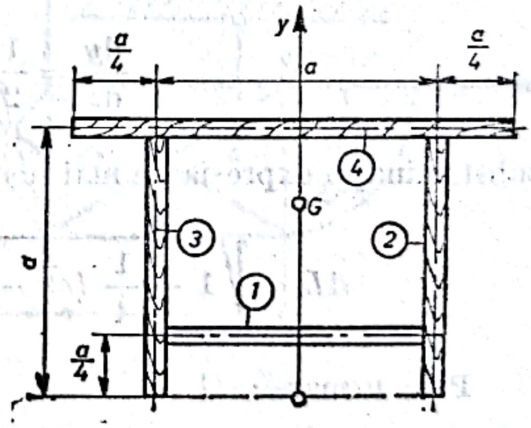


Fig. 2.1

se obține :

$$y_G = \frac{\frac{a}{4} \cdot a + \frac{a}{2} \cdot a + \frac{a}{2} \cdot a + a \cdot \frac{3a}{2}}{a + a + a + \frac{3a}{2}} = \frac{11}{18} a.$$

Prin urmare centrul de greutate al masei se află în punctul :

$$G\left(O, \frac{11}{18} a\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

2.2. Cablul unui funicular este întins între punctele A și B, aflate la aceiași înălțime față de orizontală (fig. 2.2).

Ecuația curbei făcută de cablu fiind :

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

să se determine centrul de greutate al cablului.

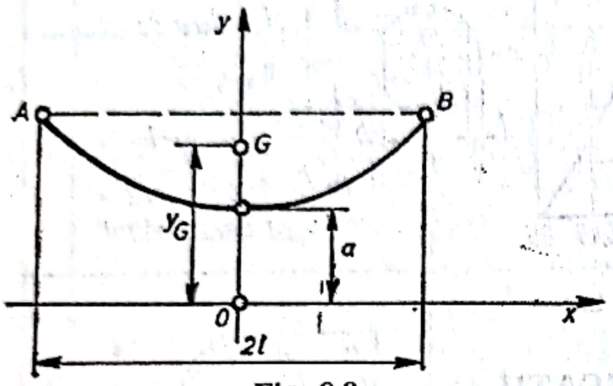


Fig. 2.2

Rezolvare. Calculăm ordonata centrului de greutate al cablului cu ajutorul formulei :

$$y_G = \frac{\int y\, dL}{\int dL}$$

în care :

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Calculind derivata lui y în raport cu x, se obține :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

substituind în expresia de mai sus a lui dL, rezultă :

$$dL = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx.$$

Prin urmare :

$$y_G = \frac{\frac{a}{4}\int_{-l}^{l}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx}{\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx} = \frac{l + \frac{a}{4}\left(e^{2\frac{l}{a}} - e^{2\frac{l}{a}}\right)}{e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}},$$

expresie care se mai poate scrie și sub forma :

$$y_G = \frac{l}{e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}} + \frac{e^{\frac{l}{a}} + e^{-\frac{l}{a}}}{e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția II.

Ținînd seama că:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,ch\,\frac{x}{a},$$

rezultă

$$\frac{dy}{dx} = sh\,\frac{x}{a} \text{ și } dL = \sqrt{1 + sh^2\frac{x}{a}} = ch\,\frac{x}{a}.$$

Prin urmare:

$$y_G = \frac{2\int_0^l a\,\mathrm{ch}\,\frac{2x}{a}\,dx}{2\int_0^l \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx} = \frac{a\int_0^l \frac{1+\mathrm{ch}\,\frac{2x}{a}}{2}\,dx}{a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\Big|_0^l} = \frac{l + \frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{2}{l}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{l}{a}}.$$

2.3. Vagonetul unui funicular are secțiunea din figura 2.3. Cunoscînd că $a = 300$ mm, $b = 400$ mm și $R = 500$ mm, să se determine locul de prindere a suportului, pentru ca vagonetul să stea în echilibru.

Rezolvare. Pentru ca vagonetul să stea în echilibru, trebuie ca axa de susținere să treacă prin centrul de greutate G al vagonetului.

Pentru determinarea centrului de greutate, alegem sistemul de referință ca în figură; descompunînd secțiunea în trei părți, se observă că:

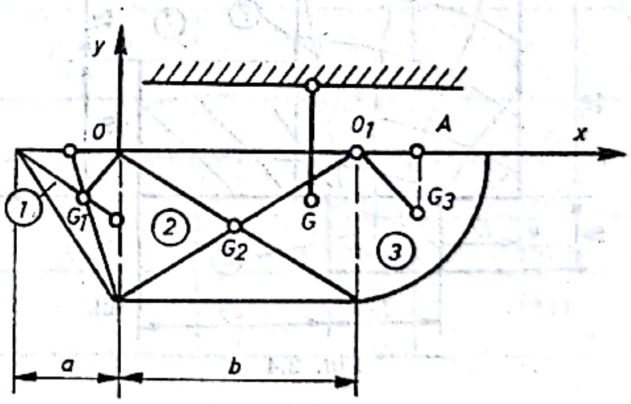


Fig. 2.3

$$x_1 = -\frac{a}{3};\ y_1 = -\frac{R}{3};\ A_1 = \frac{a \cdot R}{2};$$

$$x_2 = \frac{b}{2};\ y_2 = -\frac{R}{2};\ A_2 = b \cdot R;$$

$$x_3 = OA = OO_1 + O_1A = b + O_1G_3\cos 45° = b + \frac{2}{3}\,R\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = b + \frac{4R}{3\pi};$$

$$y_3 = -AG_3 = -O_1G_3\sin 45° = -\frac{4R}{3\pi};\ A_3 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele centrului de greutate ale secţiunii vagonetului sînt deci :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{-\frac{a^2R}{6} + \frac{b^2R}{2} + \frac{\pi R^2}{4}\left(b + \frac{4R}{3\pi}\right)}{\frac{aR}{2} + bR + \frac{\pi R^2}{4}} = 323 \text{ mm};$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = -\frac{\frac{aR^2}{6} + \frac{bR^2}{2} + \frac{R^3}{3}}{\frac{aR}{2} + bR + \frac{\pi R^2}{4}} = -221 \text{ mm}.$$

2.4. Să se afle coordonatele centrului de greutate al suprafeţei haşurate, reprezentînd o secţiune transversală printr-un profil de lemn (fig. 2.4).

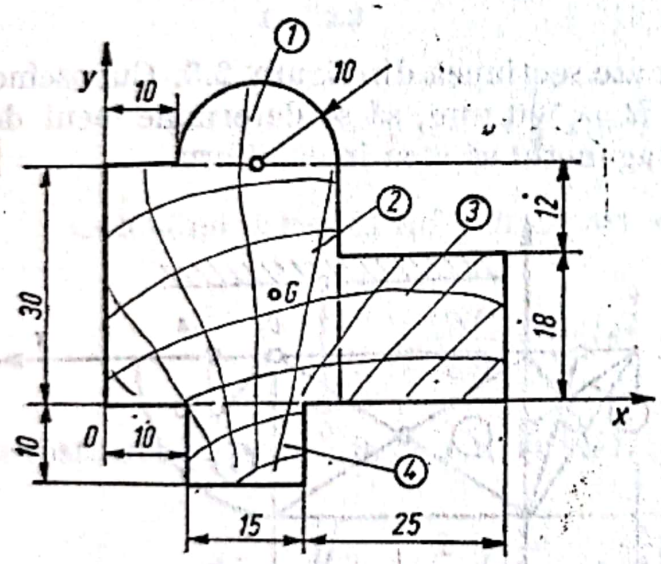


Fig. 2.4

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate al secţiunii transversale a profilului se determină cu relaţiile :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i}.$$

Se efectuează un calcul tabelar (tab. 2.4) (dimensiunile sînt date în mm, iar coordonatele sînt exprimate faţă de sistemul de referinţă xOy).

Tabelul 2.4

	x_i [mm]	y_i [mm]	A_i [mm²]	x_iA_i	y_iA_i
1	20,00	34,24	157	3 140	5 390
2	15,00	15,00	900	13 500	13 500
3	40,00	9,00	360	14 400	3240
4	17,5	— 5,00	150	2 622	—750
Σ			1567	33 662	21370

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă :

$$x_G = \frac{33\,662}{1567} = 21{,}5 \text{ mm}; \quad y_G = \frac{21\,370}{1567} = 13{,}62 \text{ mm}.$$

2.5. O pană metalică utilizată la fixarea prin strîngere hidraulică a unui cuţit pe arborele port-cuţit, are forma secţiunii haşurate din figura 2.5. Să se determine poziţia centrului de greutate al penei.

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate se determină cu ajutorul relaţiilor :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i}.$$

Se alege un sistem de referinţă $x_1O_1y_1$, faţă de care se exprimă coordonatele centrelor de greutate. Se va lucra tabelar (tab. 2.5) (dimensiunile sînt date în mm).

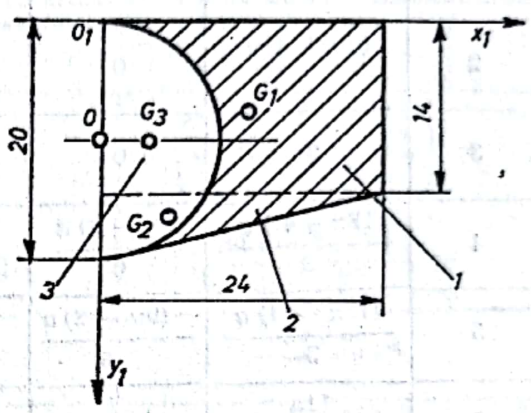


Fig. 2.5

Tabelul 2.5

Nr. crt.	x_i [mm]	y_i [mm]	A_i [mm²]	x_iA_i	y_iA_i
1	12	7	336	4032	2352
2	8	16	72	576	1152
3	4,24	10	−157	− 666	−1570
Σ			251	3942	1934

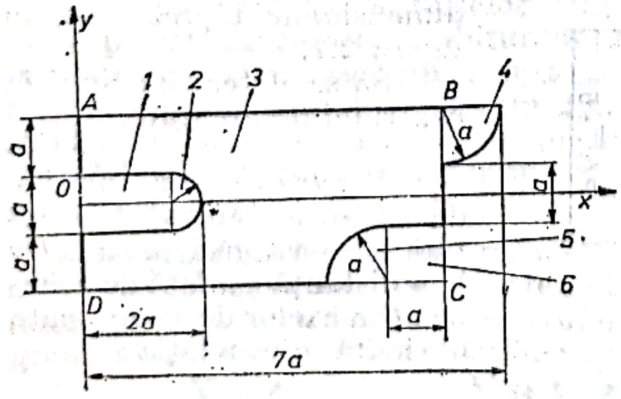


Fig. 2.6

Rezultă, prin urmare

$$x_G = \frac{3942}{251} = 15{,}70 \text{ mm};$$

$$y_G = \frac{1934}{251} = 7{,}40 \text{ mm}$$

2.6. Un cuţit pentru frezarea profilelor elementelor din lemn este reprezentat în figura 2.6. Cunoscînd dimensiunile cuţitului considerat un corp omogen, să se determine poziţia centrului de greutate.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Sistemul de referinţă xOy se alege situat în planul de simetrie al cuţitului. Calculul coordonatelor centrului de greutate este arătat în tabelul 2.6.

Tabelul 2.6

Numărul elementului	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
1	$\frac{2a}{4}$	0	$-\frac{3a^2}{2}$	$-\frac{9a^3}{8}$	0
2	$\frac{(9\pi+4)\,a}{6}$	0	$-\frac{\pi a^2}{8}$	$-\frac{(9\pi+4)\,a^3}{48}$	0
3	$2a$	0	$18a^2$	$54\,a^3$	0
4	$\frac{(18\pi+4)\,a}{3}$	$\frac{(9\pi-8)\,a}{6}$	$\frac{\pi a^2}{4}$	$\frac{(18\pi+4)a^3}{12}$	$\frac{(9\pi-8)\,a^3}{24}$
5	$\frac{(15\pi-4)\,a}{3}$	$-\frac{(9\pi-8)\,a}{6}$	$-\frac{\pi a^2}{4}$	$-\frac{(15\pi-4)\,a^3}{12}$	$\frac{(9\pi-8)\,a^3}{24}$
6	$\frac{11a}{2}$	$-a$	$-a^2$	$-\frac{11a^3}{2}$	a^3
Σ			$\frac{(124-\pi)\,a^2}{8}$	$\frac{(3\pi+2302)\,a^3}{48}$	$\frac{(9\pi+4)\,a^3}{12}$

Rezultă coordonatele centrului de greutate

$$x_C=\frac{\sum x_iA_i}{\sum A_i}=\frac{(3\pi+2302)\,a^3\cdot 8}{48(124-\pi)\,a^2}=\frac{(3\pi+2302)\,a}{6(124-\pi)}=3{,}317\ a,$$

$$y_C=\frac{\sum y_iA_i}{\sum A_i}=\frac{(9\pi+4)\,a^3\cdot 8}{12(124-\pi)\,a^2}=\frac{2(9\pi+4)a}{3(124-\pi)}=0{,}177\ a.$$

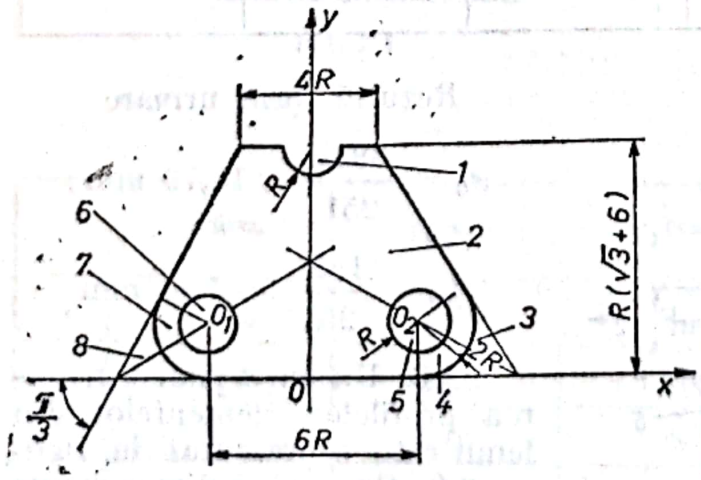


Fig. 2.7

2.7. Suportul lateral al unui cărucior de sprijin pentru gaterul vertical are forma şi dimensiunile reprezentate în figura 2.7.

Să se determine poziţia centrului de greutate.

Rezolvare. Din motive de simetrie, centrul de greutate G se va găsi pe axa Oy la o distanţă y_G, faţă de originea O a axelor de coordonate obţinută din relaţia:

$$y_G=\frac{\sum y_iA_i}{\sum A_i}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Datele necesare calculului sînt cuprinse în tabelul 2.7.
Rezultă :

$$y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\left(\frac{347}{3} + 4\sqrt{3} + \frac{7\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) R^3}{\left(36 + 9\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) R^2} = 2{,}44\ R.$$

Tabelul 2.7

Numărul elementului	y_i	A_i	$y_i A_i$
1	$(\sqrt{3}+6)R - \frac{4R}{3\pi}$	$-\frac{\pi R^2}{2}$	$\left(\frac{2}{3}3 - \pi - \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right) R^3$
2	$\frac{48+19\sqrt{3}}{15+6\sqrt{3}} R$	$(36+17\sqrt{3})\ R^2$	$\frac{2697+1500\sqrt{3}}{15+6\sqrt{3}} R^3$
3	$\frac{7R}{6}$	$-4\sqrt{3}\ R^2$	$-\frac{14\sqrt{3}}{3} R^3$
4	$\frac{2\pi-\sqrt{3}}{\pi} R$	$\frac{4\pi R^2}{3}$	$\frac{8\pi-4\sqrt{3}}{3} R^3$
5	$2R$	$-\pi R^2$	$-2\pi R^3$
6	$2R$	$-\pi R^2$	$-2\pi R^3$
7	$\frac{(2\pi-\sqrt{3})}{\pi} R$	$\frac{4\pi R^2}{3}$	$\frac{8\pi-4\sqrt{3}}{3} R^3$
8	$\frac{7R}{6}$	$-4\sqrt{3}\ R^2$	$-\frac{14\sqrt{3}}{3} R^3$
Σ		$\left(36+9\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right) R^2$	$\left(\frac{347}{3}+4\sqrt{3}+\frac{7\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) R^3$

2.8. Zalele-cuţit ale frezelor lanţ folosite pentru executarea scobiturilor lungi în materiale lemnoase, au forma şi dimensiunile reprezentate în figura 2.8. Să se găsească poziţia centrului de greutate al zalei-cuţit figurate, considerînd că este un corp omogen.

Rezolvare. Zala este de grosime constantă şi ca urmare se alege sistemul de referinţă xOy. Coordonatele centrului de greutate se determină cu relaţiile :

$$x_G = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \text{ şi } y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i},$$

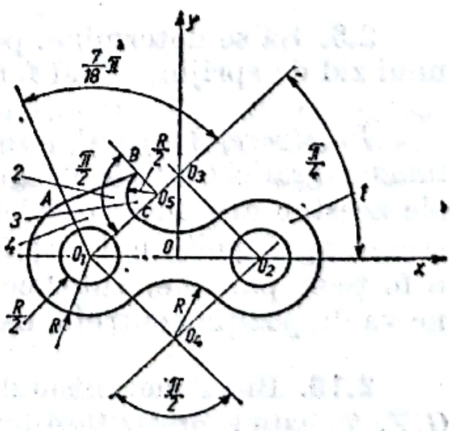


Fig. 2.8

în care x_i, y_i și A_i reprezintă coordonatele centrelor de greutate și ariile elementelor componente.

Ca suprafețele ale elementelor componente se consideră: suprafața *1* simetrică față axele Ox și Oy, suprafața trapezului dreptunghic *2* și suprafețele sectoarelor de cerc *3* și *4*. Coordonatele centrelor de greutate și ariile elementelor sînt cuprinse în tabelul 2.8.

Tabelul 2.8

Elementul	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
1	0	0	$\left(\frac{\pi}{8}+4\right)R^2$	0	0
2	$-1{,}21\,R$	$1{,}06\,R$	$1{,}02R^2$	$-1{,}23\,R^3$	$1{,}08\,R^3$
3	$-\frac{\sqrt{2}}{12\pi}(8+3\pi)R$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}R$	$-\frac{\pi R^2}{16}$	$\frac{(8+3\pi)\sqrt{2}}{192}R^3$	$-\frac{3\pi\sqrt{2}}{64}R^3$
4	$\left(\frac{0{,}343}{\pi}-\sqrt{2}\right)R$	$1{,}94\,\frac{R}{\pi}$	$-\frac{\pi R^2}{4}$	$-\frac{0{,}343-\sqrt{2}\pi}{4}R^3$	$0{,}485\,R^3$
Σ			$4{,}43\,R^2$	$-0{,}0778\,R^3$	$0{,}387\,R^3$

Rezultă:

$$x_G=\frac{\sum x_iA_i}{\sum A_i}=-\frac{0{,}0778\,R^3}{4{,}43\,R^2}=-0{,}0176\,R$$

și

$$y_G=\frac{\sum y_iA_i}{\sum A_i}=\frac{0{,}387\,R^3}{4{,}43\,R^2}=0{,}0875\,R.$$

2.9. Să se determine, pe cale grafică, centrul de greutate al secțiunii unui zid de sprijin, avînd forma și dimensiunile din figura 2.9.

Rezolvare. Împărțim secțiunea zidului în cinci arii, cărora le determinăm grafic centrele de greutate. Punem, apoi, în centrele de greutate ale acestor arii forțe paralele, egale în valoare cu mărimile ariilor. Construim, apoi, poligonul forțelor și poligonul funicular, pentru două poziții a forțelor paralele. Intersecția rezultantelor sistemului de forțe paralele ne va da poziția centrului de greutate G a secțiunii zidului.

2.10. Biela mecanismului de tăiere la un gater românesc de tipul *G.V. 71* este reprezentată în figura 2.10. Să se determine poziția centrului de greutate al bielei.

Scanned with OKEN Scanner

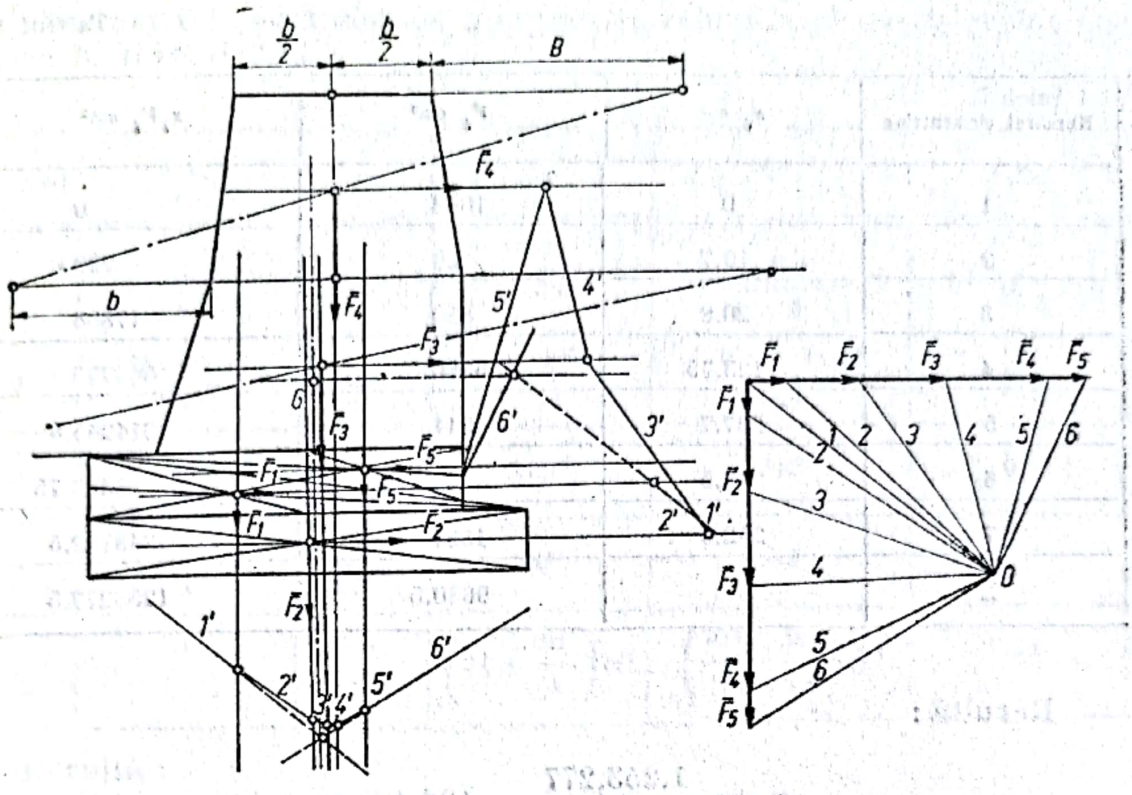


Fig. 2.9

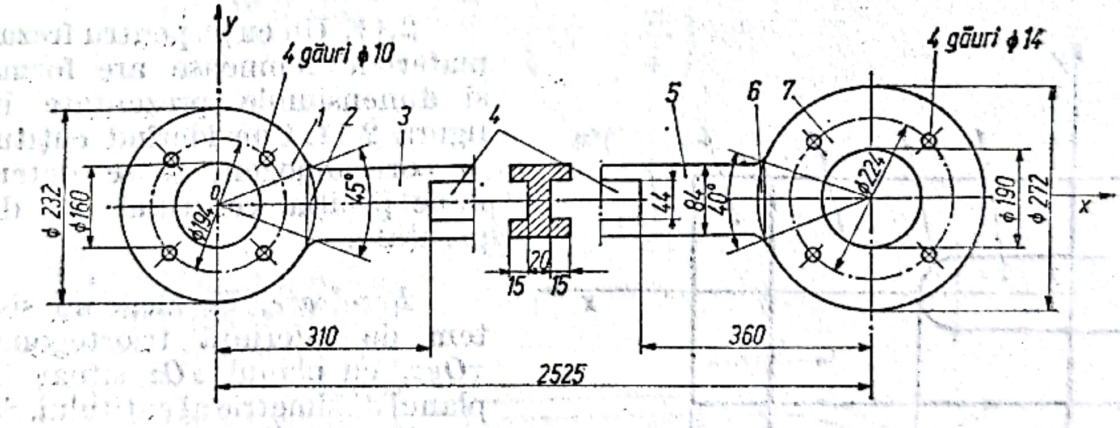


Fig. 2.10

Rezolvare. Pentru rezolvare, biela se consideră un corp omogen, şi se alege în planul de simetrie al ei sistemul de referinţă xOy. Se observă că axa Ox este axă de simetrie, deci coordonatele centrului de greutate al bielei se vor determina cu formulele :

$$x_G = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}, \quad y_G = 0, \quad z_G = 0.$$

Calculul sumelor de la numărătorul şi numitorul formulei care dă coordonatele centrului de greutate este arătat în tabelul 2.10.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.10

Numărul elementelor	x_i cm	V_i cm³	$x_i V_i$ cm⁴
1	0	1064	0
2	10,7	28	299,6
3	20,8	860	17888
4	123,75	5380	665775
5	227,7	941	214265,5
6	239,5	26,5	6346,75
7	252,5	1381	348702,5
Σ		9680,5	1253277,5

Rezultă:

$$x_G = \frac{1.253,277}{9680,5} = 129,46 \text{ cm.}$$

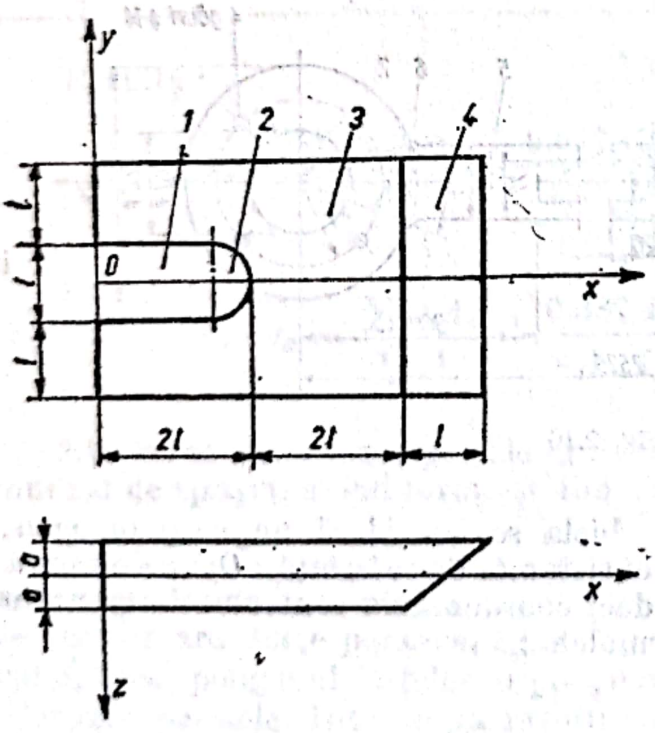


Fig. 2.11

2.11. Un cuţit pentru frezat materiale lemnoase are forma şi dimensiunile prezentate în figura 2.11. Considerînd cuţitul de corp omogen, să se determine poziţia centrului său de greutate.

Rezolvare. Se alege un sistem de referinţă triortogonal *xOyz*, cu planul *xOz* situat în planul de simetrie al cuţitului. Se consideră cuţitul constituit din următoarele volume: paralelipipedele *1* şi *3*, semicilindrul *2* şi prisma triunghiulară *4*.

Coordonatele centrului de greutate pentru cuţit se determină luînd în considerare coordonatele centrelor de greutate şi volumele elementelor componente cu relaţiile:

$$x_G = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}; \; y_G = 0 \text{ şi } z_G = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele centrelor de greutate și volumele elementelor sînt cuprinse în tabelul 2.11.

Tabelul 2.11

Elementul	x_i	z_i	V_i	x_iV_i	z_iV_i
1	$\frac{3}{4}l$	0	$-3al^2$	$-\frac{9al^3}{4}$	0
2	$\frac{(9\pi+4)l}{6\pi}$	0	$-\frac{\pi al^2}{4}$	$-\frac{(9\pi+4)al^3}{24}$	0
3	$2l$	0	$24al^2$	$48al^3$	0
4	$\frac{13l}{3}$	$\frac{a}{3}$	$3al^2$	$13al^3$	a^2l^2
Σ			$\left(24-\frac{\pi}{4}\right)al^2$	$\left(\frac{703}{12}-\frac{9\pi}{24}\right)al^3$	a^2l^2

Rezultă :

$$x_G=\frac{\sum x_iV_i}{\sum V_i}=\frac{\left(\frac{703}{12}-\frac{\pi}{24}\right)al^3}{\left(24-\frac{\pi}{4}\right)al^2}=2{,}47l,$$

și

$$z_G=\frac{\sum z_iV_i}{\sum V_i}=\frac{a^2l^2}{\left(24-\frac{\pi}{4}\right)al^2}=0{,}0429\ a.$$

2.12. Volantul mecanismului de tăiere al unui gater de tipul *G.V.* 71, este reprezentat în figura 2.12. Considerînd volantul un corp omogen, să se determine poziția centrului său de greutate.

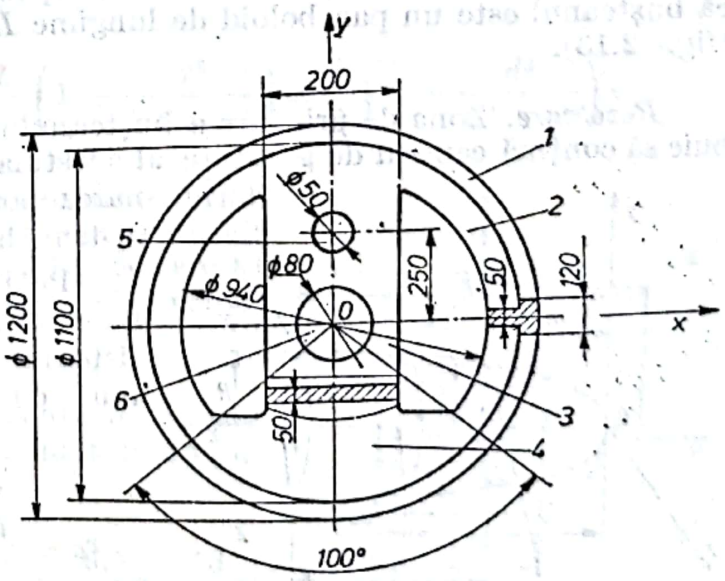


Fig. 2.12

Rezolvare. Sistemul de referință xOy se alege în planul de simetrie al volantului. Elementele geometrice componente ale volantului sînt notate pe figură prin cifre de la 1 la 6. Se observă că figura este simetrică în raport

Scanned with OKEN Scanner

cu axa Oy și ca urmare coordonatele centrului de greutate al volantului se determină cu relațiile :

$$x_G = 0\,;\; y_G = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i} \text{ și } z_G = 0.$$

Volumele și coordonatele centrelor de greutate ale elementelor componente sînt cuprinse în tabelul 2.12.

Tabelul 2.12

Numărul elementului	y_i cm	V_i cm³	$y_i V_i$ cm⁴
1	0	21600	0
2	0	12825	0
3	8,4	7720	64848
4	−37,1	4180	−155078
5	25	− 98	− 2450
6	0	− 251,2	0
Σ		45975,8	−92680

Rezultă

$$y_G = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i} = -2{,}015 \text{ cm}.$$

2.13. Să se determine locul de prindere al unui buștean în graifăr, la operațiile de încărcare și descărcare în depozitul de bușteni. Se consideră că bușteanul este un paraboloid de lungime L și baze de diametre D și d (fig. 2.13).

Rezolvare. Zona de prindere a bușteanului între brațele graifărului trebuie să conțină centrul de greutate al acestuia. Se impune, deci, determinarea poziției centrului de greutate al trunchiului de paraboloid.

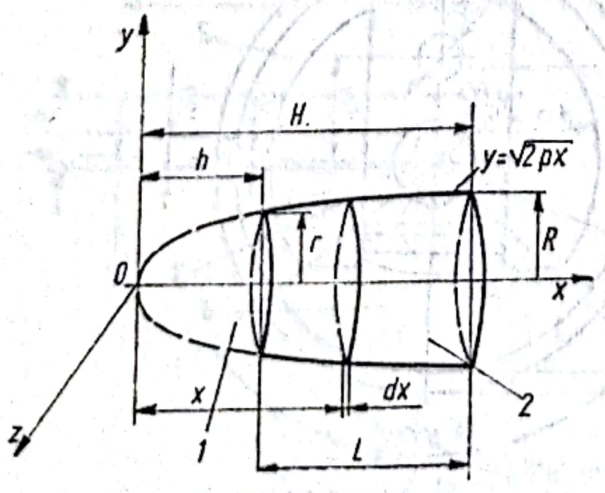


Fig. 2.13

Poziția centrului de greutate al trunchiului de paraboloid, față de sistemul de referință $xOyz$ se determină cu ajutorul relațiilor :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i V_i}{\sum_{i=1}^{2} V_i}\,;\quad y_G = 0\,;\quad z_G = 0.$$

Observînd că :

$$x_1 = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{r^2L}{R^2-r^2};\quad V_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\cdot\frac{r^4L}{R^2-r^2};$$

$$x_1V_1 = -\frac{\pi r^6L^2}{3(R^2-r^2)^2};$$

$$x_2 = \frac{2}{3}H = \frac{2}{3}\cdot\frac{R^2L}{R^2-r^2};\quad V_2 = \frac{1}{2}\cdot R^2H = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^4L}{R^2-r^2};$$

$$x_2V_2 = \frac{\pi R^6L^2}{3(R^2-r^2)^2},$$

rezultă :

$$x_G = \frac{2\pi L^2(R^6-r^6)\cdot(R^2-r^2)}{3\pi L(R^2-r^2)^2(R^4-r^4)} = \frac{2}{R}L\frac{R^6-r^6}{(R^2-r^2)(R^4-r^4)} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot L\frac{(R^2-r^2)(R^4+r^2R^2+r^4)}{(R^2-r^2)(R^4-r^4)} = \frac{2}{3}L\frac{R^4+r^2R^2+r^4}{R^4-r^4}.$$

Notînd cu l distanţa de la baza mare la centrul de greutate, rezultă :

$$l = H - x_G = \frac{R^2}{R^2-r^2}L - \frac{2}{3}L\frac{R^4-r^2R^2+r^4}{R^4-r^4} =$$

$$= \frac{L}{3(R^2-r^2)(R_2^2+r^2)}[3R^2(R^2+r^2) - 2(R^4+r^2R^2+r^4)] =$$

$$= \frac{L}{3}\cdot\frac{R^2+2r^2}{R^2+r^2} = \frac{L}{3}\left(1+\frac{r^2}{R^2+r^2}\right) = \frac{L}{3}\left(1+\frac{d^2}{D^2+d^2}\right).$$

2.14. Dintr-un calup de lemn de formă cubică cu latura $2a$, a fost eliminat un alt cub de latură a ca în figura 2.14. Se cere să se determine centrul de greutate al corpului rămas.

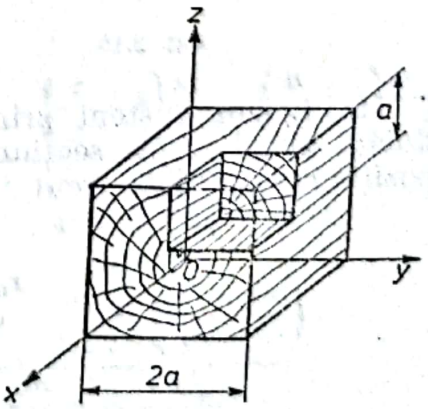


Fig. 2.14

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate al corpului rămas după înlăturarea cubului de latură a sînt :

$$x_G = \frac{\sum x_iV_i}{\sum V_i} = \frac{a\cdot 8a^3 - 1{,}5\ a\cdot a^3}{8a^3-a^3} = \frac{6{,}5}{7}a = \frac{13}{14}a;$$

$$y_G = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i} = \frac{a \cdot 8a^3 - 1{,}5a \cdot a^3}{8a^3 - a^3} = \frac{13}{14}\, a;$$

$$z_G = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i} = \frac{a \cdot 8a^3 - 1{,}5\, a \cdot a^3}{8a^3 - a^3} = \frac{13}{14}\, a.$$

2.15. Într-un vas se colectează apă. Vasul este cubic de latură a și are în capac un mic orificiu prin care se introduce apa. Vasul gol are greutatea G, iar apa, cînd vasul este plin, are greutatea tot G. Să se determine poziția cea mai joasă a centrului de greutate al vasului cu apă și nivelul apei în acea poziție.

Rezolvare. Cînd vasul este gol, are centrul de greutate la distanța $a/2$ de la bază. Cînd vasul este plin cu apă are centrul de greutate tot la distanța $a/2$ de bază. Cînd vasul are apă la înălțimea z de la bază centrul de greutate coboară. Greutatea specifică a apei este $\gamma = G/\pi a^3$ iar greutatea apei pînă la înălțimea z este $G_1 = Gz/a$.

Scriind suma momentelor statice ale greutăților față de planul xOy (fig. 2.15) rezultă:

$$\frac{Ga}{2} + G\,\frac{z}{a} \cdot \frac{z}{2} = G\left(1 + \frac{z}{a}\right) z_G,$$

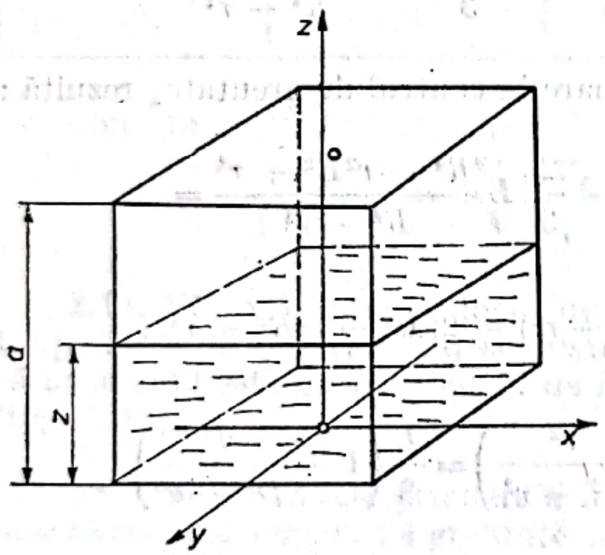


Fig. 2.15

de unde se obține:

$$z_G = \frac{a^2 + z^2}{2(a + z)}.$$

Valoarea z_G are minim pentru $dz_G/dz = 0$, respectiv:

$$\frac{dz_G}{dz} = \frac{4z(a + z) - 2(a^2 + z^2)}{4(a + z)^2} = 0,$$

de unde se obține $z = a(\sqrt{2} - 1)$ și $z_{G\min} = a(\sqrt{2} - 1)$, adică centrul de greutate în poziția cea mai de jos este chiar pe suprafața apei.

2.16. Din bușteni prin debitare și prelucrare ulterioară se obțin dulapi avînd forma secțiunii $OABC$ (fig. 2.16). Se cere să se calculeze poziția centrului de greutate a secțiunii unor astfel de dulapi.

$$x_G = \frac{11\, R}{2(2\pi + 3\sqrt{3})};$$

$$y_G = \frac{-8 + 3\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}\, R.$$

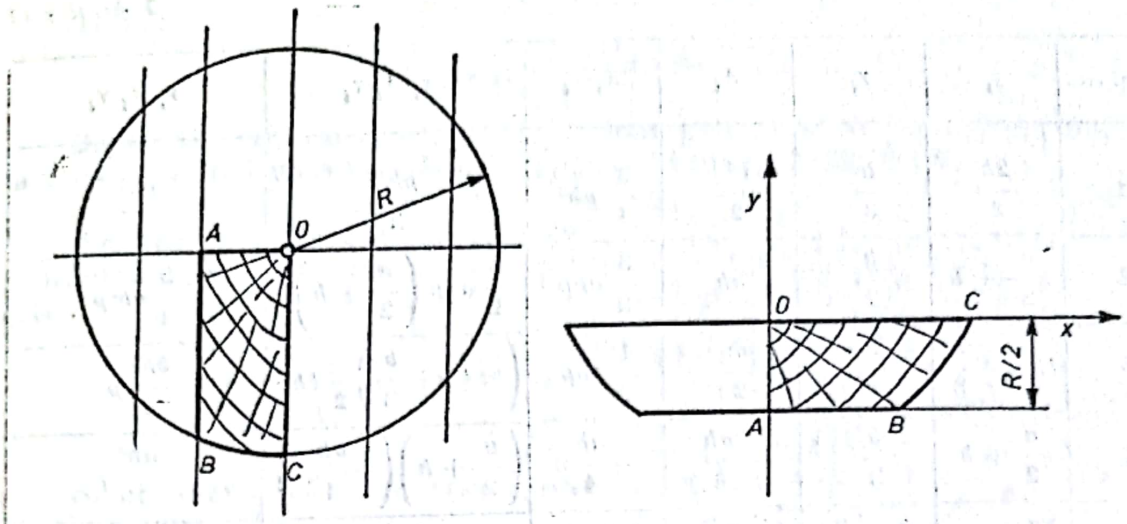


Fig. 2.16

2.17. Să se determine centrul de greutate al profilului de baraj din figura 2.17.

Rezolvare. Determinăm coordonatele centrului de greutate al profilului cu ajutorul formulelor :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i A_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i \gamma_i};$$

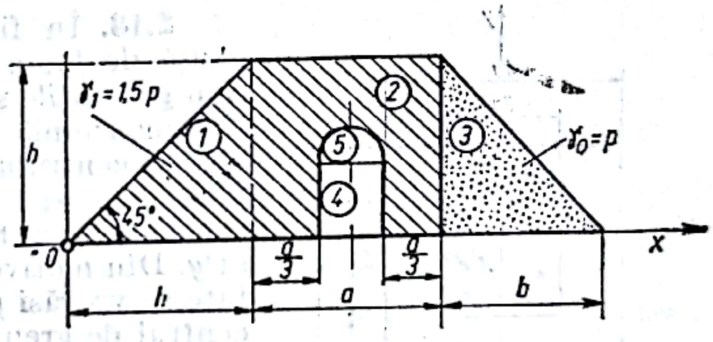


Fig. 2.17

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i A_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i \gamma_i}.$$

Calculul este centralizat în tabelul 2.17.
Rezultă :

$$x_G = \frac{\frac{ph^2}{2} + \frac{3}{2}ahp\left(\frac{a}{2}+h\right) + \left(a+h+\frac{b}{3}\right)\frac{1}{2}bhp - \left(\frac{a}{2}+h\right)\frac{ah}{4}p - \left(\frac{a}{2}+h\right)\frac{\pi a^2 p}{48}}{\frac{3}{4}ph^2 + \frac{3}{2}ahp + \frac{1}{2}bhp - \frac{ah}{4}p - \frac{\pi a^2 p}{24}}$$

$$y_G = \frac{\frac{ph^2}{4} + \frac{3}{4}ah^2 p + \frac{ph^2}{6}p - \frac{ah^2}{8}p - \frac{\pi a^2 p}{24}\left(\frac{h}{2} - \frac{2a}{9\pi}\right)}{\frac{3}{4}ph^2 + ahp + \frac{1}{2}bhp - \frac{ah}{4}p - \frac{\pi a^2 p}{48}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.17

Nr. crt.	x_i	y_i	A_i	$A_i \cdot \gamma_i$	$x_i \cdot A_i \cdot \gamma_i$	$y_i \cdot A_i \cdot \gamma_i$
1	$\frac{2h}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h^2}{2}$	$\frac{3}{4}ph^2$	$\frac{ph^2}{2}$	$\frac{ph^2}{4}$
2	$\frac{a}{2}+h$	$\frac{h}{2}$	ah	$\frac{3}{2}ahp$	$\frac{3}{2}ahp\left(\frac{a}{2}+h\right)$	$\frac{3}{4}ah^2p$
3	$h+a+\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{1}{2}bhp$	$\left(a+h+\frac{b}{3}\right)\frac{1}{2}bhp$	$\frac{bh^2}{6}p$
4	$\frac{a}{2}+h$	$\frac{h}{2}$	$-\frac{ah}{6}$	$-\frac{ah}{4}p$	$\left(\frac{a}{2}+h\right)\left(-\frac{ah}{4}p\right)$	$-\frac{ah^2}{16}p$
5	$\frac{a}{2}+h$	$\frac{h}{2}+\frac{2a}{9\pi}$	$-\frac{\pi a^2}{72}$	$-\frac{\pi a^2}{48}p$	$\left(\frac{a}{2}+h\right)\left(-\frac{\pi a^2}{48}p\right)$	$\left(\frac{h}{2}+\frac{2a}{9\pi}\right)\left(-\frac{\pi a^2}{48}p\right)$

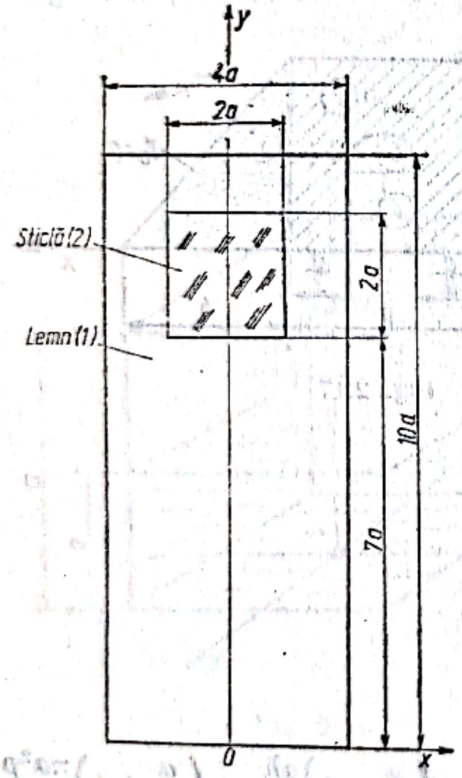


Fig. 2.18

2.18. În figura 2.18 este reprezentată o ușă de lemn cu geam de sticlă. Considerînd greutățile specifice γ_1 (lemn), γ_2 (sticlă) și dimensiunile cunoscute, să se determine poziția centrului de greutate.

Rezolvare. Se alege sistemul de referință xOy. Din motive de simetrie centrul de greutate se va găsi pe axa Oy și distanța y_G de la centrul de greutate la originea O a sistemului de referință se determină cu relația :

$$y_G = \frac{\sum y_i \gamma_i A_i}{\sum \gamma_i A_i} = \frac{y_1\gamma_1 A_1 - y_2\gamma_1 A_2 + y_2\gamma_2 A_2}{\gamma_1 A_1 - \gamma_1 A_2 + \gamma_2 A_2}$$

Mărimile geometrice din relația de calcul au valorile :

$$y_1 = 5a,\ A_1 = 40a^2,\ y_2 = 8a \text{ și } A_2 = 4a^2.$$

Rezultă :

$$y_G = \frac{200a^3\gamma_1 - 32a^3\gamma_1 + 32a^3\gamma_2}{40a^2\gamma_1 - 4a^2\gamma_1 + 4a^2\gamma_2} = \frac{168\,\gamma_1 + 32\gamma_2}{36\gamma_1 + 4\gamma_2}\,a.$$

Aplicație numerică pentru : $\gamma_1 = 0{,}8$ kg/dm^3 ; $\sigma_2 = 2{,}5$ kg/dm^3 și

$$a = 20 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci :

$$y_G = 110{,}4 \text{ cm}.$$

2.19. Să se realizeze dintr-un buștean grinda de secțiune dreptunghiulară care să aibă momentul de inerție axial maxim (fig. 2.19).

Rezolvare. Momentul de inerție geometric axial al dreptunghiului este

$$I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

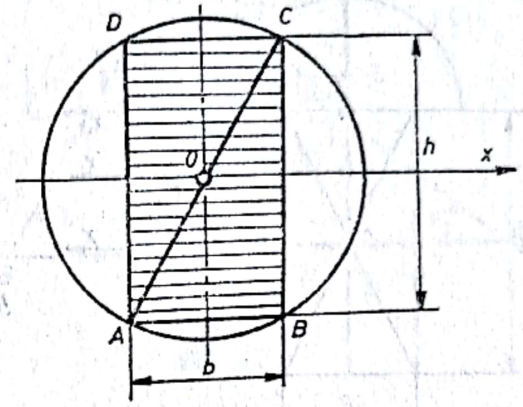


Fig. 2.19

Se observă că din triunghiul AEC, rezultă :

$$b = \sqrt{4R^2 - h^2};$$

prin urmare

$$I_x = \frac{h^3\sqrt{4R^2 - h^2}}{12}.$$

Pentru a determina valoarea maximă a momentului de inerție, se derivează expresia momentului de inerție în raport cu h și se anulează, apoi, derivata ; rezultă :

$$\frac{dI_x}{dh} = \frac{3h^2}{12}\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{h^3}{12}\cdot\frac{h}{\sqrt{4R^2 - h^2}} = 0.$$

Efectuînd calculele, rezultă ecuația :

$$12R^2 - 3h^2 - h^2 = 0,$$

sau

$$h^2 = 3R^2,$$

de unde

$$h = R\sqrt{3} \text{ și } b = R.$$

Secțiunea dreptunghiulară cu momentul de inerție axial maxim are dimensiunile :

$$b = R \text{ și } h = R\sqrt{3}.$$

2.20. Să se calculeze momentele de inerție I_x și I_y pentru secțiunea longitudinală a unui nit, față de sistemul de referință ce trece prin centrul de greutate al secțiunii (fig. 2.20).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se determină mai întîi centrul de greutate al secţiunii :

$$y_0 = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

ţinînd seama că :

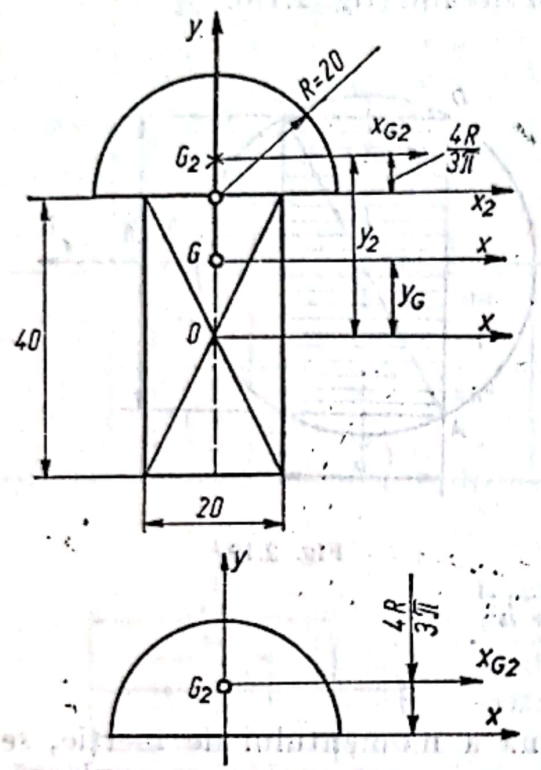


Fig. 2.20

$$y_1 = 0\,;\; y_2 = 20 + \frac{4 \cdot 20}{3 \cdot \pi} = 28{,}5 \text{ mm}\,;$$

$$A_1 = 800 \text{ mm}^2\,;\; A_2 = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 628 \text{ mm}^2,$$

se obţine :

$$y_0 = \frac{0 \cdot 800 + 28{,}5 \cdot 5{,}628}{800 + 628} = 12{,}6 \text{ mm}.$$

Momentele de inerţie axiale geometrice ale secţiunii logitudinale ale nitului sînt respectiv :

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + y_G^2 A_1 + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) R^4 + (y_2 - y_0)^2 \frac{\pi R^2}{2}\,;$$

şi

$$I_y = \frac{hb^3}{12} + \frac{\pi R^4}{8},$$

sau numeric :

$$I_x = \frac{2 \cdot 4^3}{12} + 1{,}26^2 \cdot 8 + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) 2^4 + (2{,}85 - 1{,}26)^2 \cdot 6{,}28 = 40 \text{ cm}^4$$

şi

$$I_y = \frac{4 \cdot 2^3}{12} + \frac{2^4 \cdot \pi}{8} = 8{,}95 \text{ cm}^4.$$

2.21. Să se calculeze momentul de inerţie polar al unei plăci de lemn de formă triunghiulară ABC, de laturi a, b, c, în raport cu vîrful A (fig. 2.21).

Rezolvare. Din asemănarea triunghiurilor AMN şi ABC, rezultă

$$\frac{y}{h} = \frac{MN}{a}.$$

Se observă însă că :

$$MP = y \cdot \operatorname{ctg} \beta\,;\; NP = y \cdot \operatorname{ctg} \gamma\,;$$

$$AS^2 = x^2 + y^2\,;$$

$$\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{a}{h}\,;\quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,;\quad h = c \cdot \sin \beta.$$

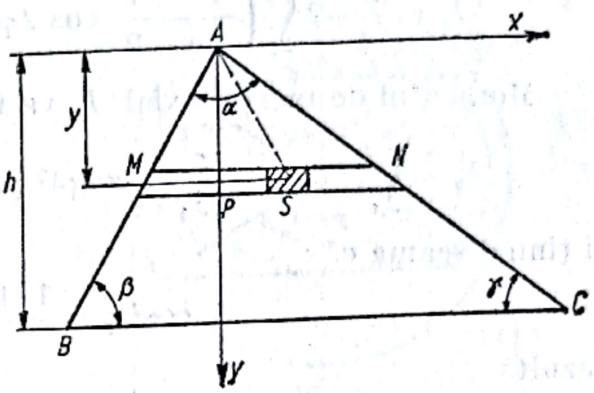


Fig. 2.21

Momentul de inerţie în raport cu punctul A este :

$$I_A = \int_A (x^2 + y^2)\, dA = \iint (x^2 + y^2)\, dx dy\,;$$

rezultă, deci :

$$I_A = \int_0^h dy \int_{-y \operatorname{ctg} \beta}^{y \operatorname{ctg} \gamma} (x^2 + y^2)\, dx = \frac{1}{4} c^4 \cdot \sin^4 \beta \left[\frac{1}{3} (\operatorname{ctg}^3 \beta + \operatorname{ctg}^3 \gamma) + \frac{a}{c \cdot \sin \beta} \right].$$

2.22. Să se calculeze momentele de inerţie I_0, I_z, I_y şi I_{y1} pentru segmentul de buştean din figura 2.22.

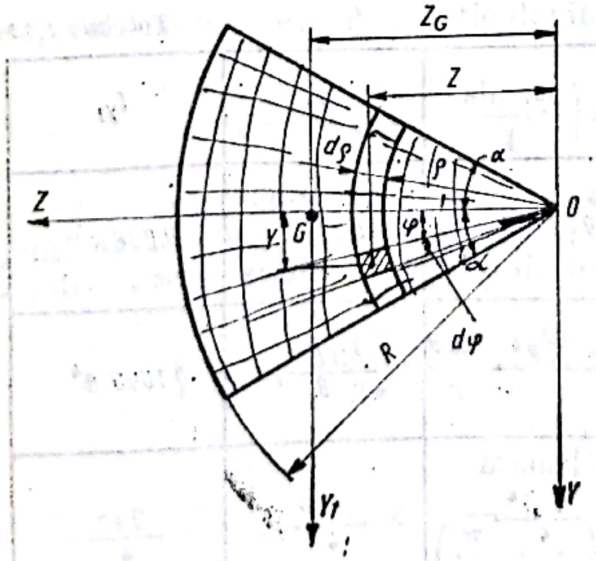


Fig. 2.22

Rezolvare. Utilizînd coordonatele polare, şi cunoscînd că : $dA = \rho d\rho\, d\varphi$, se obţine :

Momentul de inerţie polar :

$$I_0 = \int_A \rho^2\, dA = \iint_A \rho^2 \cdot \rho d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = \frac{R^4}{2}\, \alpha.$$

Momentul de inerţie axial, I_z este :

$$I_z = \int_A y^2\, dA = \iint_A (\rho \sin \varphi)^2 \rho d\rho d\varphi = \int_0^R \rho^3\, d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \varphi\, d\varphi\,;$$

ţinînd seama că :

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$

în urma înlocuirii se obţine :

$$I_z = \frac{R^4}{4}\cdot 2\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{R^4}{4}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right).$$

Momentul de inerţie axial I_y va fi :

$$I_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}A = \iint_A (\rho\cos\rho)^2\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^R \rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

şi ţinînd seama că :

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2},$$

rezultă

$$I_y = \frac{R^4}{4}\cdot 2\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{R^4}{4}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right).$$

Momentul de inerţie în raport cu axa y_1, care trece prin centrul de greutate G al segmentului este :

$$I_{y_1} = I_y - z_G^2 A,$$

în care :

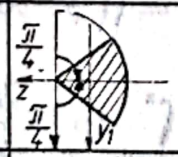
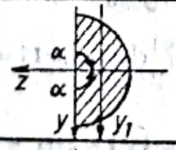
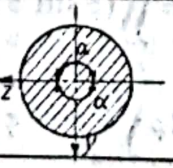
$$z_G = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \text{ iar } A = \frac{1}{2}R\cdot 2\alpha R = R^2\alpha.$$

Rezultă :

$$I_{y_1} = \frac{R^4}{4}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) - \frac{4}{9}R^4\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}.$$

Particularizînd relaţiile obţinute pentru : $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi $\alpha = \pi$, se obţin valorile din tabelul 2.22.

Tabelul 2.22

α	Forma secţiunii	I_o	I_z	I_y	I_{y_1}
$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi R^4}{8}$	$0{,}07\,R^4$	$0{,}32\,R^4$	$0{,}038\,R^4$
$\frac{\pi}{2}$		$\frac{4R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{8}$	$\frac{\pi R^4}{8}$	$0{,}1098\,R^4$
π		$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$

Scanned with OKEN Scanner

2.23. Pentru secțiunea unei grinzi (fig. 2.23) obținută dintr-un buștean de diametru D, se cere să se calculeze momentul de inerție axial I_z, precum și momentul static S_z al jumătății de secțiune.

Rezolvare. Secțiunea grinzii se poate descompune în două sectoare de cerc, pentru care momentul de inerție are expresia dedusă în problema 2.22 :

$$I_z = \frac{R^4}{4}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right),$$

și în două triunghiuri isoscele de bază $2R \cdot \cos\alpha$ și înălțime $R \cdot \sin\alpha$.

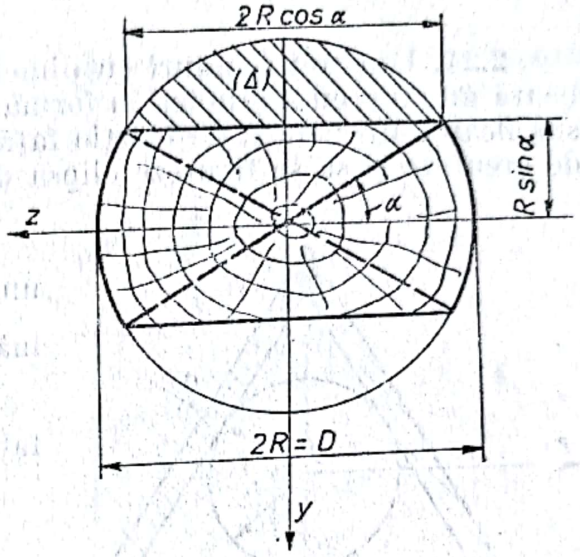


Fig. 2.23

Momentul de inerție al secțiunii este :

$$I_z = \frac{2R^4}{4}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) + 2\frac{2R \cdot \cos\alpha (R \cdot \sin\alpha)^3}{36} + \left(\frac{2}{3} R \sin\alpha\right)^2 \frac{2R \cdot \cos\alpha \cdot R \sin\alpha}{2},$$

sau în urma efectuării calculelor

$$I_z = \frac{R^2}{2}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} + \sin 2\alpha \cdot \sin^2\alpha\right)$$

Ținînd seama că :

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2 \sin 2\alpha - 4 \sin 2\alpha \sin^2\alpha$$

expresia momentului de inerție devine :

$$I_z = \frac{R^2}{2}\left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right) = \frac{D^2}{32}\left(\alpha + \frac{\sin 4\alpha}{4}\right).$$

Momentul static al jumătății de secțiune se calculează considerînd jumătatea de secțiune ca fiind compusă dintr-o jumătate de cerc de rază R, din care se scade segmentul de cerc (Δ) :

$$S_z = \sum y_i A_i = \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{2} 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{4}{3} \times \times \frac{R \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\pi - 2\alpha)}$$

Rezultă :

$$S_z = \frac{2}{3} R^3(1 - \cos^2 \alpha) = \frac{D^3}{12}(1 - \cos^3 \alpha).$$

2.24. Din trei scînduri cu dimensiunile secțiunii a și t, se confecționează un stîlp cu secțiunea în formă de triunghi echilateral. Se cere să se stabilească momentul de inerție față de o axă Oz care trece prin centrul de greutate și să se figureze elipsa de inerție (fig. 2.24).

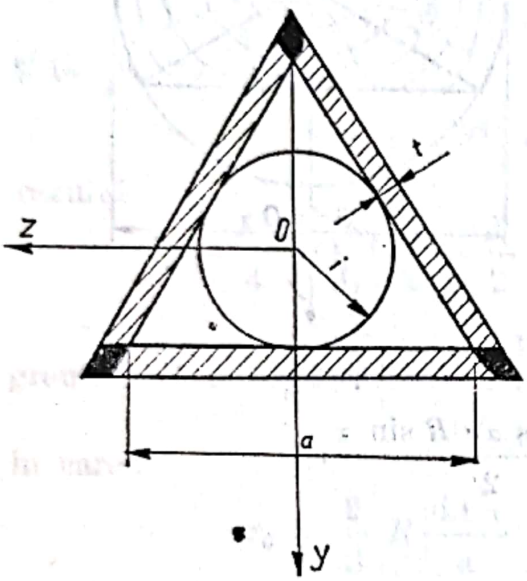


Fig. 2.24

Rezolvare. Latura exterioară a triunghiului echilateral este $a + 2t\sqrt{3}$, iar înălțimea $(a + 2t\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Momentul de inerție al secțiunii față de axa Oz este :

$$I_z = \frac{(a+2\sqrt{3}t)\left[(a + 2\sqrt{3}t)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^3}{36} - \frac{a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{36},$$

adică

$$I_z = \frac{\sqrt{3}}{96}[(a + 2\sqrt{3}t)^4 - a^4].$$

Ridicînd binomul din paranteza rotundă la puterea a patra, se obține :

$$I_z = \frac{\sqrt{3}}{96}(a^4 + 8\sqrt{3}\,a^3t + 72a^2t^2 + 96at^3 + 144t^4 - a^4);$$

neglijînd termenii t^2, t^3 și t^4, rezultă :

$$I_z \cong \frac{a^3t}{4}.$$

Datorită simetriei secțiunii, toate direcțiile ce trec prin centrul de greutate sînt direcții principale de inerție și deci elipsa de inerție se reduce la un cerc de rază :

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \frac{a}{\sqrt{12}},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$A = \frac{(a + 2\sqrt{3}t)(a + 2\sqrt{3}t)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} - \frac{a \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 3a \cdot t.$$

2.25. Să se determine momentele de inerţie I_{x_1}, I_{y_1} şi $I_{x_1y_1}$, în raport cu un sistem de axe rectangulare, care trec prin centrul de greutate al secţiunii tălpii grinzii cu zăbrele din lem (fig. 2.25) şi sînt înclinate cu 20°.

Rezolvare. Centrul de greutate al secţiunii se află la distanţa:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} =$$

$$= \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3};$$

substituind cu valori numerice, rezultă:

$$y_G = \frac{16 \cdot 96 + 2{,}5 \cdot 60 + 28 \cdot 96}{96 + 60 + 96} =$$

$$= 17{,}4 \text{ cm}.$$

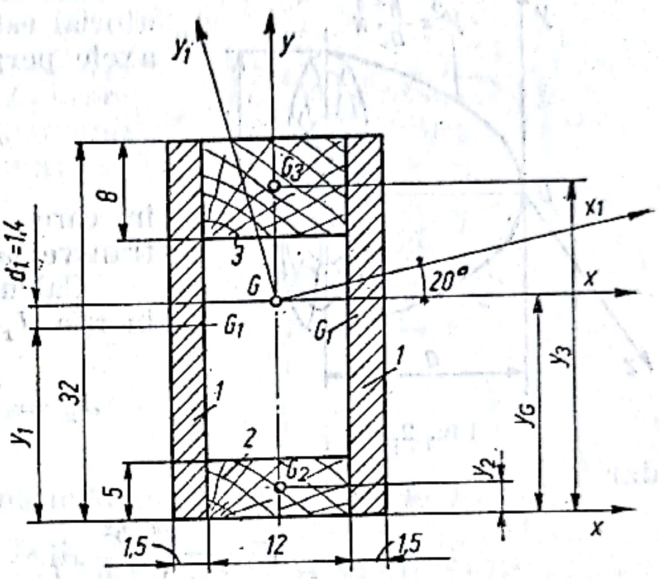


Fig. 2.25

Momentele de inerţie axiale centrale sînt respectiv:

$$I_x = 2\left[1{,}5 \cdot \frac{32^3}{12} + 1{,}4^2 \cdot 48\right] + 12\frac{5^3}{12} + 14{,}9^2 \cdot 60 +$$

$$+ \frac{12}{12} \cdot 8^3 + 10{,}6^2 \cdot 96 = 33025 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 2\left[\frac{1{,}5 \cdot 32^3}{12} + \left(6 + \frac{1{,}5}{2}\right)^2 \cdot 1{,}5 \cdot 32\right] +$$

$$+ \frac{12^3 \cdot 5}{12} + \frac{12^3 \cdot 8}{12} = 6248 \text{ cm}^4.$$

Momentele de inerţie faţă de axele rotite sînt:

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 40° = 29786 \text{ cm}^4,$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 40° = 9486 \text{ cm}^4,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar momentul de inerție centrifugal

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = \frac{33028 - 6248}{2} \sin 40° = 8470 \text{ cm}^4.$$

2.26. Pentru bușteanul de forma unui paraboloid de rotație (fig 2.26) se cere să se calculeze momentul de inerție ecuatorial.

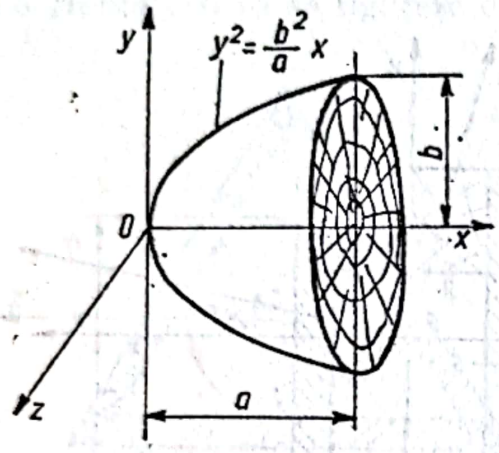


Fig. 2.26

Rezolvare. Momentul de inerție ecuatorial este momentul de inerție față de axele perpendiculare; deci

$$J_y = J_z = \frac{1}{2} J_x + J_{yOz},$$

în care J_{yOz} este momentul de inerție transversal.

Calculăm mai întîi momentul de inerție J_x; avem:

$$J_x = \frac{\pi M}{2V} \int_0^a \frac{b^4}{a^2} x^2 \, dx = \frac{\pi M}{2V} \cdot \frac{b^4 a}{3};$$

dar

$$V = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a} x dx = \frac{\pi b^2 a}{2};$$

deci

$$J_x = \frac{\pi M \frac{b^4 a}{3}}{2\pi \frac{ab^2}{2}} = \frac{Mb^2}{3},$$

iar

$$J_{yOz} = \frac{\pi M}{V} \int x^2 y^2 dx = \frac{\pi M}{V} \int_0^a x^2 \frac{b^2}{a} x dx = \frac{\pi b^2}{a \cdot V} \cdot \frac{a^4 M}{4} =$$

$$= \frac{\pi b^2 a^3 M}{\frac{\pi a \cdot b^2 \cdot 4}{2}} = \frac{Ma^2}{2}.$$

Prin urmare:

$$J_y = J_z = \frac{M \cdot b^2}{6} + \frac{M \cdot a^2}{2} = \frac{M}{6}(b^2 + 3a^2).$$

2.27. Pentru secțiunea unui burghiu elicoidal se cere să se calculeze momentele de inerție I_z, I_y, I_{zy}, momentele de inerție principale I_1 și I_2,

Scanned with OKEN Scanner

precum și direcțiile principale de inerție, determinate de unghiurile α_1 și α_2.

Să se traseze apoi elipsa principală de inerție. Se cunosc dimensiunile : $f = 0{,}12\ D$; $R_1 = 0{,}48\ D$ și $R_2 = 0{,}18\ D$, unde D este diametrul burghiului. Aplicație numerică : $D = 20$ mm.

Rezolvare. Pentru calculul momentelor de inerție, s-a împărțit secțiunea burghiului în :

— două dreptunghiuri (cu aproximație) ;

— două sferturi de cerc de rază R_1 ;

— două semicercuri de rază R_2 (care se scad). Centrul de greutate al secțiunii este chiar centrul cercului circumscris.

Aria secțiunii este :

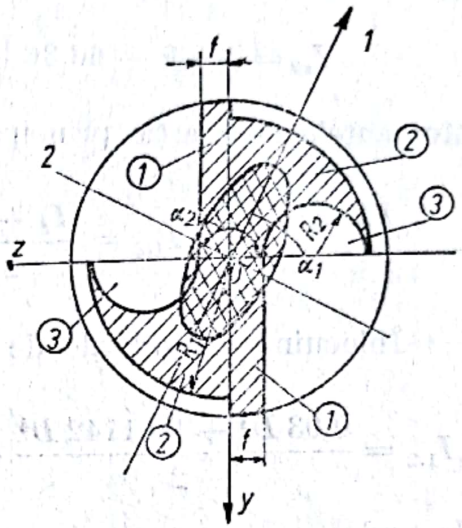


Fig. 2.27

$$A = 2\left(0{,}12\ D \cdot \frac{D}{2} + \frac{1}{2}\pi \cdot 0{,}48^2 D^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\pi \cdot 0{,}18^2 D^2\right) = 0{,}3416\ D^2.$$

Momentele de inerție ale dreptunghiului *1* față de axele z și y :

$$I_z = 0{,}12 \cdot D \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{D}{4}\right)^2 \cdot 0{,}12 \cdot D \cdot \frac{D}{2} = 50 \cdot 10^{-3} \cdot D^4 ;$$

$$I_y = (0{,}12\ D^3)^3 \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{12} + (0{,}06\ D)^2 \cdot 0{,}18 \cdot D \cdot \frac{D}{2} = 2{,}88 \cdot 10^{-3} \cdot D^4 ;$$

$$I_{zy} = -0{,}06 \cdot D^2 \cdot \frac{D}{4} \cdot 0{,}06\ D = -9{,}10^{-4} \cdot D^4.$$

Momentele de inerție ale sfertului de cerc *2* față de axele z și y sînt :

$$I_z = I_y = \frac{\pi R_1^4}{16} = \frac{\pi}{16}(0{,}48\ D)^4 = 104{,}12 \cdot 10^{-4}\ D^4 ;$$

$$I_{zy} = \frac{R_1^4}{8} = \frac{1}{8}(0{,}48\ D)^4 = 66{,}36 \cdot 10^{-4} \cdot D^4.$$

Momentele de inerție ale semicercului *3* față de axele z și y sînt :

$$I_z = \frac{\pi R_2^4}{8} = \frac{\pi}{8}(0{,}18\ D^4) = 4{,}12 \cdot 10^{-4} \cdot D^4 ;$$

$$I_y = \frac{\pi R_2^4}{8} + (0{,}3\ D)^2 \cdot \frac{\pi}{2}(0{,}18\ D)^2 = 49 \cdot 10^{-4} \cdot D^4 ;$$

$$I_{zy} = 0{,}3 \cdot D \cdot \frac{4 \cdot 0{,}18\ D}{3} \cdot \frac{\pi}{2}(0{,}18\ D) = 11{,}66 \cdot 10^{-4} \cdot D^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele întregii secţiuni faţă de axele x şi y vor fi:

$$I_z = 2\,(50 + 104{,}12 - 4{,}12)\cdot 10^{-4}\cdot D^4 = 300\cdot 10^{-4}\cdot D^4;$$

$$I_y = 2\,(2{,}88 + 104{,}12 - 49{,}9)\cdot 10^{-4}\cdot D^4 = 114{,}2\cdot 10^{-4} D^4;$$

$$I_{zy} = 2(-9 + 66{,}36 - 11{,}66)\cdot 10^{-4}\cdot D^4 = 45{,}7\cdot 10^{-4} D^4.$$

Momentele de inerţie principale se calculează cu relaţia:

$$I_{1;2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}.$$

Înlocuind cu valorile de mai sus, se obţine:

$$I_{1;2} = \frac{0{,}03\,D^4 + 0{,}01142\,D^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}03^4\,D^4 - 0{,}01142\,D^4}{2}\right)^2 + (0{,}00457 D^4)^2},$$

de unde

$$I_1 = 0{,}1003\,D^4;$$

faţă de axa *1* din primul cadran momentul de inerţie este minim, deoarece $I_{zy} > 0$.

$$I_2 = 0{,}0103\,D^4;$$

faţă de axa *2* din cadranul doi este maxim.

Direcţiile principale de inerţie se determină cu relaţia:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1;2} = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{2\cdot 0{,}00457\,D^4}{0{,}01142\,D^4 - 0{,}030\,D^4} = -0{,}492,$$

de unde

$$\alpha_1 = 63°45'$$

şi

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90° = 153°45'.$$

Razele principale de inerţie sînt respectiv egale cu:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}0103\,D^4}{0{,}3416\,D^2}} = 0{,}172\,D;$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}03114\,D^4}{0{,}3416\,D^2}} = 0{,}302\,D.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație numerică. Pentru $D = 20$ mm, se obține succesiv:

$$I_z = 0{,}48 \text{ cm}^4;\ I_1 = 0{,}168 \text{ cm}^4;\ i_1 = 0{,}344 \text{ mm};$$

$$I_y = 0{,}1823 \text{ cm}^4;\ I_2 = 0{,}4972 \text{ cm}^4;\ i_2 = 0{,}614 \text{ mm};$$

$$I_{zy} = 0{,}0731 \text{ cm}^4.$$

2.28. Să se determine momentele de inerție axiale și centrifugale ale dreptunghiului din figura 2.28, în raport cu sistemul de axe $z_1O_1y_1$. Se cunosc: $b = 9$ cm, $h = 4$ cm, $\alpha = 30°$, $a = 7$ cm și $c = 6$ cm.

Rezolvare. Momentele de inerție principale centrale ale dreptunghiului au valorile:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{9 \cdot 14^3}{12} = 48 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{4 \cdot 9^3}{12} = 243 \text{ cm}^4;\ I_{zy} = 0.$$

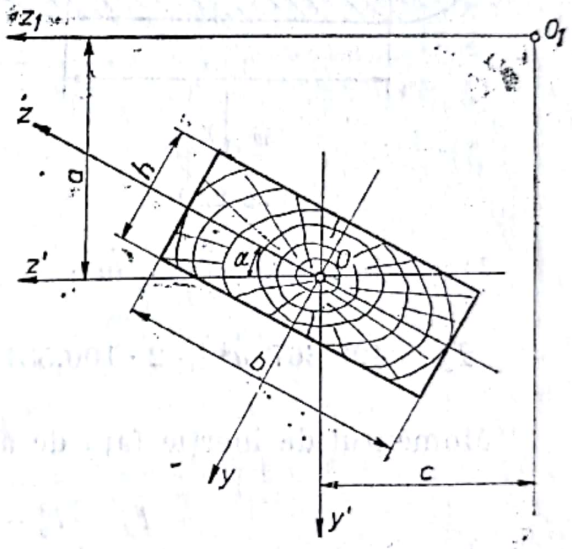


Fig. 2.28

Pentru axele rotite cu unghiul $\alpha = 30°$ expresiile momentelor de inerție devin:

$$I_{z'} = I_z \cos^2 30° + I_y \sin^2 30° =$$

$$= 48 \cdot 0{,}866^2 + 243 \cdot 0{,}5^2 = 96{,}75 \text{ cm}^4;$$

$$I_{y'} = I_z \sin^2 30° + I_y \cos^2 30° = 48 \cdot 0{,}5^2 + 243 \cdot 0{,}866^2 = 194{,}25 \text{ cm}^4;$$

$$I_{z'y'} = \frac{1}{2}(I_z - I_y) \sin 60° = \frac{1}{2}(48 - 243) \cdot 0{,}866 = -84{,}435 \text{ cm}^4.$$

Față de sistemul de referință $z_1O_1y_1$ momentele de inerție ale dreptunghiului sînt:

$$I_{z_1} = I_{z'} + a^2A = 96{,}75 + 7^2 \cdot 36 = 1860{,}75 \text{ cm}^4;$$

$$I_{y_1} = I_{y'} + c^2A = 194{,}25 + 6^2 \cdot 36 = 1490{,}25 \text{ cm}^4;$$

$$I_{z_1y_1} = I_{z'y'} + acA = -84{,}435 + 7 \cdot 6 \cdot 36 = 1427{,}565 \text{ cm}^4.$$

2.29. Pentru suprafața din figura 2.29 (asemănătoare cu secțiunea puștii de vînătoare) se cere să se calculeze momentele de inerție față de axele Oz și Oy ce trec prin centrul de greutate precum și razele de inerție corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Suprafaţa poate fi considerată ca fiind formată dintr-un dreptunghi, două semicercuri din care lipsesc două cercuri de rază $4a$. Ca atare se poate scrie :

$$I_z = I_z^d + 2I_z^s - 2I_z^c$$

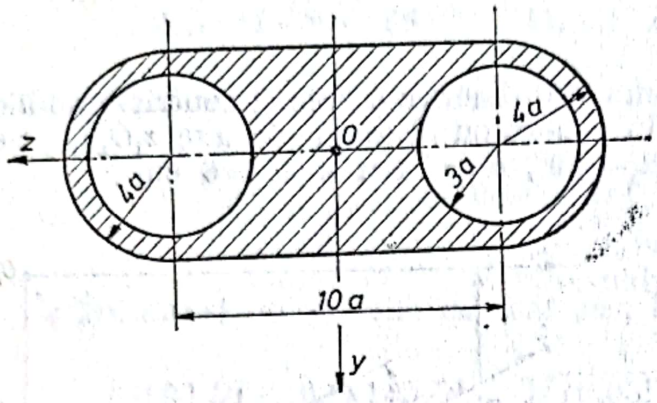


Fig. 2.29

unde

$$I_z^d = \frac{10a\,(8a)^3}{12} = 426{,}667\ a^4;$$

$$I_z^s = \frac{1}{2}\,\frac{\pi D^4}{64} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi(8a)^4}{64} =$$

$$= 100{,}531\ a^4;$$

$$I_z^c = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi(6a)^4}{64} = 63{,}617\ a^4.$$

După înlocuiri se obţine :

$$I_z = 426{,}667\ a^4 + 2 \cdot 100{,}531\ a^4 - 2 \cdot 63{,}617\ a^4 = 500{,}495\ a^4.$$

Momentul de inerţie faţă de axa Oy este :

$$I_y = I_y^d + 2I_y^s - 2I_y^c,$$

unde

$$I_y^d = \frac{8a\,(10a)^3}{12} = 666{,}667\ a^4;\quad I_y^s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi(8a)^4}{64} +$$

$$+\left(\frac{4 \cdot 4a}{3\pi} + 5a\right)^2 \frac{\pi(8a)^2}{8} = 1227{,}948\ a^4;$$

$$I_y^c = \frac{\pi(6a)^4}{64} + (5a)^2 \cdot \frac{5(6a)^2}{4} = 770{,}476\ a^4.$$

După înlocuiri se obţine :

$$I_y = 666{,}667\ a^4 + 2 \cdot 1227{,}948a^4 - 2 \cdot 770{,}476\ a^4 = 1581{,}611\ a^4.$$

Aria suprafeţei este :

$$A = 80a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi(8a^2)}{4} - 2 \cdot \frac{\pi(6a)^2}{4} = 73{,}717\ a^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile razelor de inerţie sînt:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{500{,}495\ a^4}{73{,}717 a^2}} = 2{,}606\ a;\quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1581{,}611\ a^4}{73{,}717\ a^2}} = 4{,}632\ a.$$

2.30. Pentru prisma de lemn din figura 2.30, se cere să se determine momentul de inerţie mecanic în raport cu axa Oy.

Rezolvare. Considerînd un element de masă dm la distanţa u de axa Oy, se poate scrie:

$$J_y = \int u^2 dm = \frac{M}{V}\int u^2 dV = \frac{M}{V}\int (x^2 + y^2)\, dV,$$

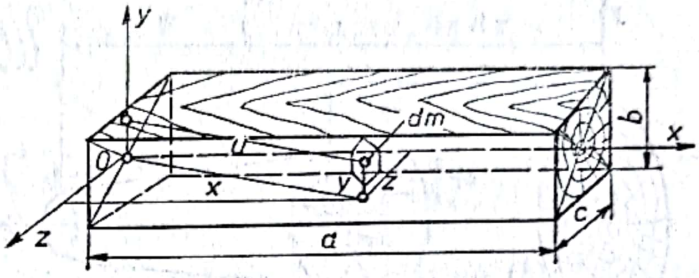


Fig. 2.30

sau

$$J_y = \frac{M}{V}\int_0^a\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{M}{V}\left[4\int_0^a\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{c}{2}} x^2\, dx\, dy\, dz + \right.$$

$$\left. + \int_0^a\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{c}{2}} z^2 dx\, dy\, dz\right] = \frac{M}{V}\left[4\int_0^a x^2 dx \int_0^{\frac{b}{2}} dy \int_0^{\frac{c}{2}} dz + \right.$$

$$\left. + 4\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{2}} dy \int_0^{\frac{c}{2}} z^2 dz\right] = \frac{M}{V}\left(4\,\frac{a^3}{3}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2} + 4\,\frac{ab}{2}\cdot\frac{c^3}{3}\right).$$

Ţinînd seama că volumul prismei este:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

în urma înlocuirii şi efectuării calculelor, se obţine:

$$J_y = \frac{M}{12}(4a^2 + c^2).$$

2.31. Să se determine expresiile volumului, centrului de greutate şi momentelor de inerţie pentru trunchiul unui arbore şi pentru un catarg de răşinoase (fig. 2.31).

Rezolvare. Trunchiul unui arbore de răşinoase poate fi aproximat ca avînd variaţia unei parabole cubice (fig. 2.31, *a*).

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3, \qquad \text{(a)}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde y este raza unei secţiuni oarecare a trunchiului aflată la distanţa x de la capătul gros, în cm;

x — distanţa de la capătul gros pînă în secţiunea considerată, în m,

a, b, c şi d — coeficienţi ce depind de specie şi dimensiunile trunchiului şi se determină prin măsurători practice şi calcule statistice.

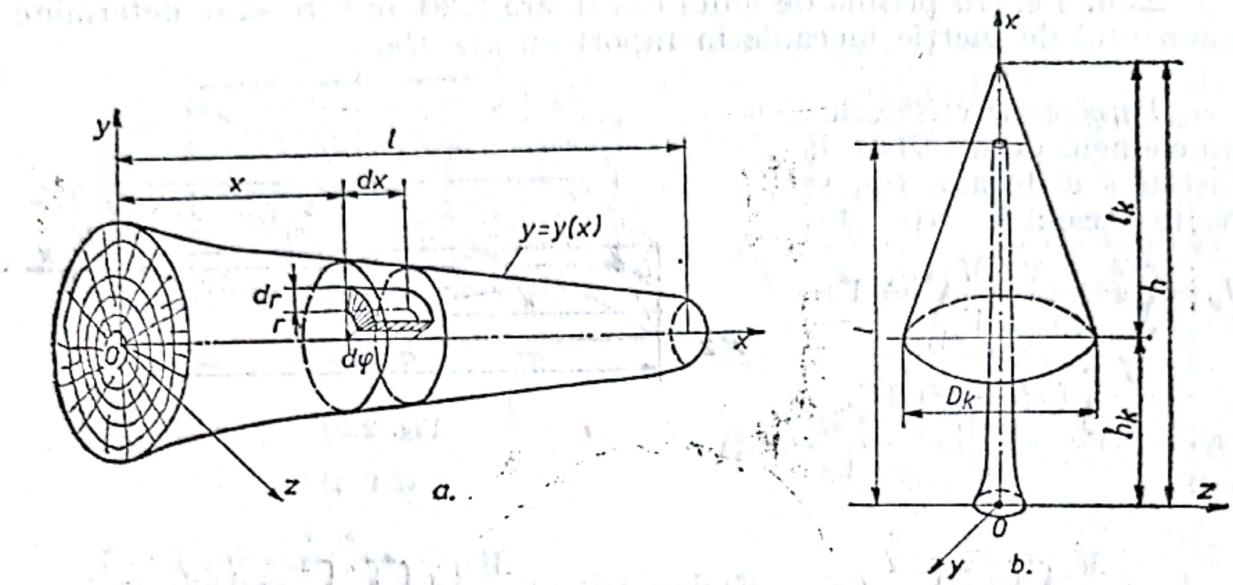


Fig. 2.31

Un volum elementar al trunchiului capacului are expresia:

$$dV = 10^{-4}\,\pi[y(x)]^2\,dx.$$

Prin integrarea acestei relaţii se obţine volumul bușteanului de lungime x, sub forma:

$$V = 10^{-4}\pi\int_0^x [y(x)]^2\,dx, \qquad (b)$$

Dacă $x = l$[m] se obţine volumul întreg al trunchiului.

Poziţia centrului de greutate al bușteanului de lungime x este

$$x_c = \frac{\iiint\limits_{(V)} x\,dV}{\iiint\limits_{(V)} dV} = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} x\,dV = \frac{\pi}{10^4\,V}\int_0^x x[y(x)]^2\,dx. \qquad (c)$$

Momentul de inerţie faţă de axa y are expresia:

$$J_y = \iiint\limits_{(m)} x^2\,dm = \rho_{tc}\iiint\limits_{(V)} x^2\,dV$$

în care m este masa trunchiului, în kgf · s²/m;

ρ_{tc} — densitatea lemnului necojit, în kg/m³.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în expresia (*d*) expresia volumului elementar, se obține:

$$J_y = \frac{\pi \rho_{tc}}{10^4} \int_0^x [y(x)]^2 x^2 \mathrm{d}x. \tag{e}$$

Momentul de inerție al trunchiului față de axa Ox are expresia (fig. 2.31., *a*)

$$J_x = \iiint\limits_{(m)} r^2 \,\mathrm{d}m = \iiint r^2 \rho_{tc} \,\mathrm{d}V = \iiint r^2 \rho_{tc}\, r \mathrm{d}_\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\pi}{10^{16}} \rho_{tc} \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x [y(x)]^3 [y'(x)] \,\mathrm{d}x. \tag{f}$$

Ținînd cont de expresia $y(x)$ din relația (*a*), relațiile (*b*), (*c*) și (*e*) devin:

$$V = \frac{\pi x}{10^4} \left(a^2 + abx + \frac{b^2 + 2ac}{3} x^2 + \frac{ad + bc}{2} x^3 + \frac{2bd + c^2}{5} x^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{cd}{3} x^5 + \frac{d^2}{7} x^6 \right); \tag{g}$$

$$x_C = \frac{\pi x^2}{10^4 V} \left[\frac{a^2}{2} + \frac{2ab}{3} x + \frac{b^2 + 2ac}{4} x^2 + \frac{2(ad + bc)}{5} x^3 + \frac{2bd + c^2}{6} x^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{2cd}{7} x^5 + \frac{d^2}{8} x^6 \right]; \tag{h}$$

$$J_y = \frac{\pi x^3}{10^4} \rho_{tc} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{ab}{2} x + \frac{b^2 + 2ac}{5} x^2 + \frac{ad + bc}{3} x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{2bd + c^2}{7} x^4 + \frac{cd}{4} x^5 + \frac{d^2}{9} x^6 \right). \tag{i}$$

Relația (*e*) se integrează mult mai simplu pentru valori particulare ale parametrilor a, b, c și d.

Spre exemplu pentru un trunchi de pin avînd diametrul mediu de 20 cm și variația următoare în lungul arborelui

x [m]	0	1	3	5	7	9	11	13	15	Observații
D_x [cm]	25,0	20,4	18,31	16,70	15,10	13,27	11.30	8,63	5,85	cu coajă
D_x [cm]	23,6	19,1	17,01	15,55	14,15	12,27	10,35	7,78	5,25	fără coajă

Scanned with OKEN Scanner

rezultă experimental $V = 0{,}263$ m³(cu coajă) și $V = 0{,}227$ m³ (fără coajă) iar valorile coeficienților a, b, c și d sînt :

	a	b	c	d
cu coajă	11,98	−1,1896	0,10747	−0,004613
fără coajă	11,19	−1,0435	0,08452	−0,003561

Cu aceste valori relațiile (g), (h) și (i) dau valorile teoretice ($\rho_{tc} \cong 730$ kg/m³) :

$$V = 0{,}269 \text{ [m}^3\text{]} \text{ (cu coajă)}; \; V = 0{,}233 \text{ [m}^3\text{] (fără coajă)};$$

$$x = 0{,}338\, l = 5{,}1 \text{ [m]}, \; J_y = 0{,}239\, ml^2 = 1086 \text{ kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2.$$

De remarcat că valorile teoretice și experimentale ale volumului nu diferă cu mai mult de 1,5...2,6 % iar a poziției centrului de greutate se apropie de cele date în diverse lucrări [39], diferența fiind pînă la 10 %. Pentru a înlătura această eroare valorile determinate cu relația (h) se amplifică cu un coeficient $K = 1, 1$, aceasta devenind :

$$x^{\text{real}} \cong 1{,}1\, x_c \qquad (j)$$

În cazul arborelui, avînd dimensiunile prezentate în figura 2.31, b, relațiile pentru poziția centrului de greutate x_{ca} și momentului de inerție J_{ya} devin :

$$x_{ca} = \frac{x_c + \xi(h_k + 0{,}25\, l_k)}{1 + \xi}; \qquad (k)$$

$$J_{ya} = J_y + \xi m \left[\frac{1}{80}(3D_k^2 + 8l_k^2) + h_k^2\right], \qquad (l)$$

în care h și h_k sînt înălțimea arborelui și distanța pînă la baza coroanei, — în m (fig. 2.31, b);

l_k și D_k — lungimea coroanei și diametrul maxim al acesteia, în m;

m — masa trunchiului arborelui, în kgf · s²/m;

ξ — greutatea coroanei pe greutatea trunchiului arborelui; pentru rășinoase $\xi = 0{,}34...0{,}35$;

J_y — momentul de inerție al trunchiului calculat cu relațiile (d) și (i).

Spre exemplu pentru un arbore cu caracteristicile : $h = 17, 20$ m; $h_k = 5{,}81$ m; $D_k = 3{,}30$ m; $\xi = 0{,}34$ și $l = 13{,}22$ m se obține cu relațiile (k) și (l), $x_{ca} \cong 0{,}35\, h = 6{,}02$ m, $J_{ya} \cong 0{,}248\, mh^2 = 1\,470$ kgf · ms².

Scanned with OKEN Scanner

Cercetările experimentale au arătat că $x_{ca} = (0{,}395 \ldots 0{,}400)h$ (pentru răşinoase).

Cu ajutorul relaţiei lui Steiner momentul de inerţie al arborelui faţă de axa ce trece prin centrul de greutate devine :

$$J_{yac} = 0{,}12\, mh^2.$$

2.32. La debitarea cherestelei pe prismă (fig. 2.32, *a*) se obţin şi piese laterale de cherestea a căror secţiune se compune dintr-un segment de cerc şi un dreptunghi (fig. 2.32, *b*). Se cere să se calculeze :

1. Corelaţia dintre lăţimea a, bombamentul h al pieselor de margine şi raza R a buşteanului din care acestea sînt debitate ;
2. Expresia centrului de greutate ;
3. Momentul de inerţie axial central I_{zG} ;
4. Modulul de rezistenţă axial W_z.
5. Să se stabilească corelaţia dintre piesele laterale astfel obţinute şi piesele de secţiune dreptunghiulară de aceeaşi arie.
6. Să se calculeze raza de inerţie şi coeficientul de profil [3, 24].

Rezolvare.

1. Din figura 2.32, *b* se observă că :

$$2R \sin \alpha = a \text{ şi } R \cos \alpha = R - h.$$

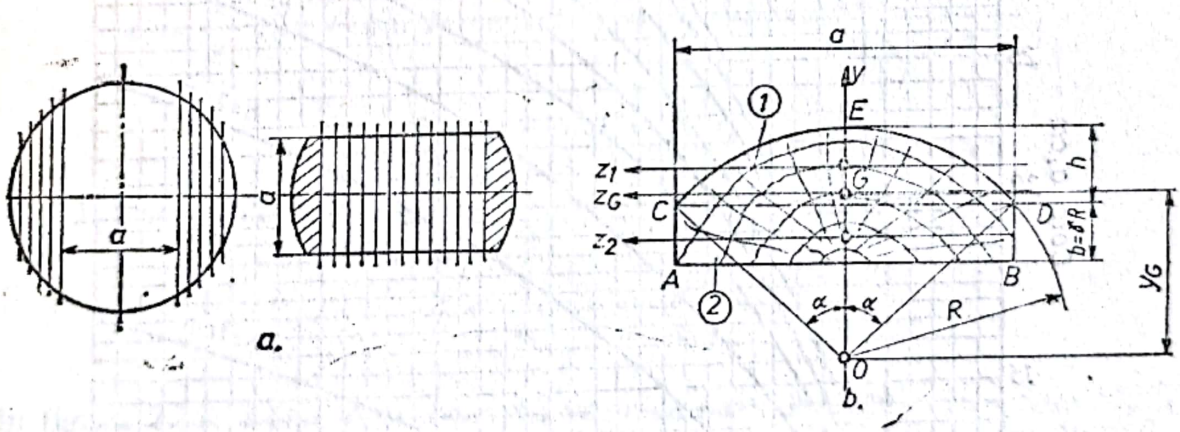


Fig. 2.32. a,b

Eliminînd unghiul α din aceste relaţii se obţine corelaţia dintre mărimile R, a şi h sub forma :

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

Pentru a facilita determinarea unui parametru cînd se cunosc ceilalţi doi, în figura 2.32, *c*, este nomografiată în coordonate semilogaritmice această relaţie pe baza datelor obţinute pe calculatorul electronic.

2. Poziţia centrului de greutate G, respectiv distanţa $OG = y_G$ se obţine din relaţia :

$$y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2},$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$y_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{R \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \text{ (v. tab. 2. } a\text{)}; \; A_1 =$$

$$= \alpha R^2 - R^2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$y_2 = R \cos \alpha - \frac{1}{2} \gamma R; \; A_2 = 2 \gamma R^2 \sin \alpha; \; \gamma = b/R.$$

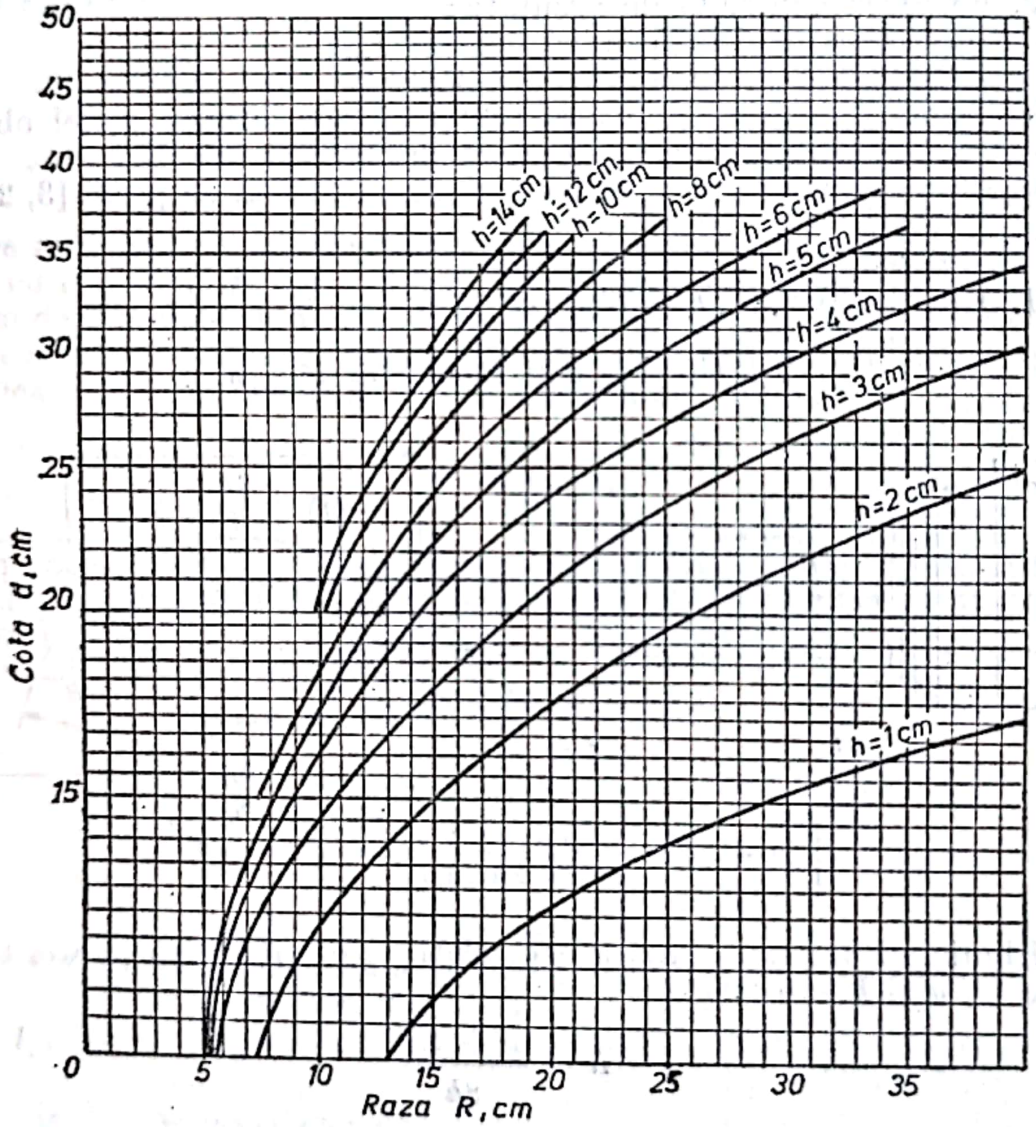


Fig. 2.32 c

După înlocuiri şi efectuarea calculelor se obţine :

$$y_a = \frac{2 \sin^3 \alpha + 3\gamma(2 \cos \alpha - \gamma) \sin \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 2 \gamma \sin \alpha)} R.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Momentul de inerţie axial I_{zG} se obţine cu relaţia lui Steiner şi este egal cu :

$$I_{zG} = \frac{1}{8} R^4 \left(2\alpha - \frac{1}{2}\sin^4\alpha\right) - \left[\frac{4}{3}\cdot\frac{R\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right]^2 \cdot R^2(\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha) +$$

$$+\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{R\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - y_G\right)^2 \cdot R^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + \frac{2\gamma^3 R^4 \sin\alpha}{12} +$$

$$+\left[y_G - \left(R\cos\alpha - \frac{1}{2}\gamma R\right)\right]^2 \cdot 2\gamma R^2 \sin\alpha = \xi_I R^4,$$

unde

$$\xi_I = \varepsilon + \frac{\gamma^3}{6}\sin\alpha + \frac{\gamma^2}{\beta}\left[\frac{4\sin^4\alpha - 6\beta\sin\alpha\cos\alpha + 3\beta\gamma\sin\alpha}{3(\beta + 2\gamma\sin\alpha)}\right]^2 +$$

$$+ 2\gamma\left[\frac{4\sin^3\alpha + 3\beta(\gamma - 2\cos\alpha)}{3(\beta + 2\gamma\sin\alpha)}\right]^2 \sin\alpha;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha) - \frac{4}{9}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha};$$

$$\beta = \alpha - \sin\alpha\cos\alpha.$$

Introducînd notaţia :

$$k = \frac{h}{a} = \frac{1 - \cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

în figura 2.32, *d* este reprezentată variaţia coeficientului adimensional, ξ_I în funcţie de k şi γ, facilitîndu-se determinarea rapidă a momentului de inerţie I_{zG} necesar în calculele de rigiditate şi stabilitate.

4. Modulul de rezistenţă axial este dat de relaţia

$$W_z = \frac{I_{zG}}{a_{max}},$$

După efectuarea înlocuirilor se obţine în final

$$W_z = \xi_W R^3,$$

unde $\xi_W = \xi_I/\psi$,

$$\psi = 1 - \frac{2\sin^3\alpha + 3\gamma(2\cos\alpha - \gamma)\sin\alpha}{3(\beta + 2\gamma\sin\alpha)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Reprezentarea grafică a coeficientului ξ_w în funcţie de coeficientul k şi γ este prezentată în figura 2.32, *e*.

5. Stabilirea corelaţiei dintre piesele de cherestea obţinute din marginea prismei şi cele de secţiune dreptunghiulară permite compararea acestora din punct de vedere al rezistenţei şi rigidităţii. Calculele arată

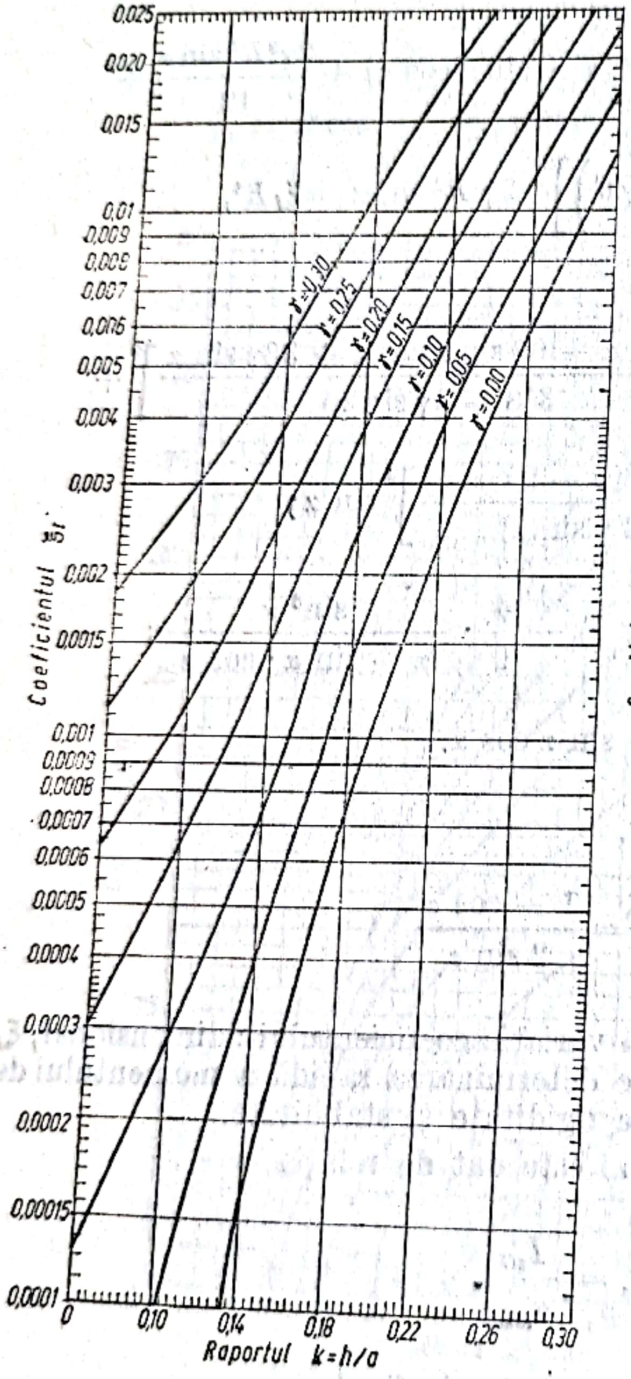


Fig. 2.32.d

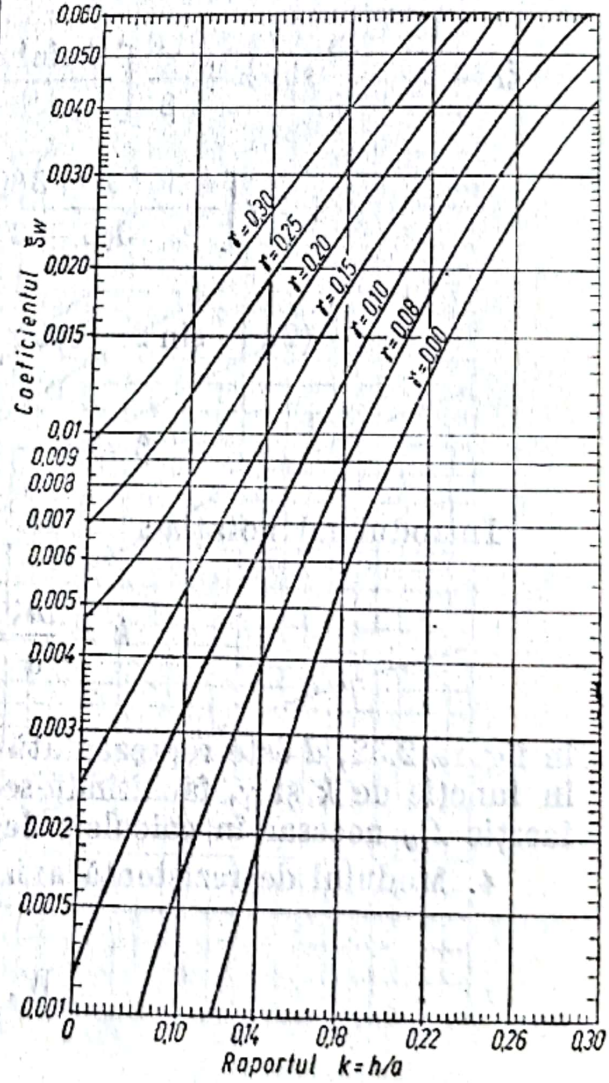


Fig. 2.32.e

că în anumite situaţii lăturoaiele pot înlocui piesele ecarisate, deoarece au rigiditate mai mare şi rezistenţă apropiată de acestea.

Înălţimea H a unei piese de secţiune dreptunghiulară de aceeaşi lăţime a cu segmentul de cerc combinat cu dreptunghiul şi de aceeaşi suprafaţă se obţine din relaţia:

$$H \cdot 2R \sin \alpha = \alpha R^2 - R^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2\gamma R^2 \sin \alpha,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă:

$$H = \frac{R}{2}(\alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha - \cos \alpha + 2\gamma).$$

Raportul dintre momentele de inerție ale lăturoaiei și piesei de cherestea de secțiune echivalentă cu suprafața este:

$$K_I = \frac{I_{zG}^{segm}}{I_{zG}^{drept}} = \frac{48\,\xi_I \sin^2 \alpha}{(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 2\gamma \sin \alpha)^3},$$

căci

$$I_{zG}^{drept} = \frac{(\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2\gamma \sin \alpha)^3}{48 \sin^2 \alpha}.$$

În mod asemănător se exprimă raportul modulelor de rezistență:

$$K_W = \frac{W_z^{segm}}{W_z^{drept}} = \frac{12\,\xi_W \sin \alpha}{(\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha\, 2\gamma \sin \alpha)^2},$$

căci

$$W_z^{drept} = \frac{(\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2\gamma \sin \alpha)^2}{12 \sin \alpha} R^3.$$

Expresiile coeficienților K_I și K_W sînt reprezentate grafic în figurile 2.32, *f* și *g*. Aceste grafice scot în evidență posibilitatea înlocuirii cherestelei

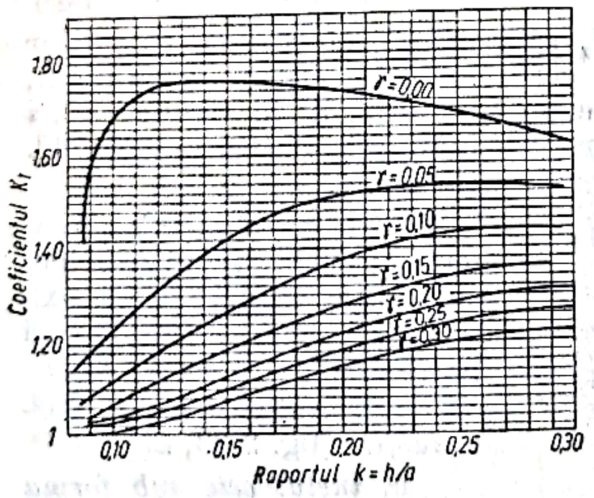


Fig. 2.32.f

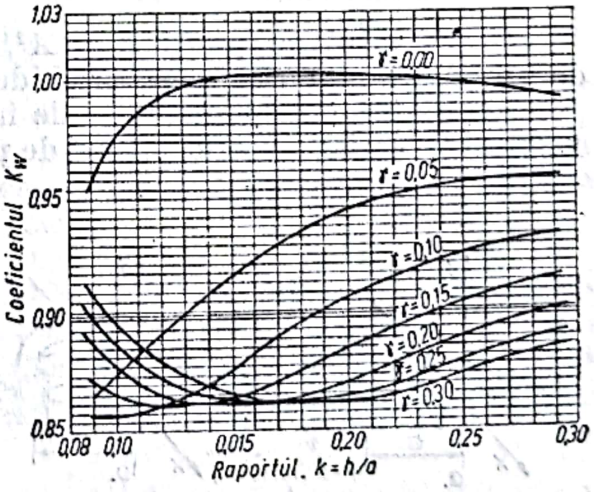


Fig. 2.32.g

ecarisate în anumite situații cu cea având secțiunea sub formă de segment de cerc.

6. Raza de inerție minimă este utilă la calculul coeficientului de subțirime și este dată de relația:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere expresia momentului de inerţie I_{zG} calculat la punctul 3 precum şi expresia ariei $A = (\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\gamma \sin\alpha)R^2$ s-a construit, cu ajutorul datelor oferite de calculatorul electronic, graficul din figura 2,32. *h*. Acest grafic redă corelaţia dintre i_z/R şi coeficienţii $k = h/a$ şi $\gamma = b_1 R$.

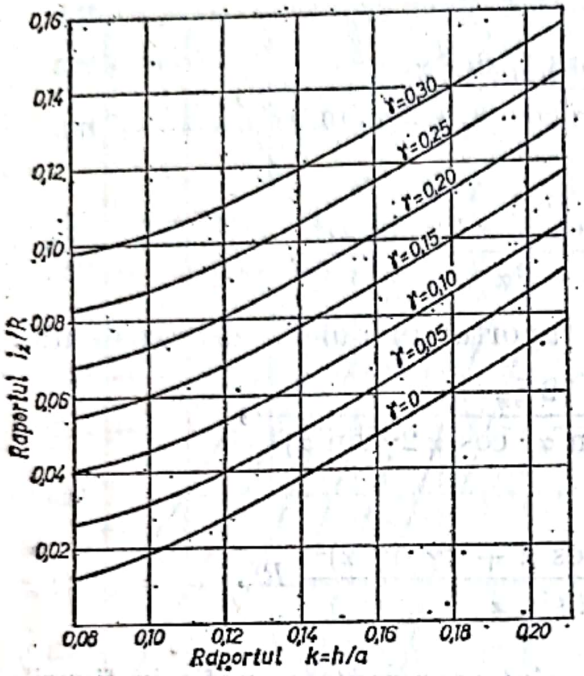


Fig. 2.32.h

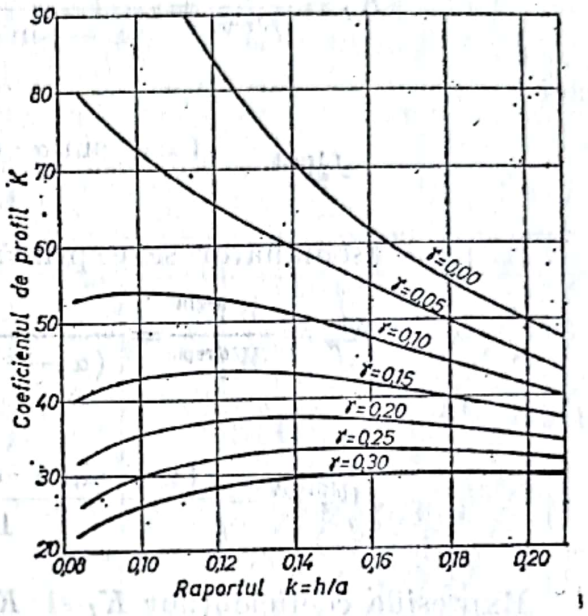


Fig. 2.32.i

Coeficientul de profil $K = A^2/I_z$ este util la efectuarea calculelor de stabilitate. Pentru segmentul de cerc combinat cu un dreptunghi, pe baza expresiilor momentului de inerţie I_z şi ariei A în figura 2.32, *i* se prezintă variaţia coeficientului de profil K în funcţie de k şi γ [23, 24].

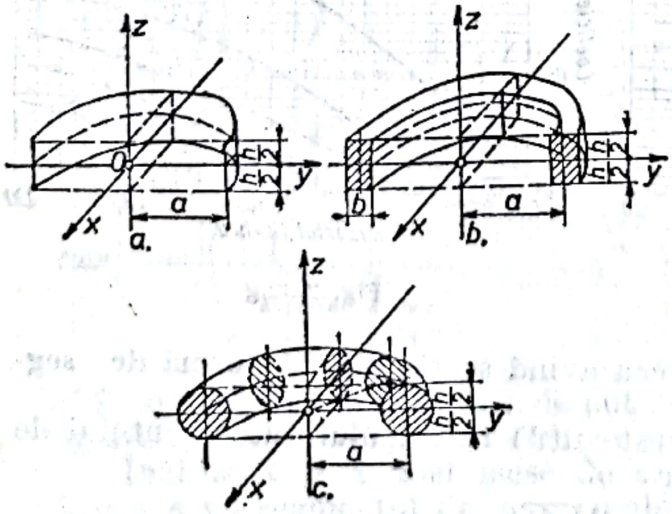


Fig. 2.33

2.33. Să se calculeze momentul de inerţie al unui inel de rotaţie în raport cu axa *Oz* (fig. 2.33) în trei cazuri particulare:

a. *inelul are peretele foarte subţire* (fig. 2.33, *a*);

b. *inelul este sub forma unui tor de secţiune dreptunghiulară* (de laturi $b \times h$ şi raza medie *a*) (fig. 2.33, *b*);

c. *inelul este sub forma unui tor de secţiune circulară* (raza secţiunii este R şi raza medie a torului este *a*) (fig. 2.33, *c*).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Expresia momentului de inerție față de axa *Oz* este

$$J_z = \iiint_{(V)} r^2 \, dV = 2\pi\rho \iint_{(A)} r^3 \, dA,$$

unde ρ este densitatea materialului iar r raza curentă.

a. În cazul *inelului foarte subțire* :

$$J_z = 2\pi\rho \int_0^h a^3 dh = 2\pi\rho \, a^3 h = Ma^2$$ căci masa este $M = 2\pi \, ah\rho$.

b. În cazul *inelului de secțiune dreptunghiulară* :

$$J_z = 2\,\pi\rho \int r^3 (h dr) = 2\pi\rho h \int_{a-0,5\,b}^{a+0,5\,b} r^3 \, dr = \frac{M}{64\,ab}(16a^4 + 24\,a^2b^2 + b^4),$$

căci masa este $M = 2\pi\rho \, abh$.

c. În cazul *inelului de secțiune circulară* :

$$J_z = 2\pi\rho \int r^3 h \, dr = 2\pi\rho \int_{a-R}^{a+R} 2r^3 \sqrt{R^2 - (a-b)^2} \, dr = \frac{M}{4\pi}(4a^2 + 3R^2)$$

căci

$$h = 2\sqrt{R^2 - (a-r)^2}, \text{ iar } M = 2a\rho^2 R^2.$$

2.34. Pentru secțiunile frezelor cu coadă utilizate la prelucrarea lemnului se cere să se calculeze caracteristicile geometrice (arie, momente de inerție axiale și centrifugale) (fig. 2.34).

Rezolvare. Dinții frezelor cu coadă au conturul determinat de spirala lui Arhimede (fig. 2.34). Considerînd lungimea feței de degajare a tăișului egală cu B, atunci expresia razei părții din spate (a feței de așezare) a unui dinte, pentru un unghi curent φ (măsurat de la fața de degajare) este :

$$\rho_{a\varphi} = [R + (n-1)B] - \frac{\varphi n}{2\pi} B, \text{ [mm]} \qquad \text{(a)}$$

unde R este raza cercului descris de vîrful frezei, în mm;

n — numărul de dinți ai frezei.

Unghiul la centru subîntins de un dinte este :

$$\varphi_d = 2\pi/n \text{ radiani} \qquad \text{(b)}$$

Scanned with OKEN Scanner

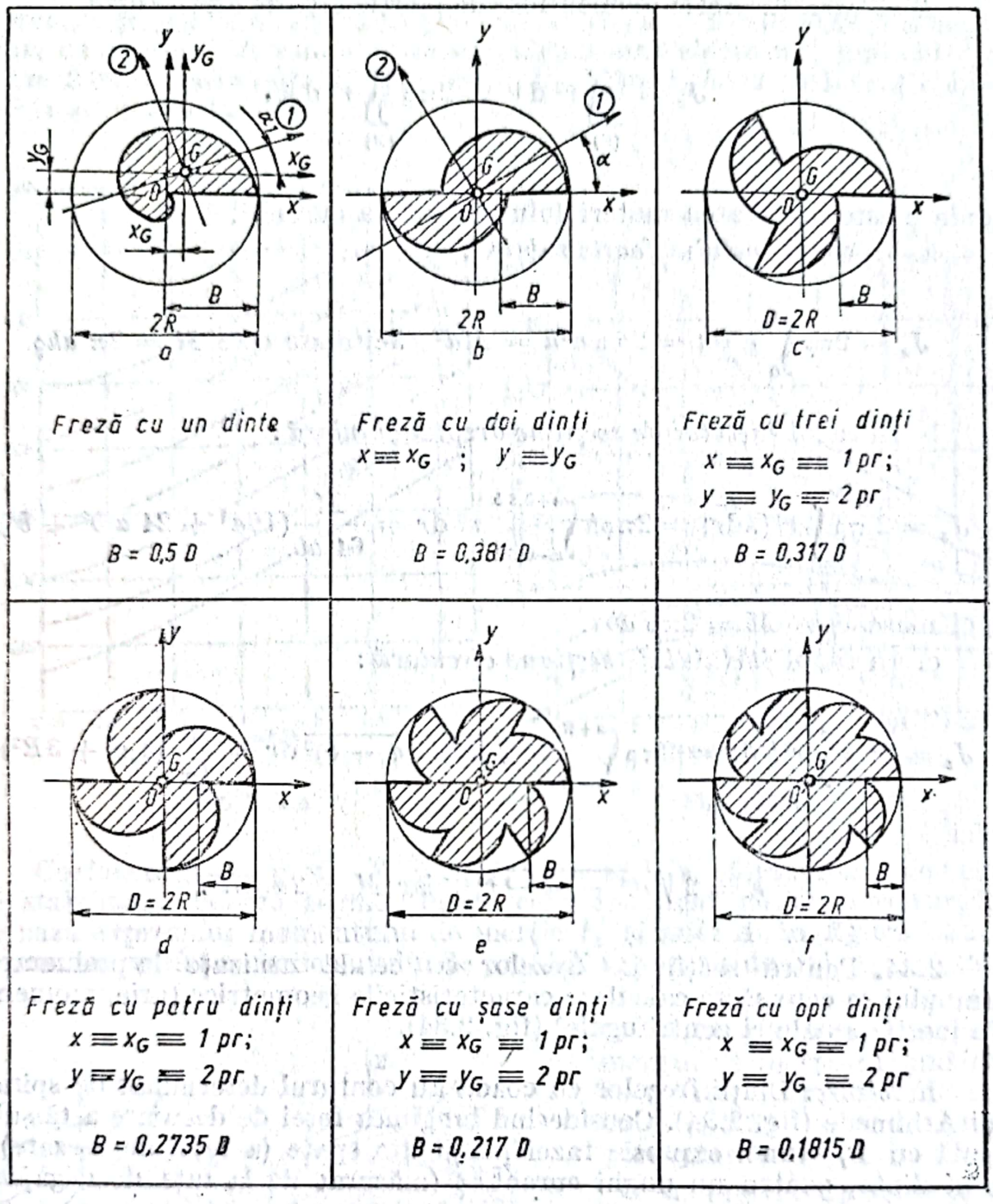


Fig. 2.34

Aria secțiunii A este determinată de aria fiecărui dinte. Aria unui dinte este suprafața cuprinsă între fața de degajare și fața de așezare pe domeniul unghiului la centru φ_c. Deci se poate scrie că:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \ [\text{mm}^2], \tag{c}$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ reprezintă aria fiecărui dinte.

Aria totală se poate scrie și sub forma:

$$A = \int_A dA = \int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA + \ldots + \int_{A_n} dA,$$

dar datorită simetriei constructive

$$\int_{A_1} dA = \int_{A_2} dA = \ldots = \int_{A_n} dA$$

iar relația (*c*) devine :

$$A = n \int_{A_1} dA \ [mm^2].$$

În coordonate polare aria elementară este :

$$dA = \rho d\varphi \ d\rho,$$

unde ρ este o rază curentă.

Limitele de integrare pentru suprafața A_1 sînt :

— unghiul φ între 0 și $2\pi/n = 2\pi$;

— raza ρ între 0 și $\rho_{1\varphi} = \left(R - \varphi \frac{Bn}{2\pi}\right) = R - \frac{B\varphi}{2\pi}$.

După înlocuiri se obține :

$$A = n \int_0^{2\pi/n} d\varphi \int_0^{R-\varphi \frac{Bn}{2\pi}} \rho d\rho = -\frac{\pi}{3B}[(R-B)^3 - R^3] =$$

$$= \frac{\pi R^3}{3B}\left[1 - \left(1 - \frac{B}{R}\right)^3\right] \ [mm^2]. \qquad (e)$$

Momentele statice S_x *și* S_y în raport cu axa Ox și Oy ce trec prin axa de rotație a frezei sînt date de relațiile :

$$S_x = \int_A y dA \ [mm^3] \text{ și } S_y = \int x dA \ [mm^3]. \qquad (f)$$

Datorită faptului că pentru freze cu $n \geqslant 2$ dinți centrul de rotație și centrul de greutate coincid iar axele Ox și Oy sînt axe centrale momentele statice S_x și S_y vor fi egale cu zero. Ca atare, în continuare se prezintă relațiile de calcul pentru frezele cu un singur dinte.

Legătura dintre coordonatele carteziene și polare este :

$$x = \rho \cos \varphi \text{ și } y = \rho \sin \varphi \qquad (g)$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd înlocuirile în relaţiile (f), pentru freza cu $n = 1$ dinte, se obţine :

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \int_A \rho \sin\varphi \cdot \rho \,d\varphi\, d\rho = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{R-B\varphi/2\pi} \rho^2 d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\left(R - \varphi\frac{B}{2\pi}\right)^3 \sin\varphi\, d\varphi; \\ S_y &= \int_A \rho\cos\varphi\ \rho\, d\varphi\, d\rho = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{R-B\varphi/2\pi} \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(R - \varphi\frac{B}{2\pi}\right)\cos\varphi\, d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

După efectuarea integralelor din relaţiile (h) se obţine în final :

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \frac{R^3}{3}\left[1 - \left(1 - \frac{B}{R}\right)^3\right] - \frac{B^3}{4\pi} \quad [\text{mm}^3]; \\ S_y &= \frac{BR^3}{2\pi}\left[1 - \left(1 - \frac{B}{R}\right)^2\right] \quad [\text{mm}^3]. \end{aligned}\right\} \quad (i)$$

Cunoscînd momentele statice se pot găsi coordonatele x_G şi y_G ale centrului de greutate al secţiunii frezei cu un singur dinte, respectiv :

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\dfrac{BR^3}{2\pi}\left[1 - \left(1 - \dfrac{B}{R}\right)^2\right]}{\dfrac{\pi R^3}{3B}\left[1 - \left(1 - \dfrac{B}{R}\right)^3\right]} = \frac{3B^2}{2\pi^2 R} \cdot \frac{2 - \dfrac{B}{R}}{2 - \dfrac{B}{R} + \left(1 - \dfrac{B}{R}\right)^2} \text{ [mm]}; \quad (j)$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\dfrac{R^3}{3}\left[1 - \left(1 - \dfrac{B}{R}\right)^3 - \dfrac{B^3}{4\pi}\right]}{\dfrac{\pi R^3}{3B}\left[1 - \left(1 - \dfrac{B}{R}\right)^3\right]} = \frac{B}{\pi}\left[1 - \frac{3B^3}{R^3} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{B}{R}\right)^3}\right] \text{ [mm]}. \quad (k)$$

Momentele de inerţie axiale I_x şi I_y sînt date de relaţiile :

$$I_x = \int_A y^2\, dA \ [\text{mm}^4] \text{ şi } I_y = \int_A x^2\, dA \ [\text{mm}^4] \quad (l)$$

şi care pentru toate frezele cu $n > 1$ sînt în acelaşi timp şi momente principale centrale de inerţie.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd înlocuirile în relaţiile (*l*) se obţine :

$$I_x = \int_A \rho^2 \sin^2 \varphi \rho \, d\varphi \, d\rho = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_1 \varphi} \rho^3 \, d\rho + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_2 \varphi} \rho^3 \, d\rho +$$

$$+ \dots + \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_n \varphi} \rho^3 \, d\rho ; \qquad (m)$$

$$I_y = \int_A \rho^2 \cos^2 \varphi \rho \, d\varphi \, d\rho = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_1 \varphi} \rho^3 \, d\rho + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_2 \varphi} \rho^3 \, d\rho +$$

$$+ \dots + \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_n \varphi} \rho^3 \, d\rho . \qquad (n)$$

După efectuarea calculelor se obţine :

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left(\rho_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right)^4 \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=n} (I_{ia} - I_{ib}) \ [\text{mm}^3] ; \\ I_y &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left(\rho_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right)^4 \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=r} (I_{ia} + I_{ib}) \ [\text{mm}^4], \end{aligned}\right\} \qquad (o)$$

unde :

$$\varphi_{i+1} = 2\pi ; \quad \rho_i = [R + (i-1) B] \Big|_{i=1}^{i=n} ;$$

$$I_{ia} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left(\rho_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right)^4 d\varphi = \frac{\pi}{5Bn} \left(\rho_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right) \Big|_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} ;$$

$$I_{ib} = \mp \int_{\varphi}^{\varphi_{i+1}} \left(\rho_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right)^4 \cos 2\varphi \, d\varphi = \mp \frac{1}{4} \left| \left(\varphi_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right)^4 \sin 2\varphi - \right.$$

$$- \frac{Bn}{2\pi} \left\{ \left(\rho_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right)^3 \cos 2\varphi + \frac{3Bn}{2\pi} \left[\left(\rho_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right)^2 \sin 2\varphi - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{Bn}{2\pi} \left[\left(\rho_i - \varphi \frac{Bn}{2\pi} \right) \cos 2\varphi + \frac{Bn}{2\pi} \sin 2\varphi \right] \right] \right\} \Big\|_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} .$$

Momentele de inerţie axiale centrale I_{xG} şi I_{yG} se obţin cu relaţiile lui Steiner, respectiv :

$$I_{xG} = I_x - y_G^2 A ; \quad I_{yG} = I_y - x_G^2 A .$$

Momentul de inerţie centrifugal I_{xy} este dat de relaţia :

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA = \int_A \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\rho . \qquad (p)$$

Pentru frezele cu $n = 1$ dinte relaţia (*p*) devine :

$$I_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \, d\varphi \int_0^{R - \frac{B\varphi}{2\pi}} \rho^2 d\rho ,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru frezele cu $n = 2$ dinți

$$I_{zy} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2\varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_{1\varphi}} \rho^2 \, d\rho + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin 2\varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_{2\varphi}} \rho^2 d\rho.$$

Pentru frezele cu $n \geqslant 3$ dinți momentul de inerție centrifugal este nul. Față de axele centrale, în cazul frezei cu un singur dinte

$$I_{zGyG} = I_{zy} - z_G y_G A.$$

Direcțiile principale de inerție α_1 și α_2, pentru frezele cu 1 și 2 dinți sînt date de relațiile (2.38) iar momentele de inerție principale I_1 și I_2 de relațiile (2.37).

În tabelul 2.34 sînt prezentate expresiile caracteristicilor geometrice — A, x_G, y_G, S_x, S_y, I_x, I_y, I_{xG}, I_{yG}, I_1, I_2, α_1, x_{1max} și y_{1max} — pentru secțiunile frezelor cu 1, 2, 3, 4, 6 și 8 dinți, calculate în funcție de diametrul $D = 2R$, cu relațiile prezentate mai sus.

Tabelul 2.34

Mărimea	UM	Freză cu 1 dinte	Freză cu 2 dinți	Freză cu 3 dinți	Freză cu 4 dinți	Freză cu 6 dinți	Freză cu 8 dinți
$2B/D$	—	1,000	0,762	0,634	0,547	0,434	0,363
A	mm²	0,2620 D^2	0,3390 D^2	0,3930 D^2	0,4330 D^2	0,4840 D^2	0,5390 D_2
S_x	mm³	0,03150 D^3	0	0	0	0	0
S_y	mm³	0,01990 D^3	0	0	0	0	0
x_G	mm	0,07590 D	0	0	0	0	0
y_G	mm	0,1204 D	0	0	0	0	0
I_x	mm⁴	0,0087 D^4	0,0094 D^4	0,0195 D^4	0,0175 D^4	0,0139 D^4	0,0242 D^4
I_y	mm⁴	0,0109 D^4	0,0163 D^4	0,0113 D^4	0,0175 D^4	0,0273 D^4	0,0242 D^4
I_{xG}	mm⁴	0,0049 D^4	0,0094 D^4	0,0195 D^4	0,0175 D^4	0,0273 D^4	0,0242 D^4
I_{yG}	mm⁴	0,0095 D^4	0,0163 D^4	0,0113 D^4	0,0175 D^4	0,0273 D^4	0,0242 D^4
I_{xy}	mm⁴	0,0036 D^4	0,0074 D^4	0	0	0	0
I_{xGyG}	mm⁴	0,0012 D^4	0,0074 D^4	0	0	0	0
α_1	—	13°47′	32°27′	0°	0°	0°	0°
I_1	mm⁴	0,0046 D^4	0,0026 D^4	0,0194 D^4	0,0175 D^4	0,0139 D^4	0,0242 D^4
I_2	mm⁴	0,0098 D^4	0,0230 D^4	0,0114 D^4	0,0175 D^4	0,0273 D^4	0,0242 D^4
$x_{1\,max}$	mm	0,3870 D	0,4480 D	0,5000 D	0,5000 D	0,5000 D	0,5000 D
$y_{1\,max}$	mm	0,2650 D	0,2680 D	0,4330 D	0,5000 D	0,4370 D	0,5000 D
$W_x = I_x/y_{1\,max}$	mm³	0,0174 D^3	0,0099 D^3	0,0436 D^3	0,0350 D^3	0,0319 D^3	0,0484 D^3
$W_y = I_y/x_{1\,max}$	mm³	0,0254 D^3	0,0514 D^3	0,0226 D^3	0,0350 D^3	0,0546 D^3	0,0484 D^3

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

ECHILIBRUL SISTEMELOR MECANICE UTILIZATE ÎN ECONOMIA FORESTIERĂ

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

3.1. GRADELE DE MOBILITATE ALE CORPULUI RIGID

Parametrii geometrici independenți cu ajutorul cărora se definește poziția unui corp rigid reprezintă gradele de libertate ale corpului considerat (punct material, solid rigid).

Un punct material sau un solid rigid, se spune că este liber, dacă sub acțiunea unui sistem (spațial/plan) de forțe, poate ocupa orice poziție în (spațiu/plan). Dat fiind faptul că poziția punctului material liber în spațiu se definește cu ajutorul a trei parametri independenți, punctul material liber în spațiu are trei grade de libertate. Cei trei parametri geometrici pot fi de exemplu coordonatele carteziene (x, y, z) ale punctelor A (fig. 3. *a*), coordonatele sferice (φ, ρ, θ) ale punctului A (fig. 3, *b*), sau coordonatele cilindrice ale punctului A (θ, ρ, z) (fig. 3. *c*).

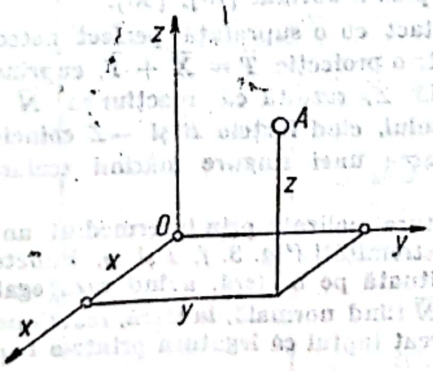


Fig. 3.a

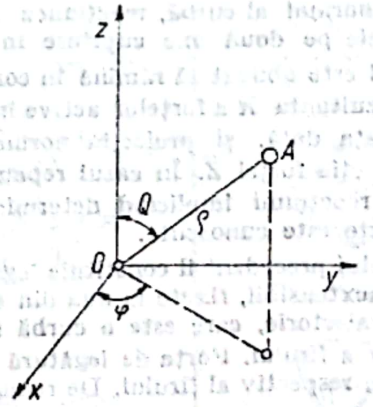


Fig. 3.b

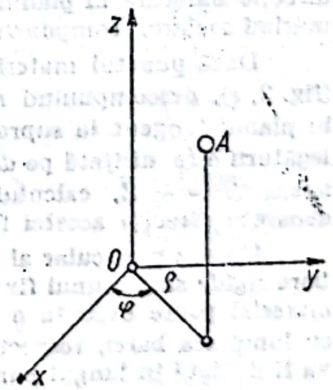


Fig. 3.c

3.2. LEGĂTURILE MECANICE ALE PUNCTULUI MATERIAL

În foarte multe probleme tehnice apare cazul unor forțe, care să acționeze asupra unor corpuri de dimensiuni neglijabile, ale căror deplasări sînt împiedicate de prezența altor corpuri. Obstacolele, care împiedică libertatea de mișcare a unui corp, sînt denumite legături (constrîngeri). Prezența legăturilor determină apariția — în virtutea principiului interacțiunii — a unor forțe, denumite *reacțiuni* sau *forțe de legătură*.

Să considerăm, de exemplu, un punct material A, asupra căruia acționează un sistem de forțe concurente avînd rezultanta $\bar{R}$ (fig. 3, *d*), obligat să rămînă în contact cu o curbă perfect netedă (ideală), C de secțiune neglijabilă în raport cu lungimea. Forța rezultantă $\bar{R}$ poate fi descompusă într-o componentă normală $\bar{F}_n$ și una tangențială $\bar{F}_t$. Conform principiului independenței acțiunii forțelor, componenta $\bar{F}_t$ va imprima punctului o accelerație în direcția tangentei la curbă, schimbării de viteză neopunîndu-i-se nici o rezistență, curba fiind presupusă

perfect netedă. Admiţînd că $\bar{F}_t = 0$, adică $\bar{R}$ coincide cu $\bar{N}$, această forţă îşi pierde efectul prin condiţia impusă de a nu părăsi curba. Rezultă că forţei $\bar{F}_n$ i se opune reacţiunea normală $\bar{N}$ a legăturii existente. Conform principiului interacţiunii, forţa $\bar{N}$ este egală şi de sens contrar cu acţiunea punctului material asupra legăturii.

În cazul cînd punctul material nu poate părăsi curba în nici unul din sensurile normalei, legătura se numeşte *bilaterală*. Dacă punctul poate părăsi curba într-un singur sens al normalei, legătura se numeşte *unilaterală*, iar sensul reacţiunii coincide, în mod logic, cu sensul mişcării posibile.

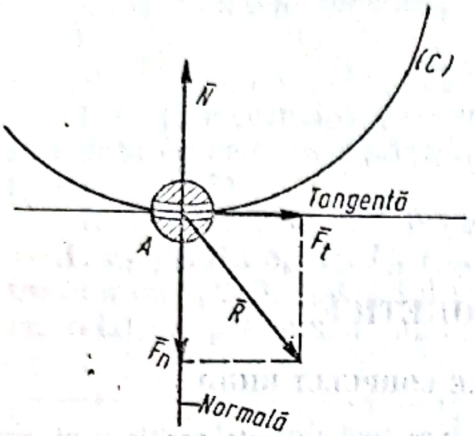


Fig. 3.d

Condiţia de repaus a punctului material pe curba C se exprimă prin ecuaţia vectorială:

$$\bar{R} + \bar{N} = 0, \qquad (3.1)$$

care reprezintă de fapt, condiţia de echilibru al punctului material pe o curbă netedă.

Punctul material A supus acţiunii forţei rezultante $\bar{R}$ este menţinut în repaus pe curba C, dacă $\bar{R}$ are direcţia normală la curbă; acest fenomen este exprimat matematic prin condiţia (3.1), care pune în evidenţă operaţia de suprimare a legăturii şi înlocuirea acesteia cu o forţă de legătură (reacţiunea din legătura punctului). Se ajunge astfel la axioma legăturilor, care arată că orice legătură geometrică poate fi înlocuită cu o forţă denumită forţă de legătură (reacţiune). Punctul material eliberat de legături, acţionat de forţe date şi de reacţiune este echivalent, din punct de vedere mecanic, cu punctul material supus la legături.

În problemele de mecanică, reacţiunea $\bar{N}$ constituie, de regulă, una din mărimile necunoscute, calculul elementelor sale implicînd determinarea unei singure mărimi scalare, atunci cînd se cunoaşte direcţia vectorului $\bar{N}$ în planul normal la curbă. Dacă reacţiunea are o direcţie oarecare în planul normal al curbă, reacţiunea $\bar{N}$ se determină cu ajutorul a două mărimi scalare, componentele pe două axe cuprinse în planul normal [15], [60].

Dacă punctul material este obligat să rămînă în contact cu o suprafaţă perfect netedă (fig. 3, *e*), descompunînd rezultanta $\bar{R}$ a forţelor active într-o proiecţie $\bar{T} = \bar{X} + \bar{Y}$, cuprinsă în planul tangent la suprafaţa dată, şi proiecţia normală $\bar{Z}$, rezultă că reacţiunea $\bar{N}$ a legăturii este dirijată pe direcţia forţei $\bar{Z}$. În cazul repausului, cînd forţele $\bar{R}$ şi $-\bar{Z}$ coincid, avem $\bar{N} = -\bar{Z}$, calculul reacţiunii implicînd determinarea unei singure mărimi scalare, deoarece direcţia acestei forţe este cunoscută.

Un caz particular al celui precedent îl constituie legătura realizată prin intermediul unei bare rigide sau al unui fir inextensibil, fixate la una din extremităţi (fig. 3. *f*, *1* şi *2*). Punctul material poate executa o traiectorie, care este o curbă situată pe o sferă, avînd raza egală cu lungimea barei, respectiv a firului. Forţa de legătură $\bar{N}$ fiind normală, la sferă, reacţiunea va fi dirijată în lungul barei, respectiv al firului. De remarcat faptul că legătura printr-o bară

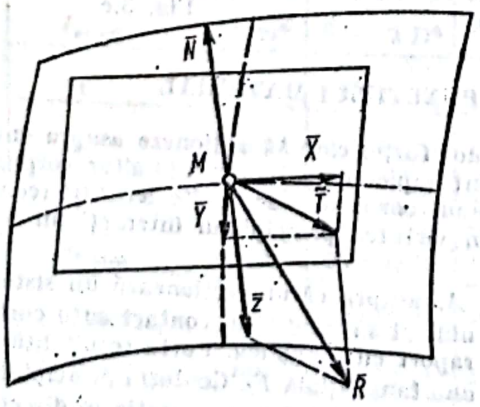


Fig. 3.e

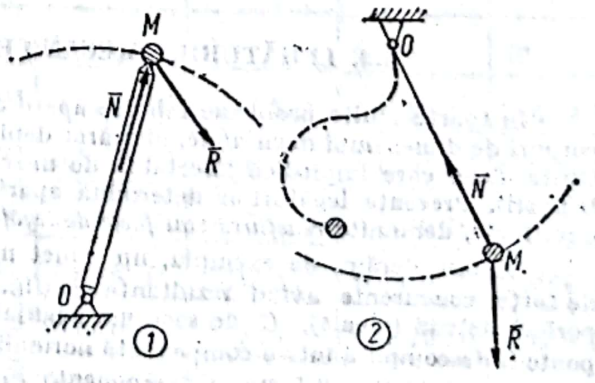
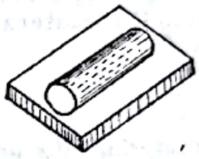
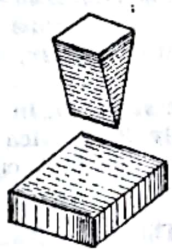
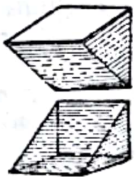
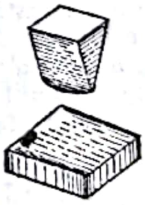
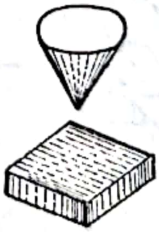
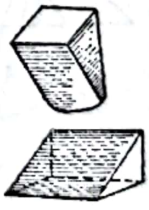


Fig. 3.f

Tabelul 3.a.

Clasificarea legăturilor în grupe după forma geometrică a zonei de contact

Grupa	Zona de contact	Elementele componente	Figura
I	Suprafață (varietate bidimensională)	Suprafață - suprafață (fig. a și b)	a. b.
II	Curbă (varietate unidimensională)	Suprafață - suprafață (fig. c)	 c.
		Suprafață curbă (fig. d.)	
		Curbă - curbă (fig. e)	 d. e.
III	Punct (varietate dimensională zero)	Suprafață - suprafață (fig. f)	f.
		Suprafață - curbă (fig. g)	 g.
		Suprafață - punct (fig. h)	 h.
		Curbă - curbă fig. i	 i.
		Curbă - punct (fig. j)	j.
		Punct - punct (fig. k)	k.

Scanned with OKEN Scanner

rigidă este bilaterală, iar cea realizată prin intermediul unui fir este unilaterală, deoarece punctul material poate părăsi suprafața sferică spre interiorul acesteia, legătura pierzîndu-și astfel caracterul ei activ.

Din cele prezentate mai sus, se poate da o definiție mai largă noțiunii de legătură mecanică și anume : legătura este o condiție geometrică (impusă), care restrînge libertatea de mișcare a unui punct sau sistem de puncte materiale ; condiția poate fi exprimată matematic printr-o relație finită sau diferențială.

Pe baza acestei definiții, expresia matematică a celei mai generale legături aplicate unui punct material, este o relație de forma :

$$f(x\,;\,y\,;\,z\,;\,\dot{x}\,;\,\dot{y}\,;\,\dot{z}\,;\,t) \leqslant 0 \tag{3.2}$$

între coordonatele punctului x, y și z, derivatele acestora în raport cu timpul și timpul t. De remarcat faptul că în mod practic, este imposibil de a realiza legătura definită de relația (3.2), legăturile reale utilizate frecvent în practica inginerească neconținînd toți acești parametri. Mai des se întîlnește legătura bilaterală (olonomă-scleronomă), [60] :

$$f(x,\,y,\,z) = 0, \tag{3.3}$$

care poate fi materializată printr-o suprafață fixă oarecare.

După un alt criteriu ce vizează proprietățile fizice, legăturile mecanice se pot clasifica în :

— legături *lucii* sau *ideale*, la care rezistențele datorite frecării sînt foarte mici sau convențional neglijate ;

— legături *aspre* sau cu *frecare*, care sînt de altfel, legăturile reale, întîlnite în mecanica aplicată.

Legăturile mecanice se obțin, în mod practic, obligînd suprafețele exterioare să aibă în comun o anumită varietate geometrică a zonei de contact. Clasificarea legăturilor în grupe după forma geometrică a zonei de contact, cu unele exemplificări sînt redate în tabelul 3, *a*.

3.3. LEGĂTURILE MECANICE ALE CORPURILOR MATERIALE

Ca și în cazul punctului material corpurile rigide, ale căror grade de mobilitate sînt îngrădite de către anumite legături, pot rămîne în repaus, chiar dacă forțele active, care tind să-i modifice această stare nu se echilibrează. Rezultă, prin urmare, că sistemul de forțe active este echilibrat de către reacțiunile asociate cu legăturile existente. Orice legătură, impusă unui corp, anulează unele din gradele de libertate ale acestuia. După numărul gradelor de libertate suprimate unui solid rigid legăturile (care mai sînt denumite cuple cinematice) se împart în șase clase. Astfel, o bilă rigidă așezată între două plane paralele (fig. 3, *g*, *l*) are numai cinci

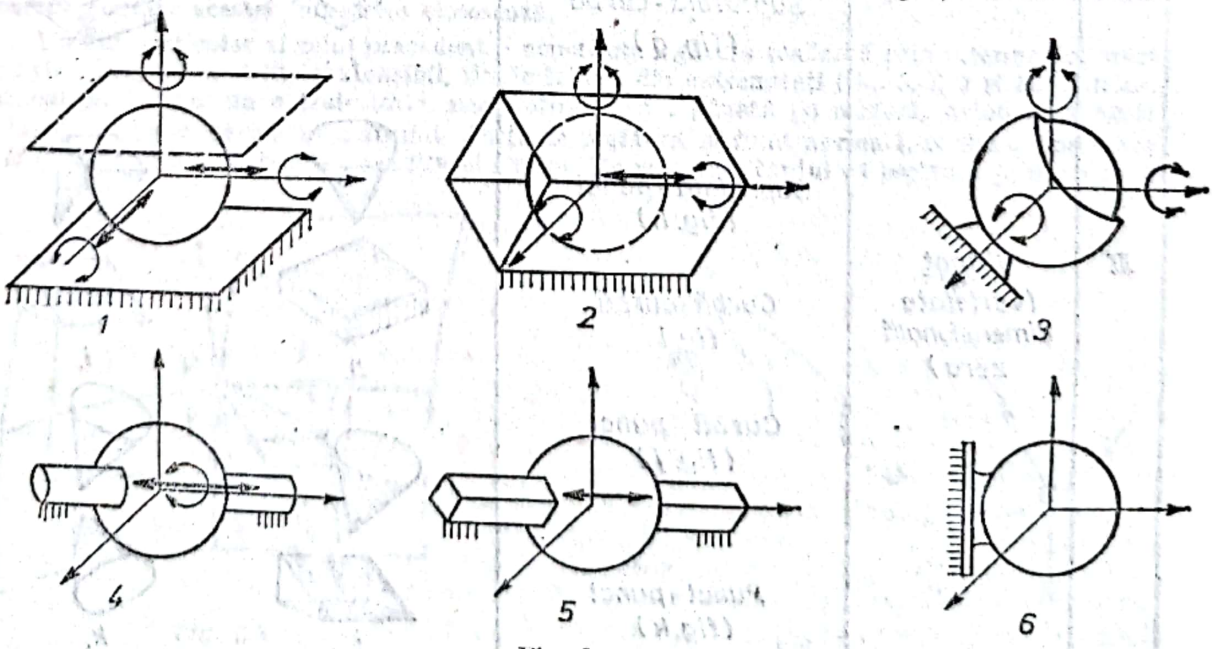


Fig. 3.g

grade de libertate deci posedă o cuplă cinematică de clasa I, ghidată într-un jgheab (fig. 3, *g*, *2*) are patru grade de libertate (cuplă de clasa a II-a), îmbrăcată într-o cămașă sferică (fig. 3, *g*. *3*) are trei grade de libertate (cuplă de clasa a III-a), ghidată pe o bară cilindrică (fig. 3, *g*, *4*) are două grade de libertate (cupla de clasa a IV-a), ghidată pe o bară prismatică (fig. 3, *g*, 5), mai posedă un singur grad de mobilitate (cuplă de clasa V-a), iar cea sudată pe suprafața fixă (fig. 3, *g*, *6*) nu mai dispune de nici un grad de mobilitate (cuplă de clasa a VI-a).

Mișcările simple posibile, egale cu numărul gradelor de mobilitate rămase, pentru cazurile prezentate mai sus, sînt indicate în figura 3, *g* prin săgeți.

După rolul lor funcțional, legăturile mecanice ale corpurilor solide, cele mai frecvent utilizate în practică sînt : reazemul simplu (mobil), articulația (sferică sau cilindrică), încastrarea (sau înțepenirea) și legătura cu fir sau bară.

Reazemul simplu (*mobil*). Este legătura care constrînge solidul C_1 să rămînă cu un punct al său M, (fig. 3, *h*) pe o suprafață (Σ) perfect netedă, a altui corp rigid C_2.

Poziția unui solid rigid care are un reazem simplu se definește cu ajutorul a cinci parametri independenți : coordonatele curbilinii (u, v) ale punctului de reazem M și unghiurile lui Euler (ψ, φ, θ). Rezultă, deci, că un reazem simplu are cinci grade de libertate, cu alte cuvinte, reazemul blochează un grad de libertate al corpului reazemat. Acest grad de libertate reprezintă deplasarea rigidului pe direcția normalei (ν) la planul tangent comun celor două suprafețe în contact. Se ajunge astfel la concluzia că, din punct de vedere mecanic, un reazem simplu poate fi înlocuit cu o forță de legătură avînd direcția normală la planul tangent comun celor două suprafețe în contact.

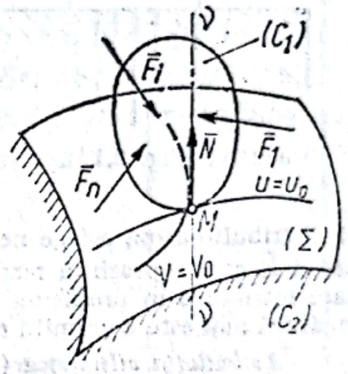


Fig. 3.h

Observații. Dacă în punctul de reazem A (fig. 3, *i*) numai una dintre suprafețe în contact are un plan tangent bine determinat, atunci suportul reacțiunii va avea direcția normalei (ν — ν) la această suprafață, iar forțele de legătură $\bar{N}$ și $-\bar{N}$ vor acționa pe C_1 și pe corpul C mărginit de suprafața (Σ), care are în A un punct singular.

Dacă în punctul de contact ambele suprafețe în contact au cîte un plan tangent determinat, cele două plane necoincizînd, suportul reacțiunii normale este nedeterminat. În practică această nedeterminare se ridică prin constituirea profilelor *1* și *2* (fig. 3. *j*), care admit în toate punctele de contact A, cîte o normală comună (ν — ν).

În cazul în care corpul posedă mai multe reazeme simple, se va înlocui fiecare reazem simplu cu cîte o reacțiune normală în punctul considerat pe suprafața de reazem. În practica inginerească se întîlnește adesea reazemul dublu, care ia naștere datorită jocului din ghidajul unei tije (fig. 3. *k*).

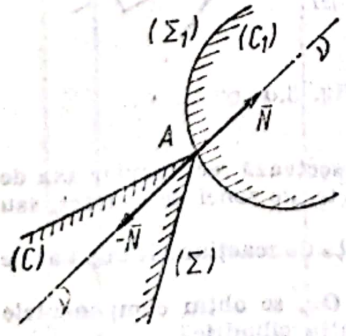


Fig. 3.i

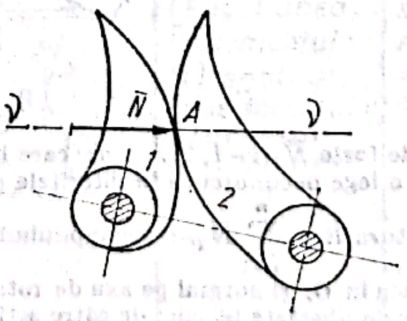


Fig. 3.j

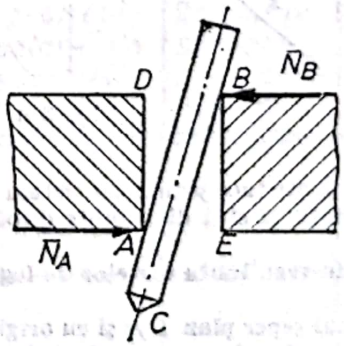


Fig. 3.k

În fine, dacă rigidul are o mulțime de puncte de reazem, sprijinirea avînd loc pe o suprafață (fig. 3. *l*), ia naștere un sistem de forțe elementare de reacțiune repartizate în toate punctele suprafeței de reazem, orientate normal pe această suprafață a căror rezultantă N reprezintă reacțiunea din reazem. Schematic, un reazem simplu se prezintă ca în figura 3 *m*, *1*, *2*, și *3*.

Articulația. Este legătura care constrînge corpul să rămînă, cu un punct al său, în contact permanent cu un punct fix din spațiu. Articulația (reazemul fix) sferică este o cuplă cinematică de clasa a III-a care se aplică unui corp atunci cînd dorim să suprimăm acestuia, trei grade

de libertate, lăsînd posibile numai rotaţiile corpului în raport cu trei axe rectangulare, trecînd prin centrul cuplei (fig. 3, *n*).

Înlocuirea mecanic-echivalentă a acestui tip de legături se poate face printr-un sistem de forţe $\bar{N}_i$ ($i = 1\ 2, \ldots, n$) concurente într-un punct (centrul suprafeţei sferice de sprijin)

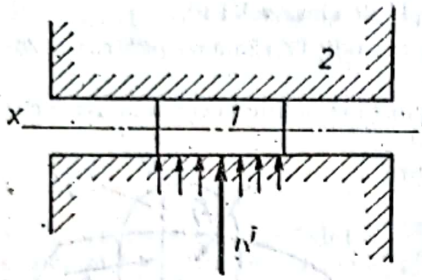


Fig. 3.l

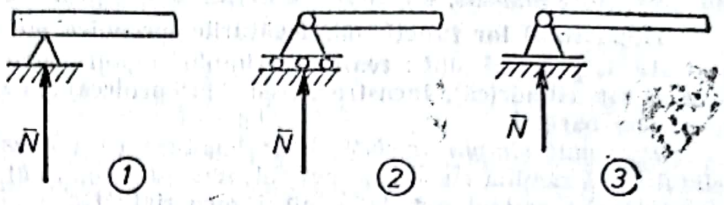


Fig. 3.m

şi distribuite după o lege necunoscută în fiecare punct al zonei de contact, sau printr-o forţă unică $\bar{R}$ care reprezintă rezultanta tuturor forţelor de legătură, al cărui suport trece prin 0 şi care introduce în problemă trei necunoscute scalare X, Y şi Z, motiv pentru care această legătură mai este denumită reazem triplu.

Articulaţia cilindrică (reazemul dublu) este o cuplă cinematică de clasa a IV-a, care se aplică unui corp atunci cînd dorim ca acesta să aibă numai două grade de libertate: rotaţia şi translaţia în raport cu aceiaşi axă (fig. 3, *o*). Înlocuirea mecanic-echivalentă a acestei legături

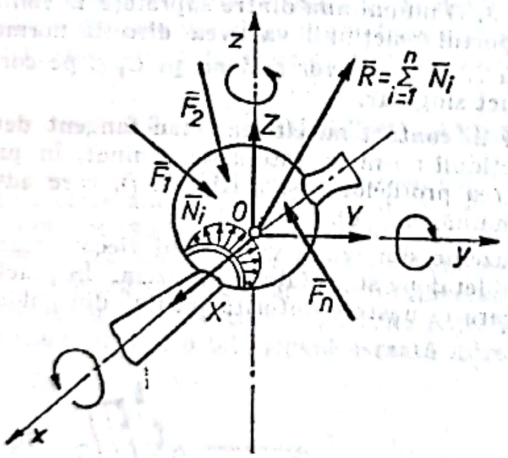


Fig. 3.n

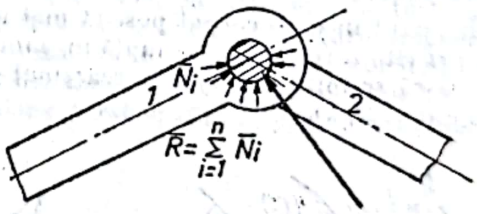


Fig. 3.o

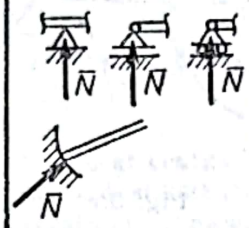
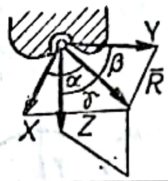
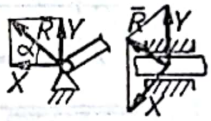
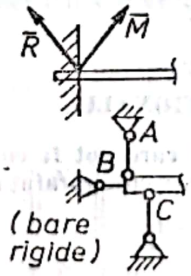
se poate face printr-un sistem de forţe $\bar{N}_i (i=1, 2, \ldots, n)$, care intersectează rectangular axa de rotaţie şi sînt distribuite după o lege necunoscută în diferitele puncte ale zonei de contact, sau prin rezultanta forţelor de legătură $\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i$. Descompunînd forţa de reacţiune $\bar{R}$ după axele unui reper plan Oyz şi cu originea în O, şi normal pe axa de rotaţie Ox, se obţin componentele Y şi Z care corespund gradelor de libertate blocate de către articulaţia cilindrică.

Articulaţia sferică, respectiv articulaţia cilindrică, se reprezintă ca în figura 3, *p*, *1* şi *2*.

Încastrarea. Este legătura care suprimă corpului toate gradele de libertate (fig. 3, *r*); prin urmare solidul rigid încastrat este imobil. Dacă asupra solidului rigid acţionează un sistem de forţe oarecare $\bar{F}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ în zonele de contact dintre corpuri se dezvoltă, distribuţii de reacţiuni elementare, care se reduc în punctul teoretic de încastrare O, la un torsor al reacţiunilor încastrării, format dintr-o reacţiune rezultantă $\bar{R}$ şi un moment rezultant al reacţiunilor elementare $\bar{M}_0$. Descompunînd vectorii $\bar{R}$ şi $\bar{M}_0$ după axele reperului cartezian cu originea în O, se obţin componentele (X, Y, Z) ale lui $\bar{R}$ şi (M_x, M_y, M_z) ale lui $\bar{M}_0$. Prin urmare, o încastrare introduce într-o problemă de mecanică şase necunoscute scalare.

Tabelul 3.b

Tablou recapitulativ privind legăturile simple

Nr.	Denumirea legaturii		Simbol	Reacțiuni	Necunoscute	
					în spațiu	în plan
1	Rezemare			Reacțiunea este normală la suprafața de rezemare ($\bar{N}$)	1 (mărimea reacțiunii normale)	1 (mărimea reacțiunii normale)
2	Articulația	sferică		Reacțiunea trece prin punctul fix dar are direcția necunoscută ($\bar{R}$)	3 (proiecții scalare ale reacțiunii)	2 (proiecții scalare ale reacțiunii)
		cilindrică		Reacțiunea este perpendiculară pe axa de rotație ($\bar{R}$)	2 (proiecții scalare ale reacțiunii)	2 (proiecții scalare ale reacțiunii)
3	Incastrare			Incastrarea răspunde cu un torsor: $\mathcal{T}_R$ (Reacțiunea: $\bar{R}$ Momentul: $\bar{M}$) egal și opus torsorului forțelor exterioare	6 (3 proiecții scalare ale reacțiunii și 3 ale momentului)	3 2 proiecții scalare ale reactiunii și 1 a momentului
4	Legătura cu fir			Efortul din fir	1 (mărimea efortului)	1 (mărimea efortului)

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care sistemul de forțe este obținut în același plan, spre exemplu planul xOy, încastrarea introduce într-o problemă de mecanică trei necunoscute scalare : componentele X, Y ale reacțiunii $\bar{R}$ și componenta momentului rezultant $\bar{M}_0$ al reacțiunilor elementare $M_z = M_0$

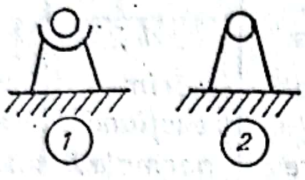


Fig. 3.p

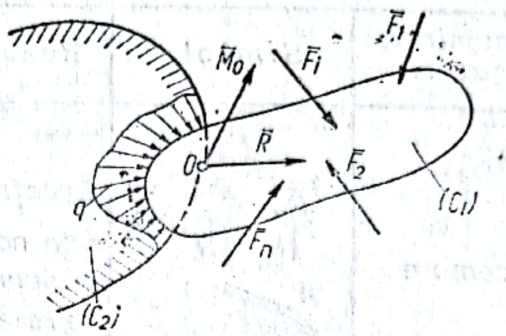


Fig. 3.r

În figura 3, *s*, *1* se arată modul de reprezentare a încastrării, în cazul unui sistem de forțe oarecari, iar în figura 3, *s*, *2* — modul de reprezentare a încastrării în cazul unui sistem de forțe coplanare.

În tabelul 3, *b* sînt reprezentate sintetic, legăturile simple ale unui corp solid.

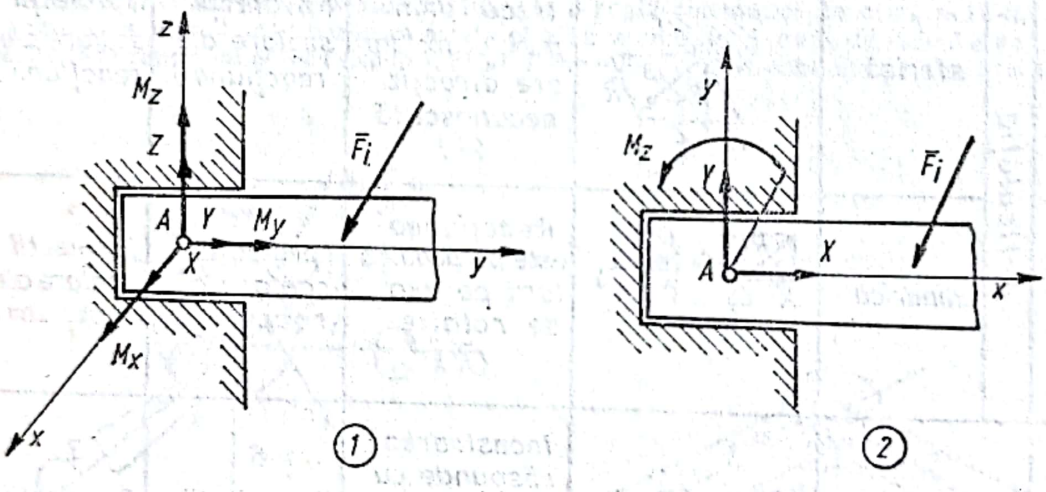


Fig. 3.s

3.4. EFORTURI SECȚIONALE

Orice corp rigid poate fi secționat în două părți care pot fi considerate solide rigide C_1 și C_2, avînd zonele de contact A (fig. 3, *t*, *1*) identice cu suprafața secțiunii efectuate prin

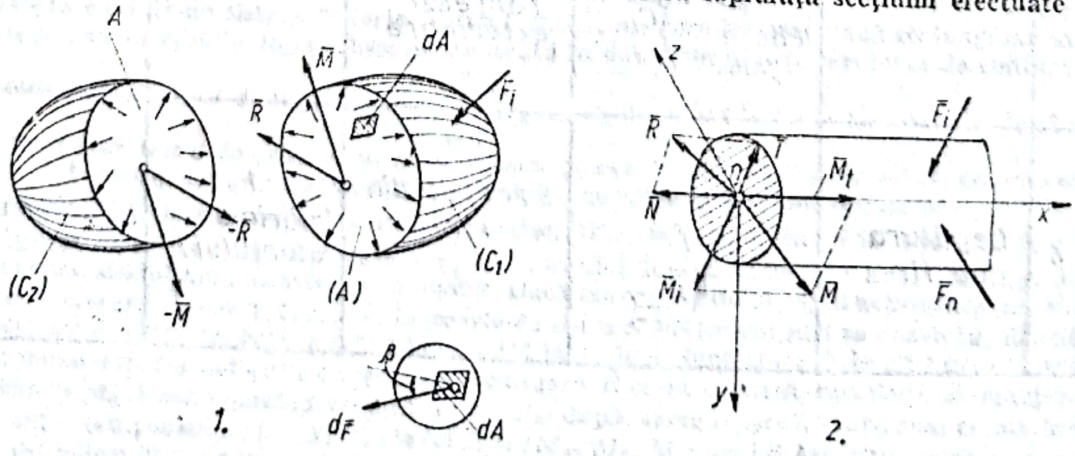


Fig. 3.t

corp. În zonele de contact dintre cele două părți C_1 și C_2 se dezvoltă distribuții de reacțiuni elementare

$$d\bar{F} = \bar{p} \cdot dA, \tag{3.4}$$

unde $\bar{p}$ este solicitarea continuă pe suprafața de separație A, iar dA este un element de arie. Forța $d\bar{F}$ care revine elementului dA, are o direcție oarecare. Torsorul sistemului de vectori elementari $d\bar{F}$ într-un punct O al suprafeței de separație este format din forța rezultantă $\bar{R}$ și momentul rezultant $\bar{M}_0$, numite interioare, având expresiile:

$$\bar{R} = \int_{(A)} \bar{p}\, dA \text{ și } \bar{M}_0 = \int_{(A)} (\bar{r} \times \bar{p})\, dA, \tag{3.5}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție al centrului ariei elementare dA în raport cu punctul O.

Într-o secțiune oarecare a unei bare (fig. 3, *t*, 2) torsorul de reducere este format din forța rezultantă $\bar{R}$ și momentul rezultant $\bar{M}$, care se descompun în patru componente, denumite eforturi, constînd din două forțe și două momente. Astfel, componenta $\bar{N}$ a forței rezultante este denumită *forță axială* iar cealaltă componentă a forței rezultante R, cuprinsă în planul secțiunii, $\bar{T}$, poartă denumirea de *forță tăietoare*. Componenta $\bar{M}_x = \bar{M}_t$ a momentului rezultant, perpendiculară pe planul secțiunii este denumită *moment de torsiune* (sau de răsucire), iar componenta $\bar{M}_i$ a momentului $\bar{M}$, conținută în planul secțiunii — moment de încovoiere.

Vom numi vector — efort într-o secțiune oarecare a unei bare, vectorul a cărui expresie matricială are următorul aspect:

$$\|E\| = \begin{Vmatrix} N_x \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Sigma X_i \\ \Sigma Y_i \\ \Sigma Z_i \\ \Sigma M_{ix} \\ \Sigma M_{iy} \\ \Sigma M_{iz} \end{Vmatrix}. \tag{3.6}$$

De asemenea, vom numi *matrice de transfer* sau transport, matricea care permite trecerea într-o secțiune vecină a caracteristicilor statice cunoscute deja în secțiunea dată a unei bare. Pentru o bară *ij*, de lungime *l* situată în sistemul *xyz*, vectorul efort din secțiunea *j* se poate exprima ca funcție de vectorul din secțiunea *i* prin relația:

$$\|E^j\| = \|T\| \cdot \|E^i\|,$$

sau detaliat:

$$\|E^j\| = \begin{Vmatrix} N_x \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_z & -l_y & -1 & 0 & 0 \\ l_z & 0 & -l_z & 0 & -1 & 0 \\ -l_y & l_x & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} N_x \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Vmatrix}. \tag{3.7}$$

În egalitatea (3.7), au intervenit elementele:

$$l_x = (xl) \cdot l\,;\; l_y = (yl) \cdot l\,;\; l_z = (zl) \cdot l, \tag{3.8}$$

în care: (xl), (yl), (zl) sînt cosinușii unghiurilor dintre axele x, y și z și direcția barei. Matricea $\|T\|$ are rolul de a transforma (a transfera, a lega) efortul din secțiunea *i* în efortul aferent din secțiunea *j*, motiv pentru care poartă denumirea de matrice de transfer a eforturilor.

Scanned with OKEN Scanner

Prezența componentei axiale a reacțiunii $\bar{N}$ în secțiunea barei, indică solicitarea de tracțiune sau compresiune (sensul din figura 3, *v*, *b* indică tracțiunea și sensul contrar- compresiunea). Prezența în secțiunea transversală a forței tăietoare $\bar{T}$ indică solicitarea de forfecare. Momentul $\bar{M}_i$ (momentul încovoietor) indică solicitarea de încovoiere, iar componenta $\bar{M}_t$ pe direcția axială indică solicitarea de torsiune.

În cazul forțelor coplanare, s-a adoptat o convenție de semne privind definirea eforturilor de secțiune, care permite și reprezentarea lor grafică.

Diagramele de eforturi reprezintă imaginea variației eforturilor de secțiune în lungul barei.

Dacă grinda este încărcată cu o sarcină uniform distribuită ca în figura 3, *u*, *1*, *p* [daN/m], există următoarele relații diferențiale :

$$-p = \frac{dT}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \tag{3.9}$$

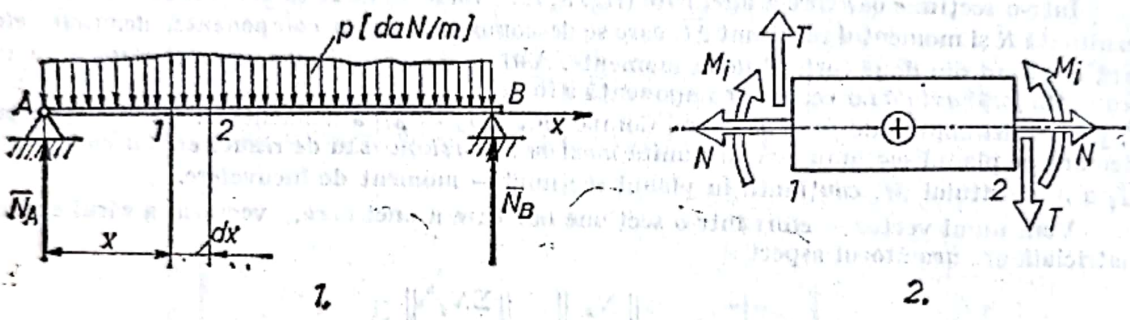


Fig. 3.u

Convenția de semne în definirea acestor eforturi unitare este redată în figura 3, *u*, *2*. Semnele pozitive ale eforturilor din secțiunea *1* corespund sensului de reducere a forțelor din stînga secțiunii *1*, adică de la stînga la dreapta, iar semnele pozitive din secțiunea *2* corespund sensului de reducere a forțelor din dreapta secțiunii *2*, adică de la dreapta spre stînga.

Prin urmare :

— forța axială N este egală cu suma proiecțiilor pe axa longitudinală a barei, a tuturor forțelor situate la stînga sau la dreapta secțiunii considerate :

$$N = \sum_1 X = -\sum_2 X; \tag{3.10}$$

— forța tăietoare T este egală cu suma proiecțiilor pe direcția normală la axa barei, a tuturor forțelor situate la stînga sau la dreapta secțiunii considerate :

$$T = \sum_1 Y = -\sum_2 Y; \tag{3.11}$$

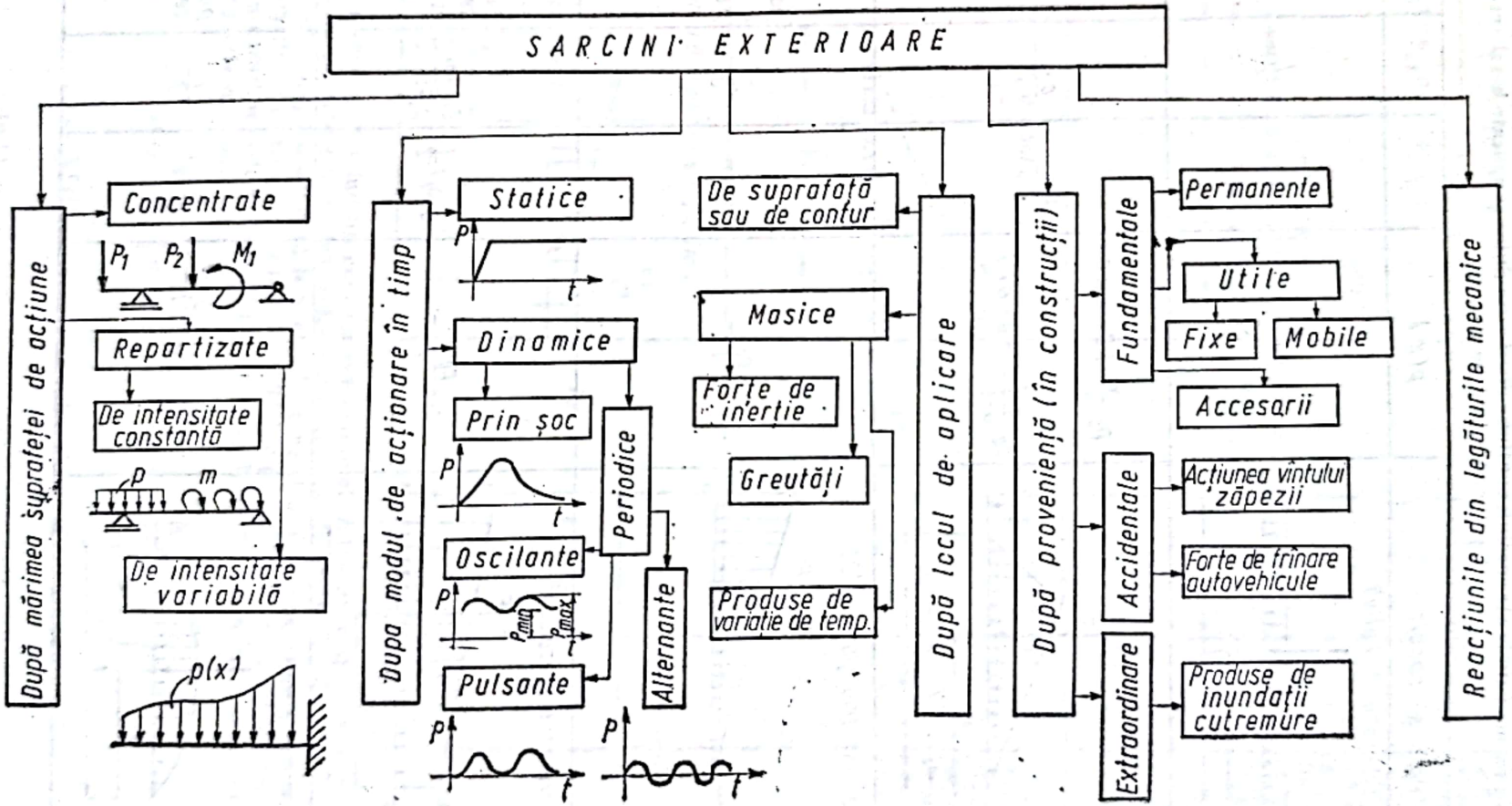
— momentul încovoietor M_i este egal cu suma momentelor în raport cu axa normală la axa barei, a tuturor forțelor situate la stînga sau la dreapta secțiunii considerate :

$$M_i = \sum_1 M_z = -\sum_2 M_z. \tag{3.12}$$

3.5. SCHEMATIZAREA SARCINILOR

Sarcinile constituie date ale problemei, în funcție de care se fac determinarea eforturilor și dimensionare. Evaluarea exactă a sarcinilor ce vor fi efectiv aplicate în decursul exploatării unei construcții este dificilă, atît datorită diversității lor, cît și modificării în timp. În calcul este deci necesar să se considere anumite măsuri aproximative pentru unele sarcini, stabilite

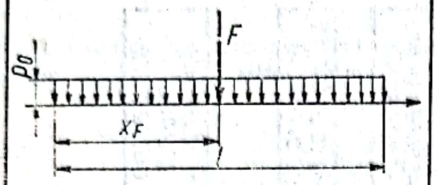
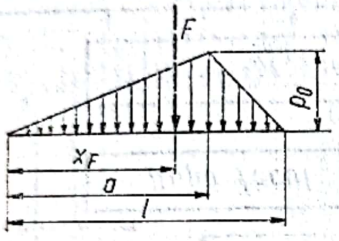
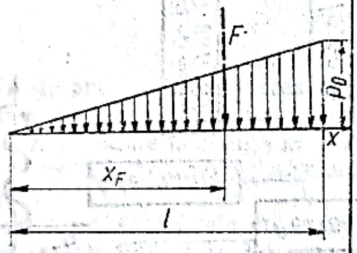
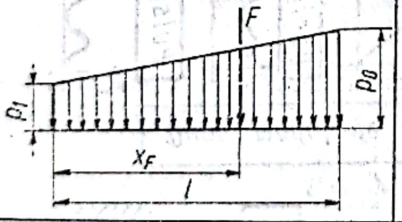
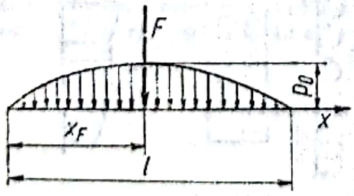
Tabelul 3.c



Scanned with OKEN Scanner

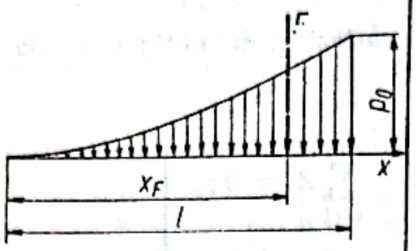
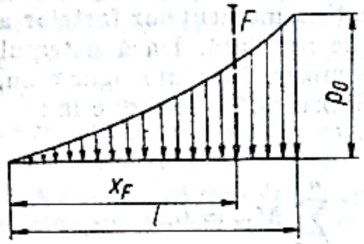
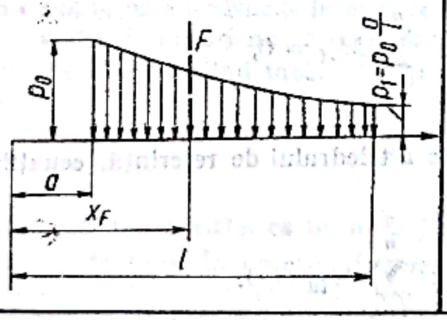
Tabelul 3.d

Cîteva cazuri uzuale ale sarcinii continue distribuite liniar și aplicate barei rectilinii perpendiculare pe axa sa

Nr crt	Bara și sarcina	$p(x)$	F	x_F	Observații
1	Sarcina distributivă 	p_0	$p_0 l$	$\frac{l}{2}$	
2	Sarcina triunghiulară (1) 	$p_0 \frac{x}{l}$ $(0 \leq x \leq a)$ $p_0 \frac{x-l}{a-l}$ $(a \leq x \leq l)$	$\frac{p_0 l}{2}$	$\frac{a+l}{3}$	
3	Sarcina triunghiulară (2) 	$\frac{p_0 x}{l}$	$\frac{p_0 l}{2}$	$\frac{2l}{3}$	Caz particular al nr. 2 pentru $a = l$
4	Sarcina trapezoidală 	$p_1 + \frac{p_0 - p_1}{l} x$	$(p_0+p_1)\frac{l}{2}$	$\frac{2p_0+p_1}{p_0+p_1}\cdot\frac{l}{3}$	Pentru $p_1 = 0$ se obține cazul nr. 3
5	Sarcina parabolică (1) 	$\frac{4p_0 x}{l} - \frac{4p_0 x^2}{l^2}$	$\frac{2}{3} p_0 l$	$\frac{l}{2}$	Curba de încărcare este o parabolă de gradul doi

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.d (continuare)

Nr. crt.	Bara și sarcina	$p(x)$	F	x_F	Observații
6	Sarcină parabolică (2) 	$\frac{p_0}{l}x^2$	$\frac{p_0 l}{3}$	$\frac{3l}{4}$	Curba de încărcare este o parabolă de gradul al doilea tangentă bazei în capătul din stînga
7	Sarcină parabolică (3) 	$\frac{p_0}{l^3}x^3$	$\frac{p_0 l}{4}$	$\frac{4l}{5}$	Curba de încărcare este o parabolă de gradul al treilea tangentă bazei în capătul din stînga
8	Sarcină hiperbolică parțială 	$p_0\frac{a}{x}$	$p_0 a \ln\frac{l}{a}$	$\frac{l-a}{\ln\frac{l}{a}}$	

pe bază de experiență și avînd un caracter convențional. Admiterea de sarcini convenționale are avantajul că permite schematizarea lor sub forme simple, de exemplu sarcini concentrate, sarcini distribuite după o anumită lege etc. În tabelul *3, c* este redată clasificarea sarcinilor întîlnite în practica inginerească, iar în tabelul 3, *d* se prezintă cîteva cazuri uzuale de sarcini.

În unele cazuri se scrie încărcarea grinzii cu ajutorul dezvoltării în serie Fourier de perioadă L (în funcție de modul de rezemare):

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{2n\pi\alpha}{L} + b_n \cos\frac{2n\pi\alpha}{L}\right). \qquad (3.13)$$

3.6. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU ALE SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI

Un solid rigid este în echilibru dacă sistemul de forțe care acționează asupra lui este în echilibru. Prin urmare, condiția necesară și suficientă pentru ca un solid rigid, supus la legături, să fie în echilibru este ca într-un punct arbitrar din spațiu, torsorul sistemului

Scanned with OKEN Scanner

de forțe care acționează asupra solidului (inclusiv reacțiunile din legăturile mecanice) să fie nul :

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0; \quad \bar{M} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = 0. \tag{3.14}$$

Proiectînd aceste expresii pe axele triedrului cartezian, se obțin ecuațiile de echilibru ale solidului rigid supus la legături :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0; \\ &\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Termenii X_i, Y_i și Z_i din ecuațiile (3.15) reprezintă proiecțiile pe axele sistemului de referință a forțelor active și din legăturile mecanice la care este supus solidul rigid. Termenii M_{ix}, M_{iy} și M_{iz} din ecuațiile (3.15) reprezintă proiecțiile momentelor forțelor active cît și a momentelor forțelor din legături, pe axele triedrului de referință. Dacă sistemul de forțe care acționează asupra solidului rigid supus la legături este cuprins într-un singur plan, de exemplu, planul Oxy al triedrului de referință, ecuațiile de echilibru (3.15) se reduc la :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \tag{3.16}$$

În cazul forțelor coplanare, rezultă :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{oi} = 0, \tag{3.17}$$

iar în cazul unui sistem de forțe paralele cu axa Oz a triedrului de referință, ecuațiile (3.15) se reduc la :

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0. \tag{3.18}$$

Observație. Dacă se notează cu m numărul ecuațiilor de echilibru ale solidului rigid., cu n numărul necunoscutelor ce apar în aceste ecuații și prin r rangul comun al matricei coeficienților necunoscutelor și al matricei sistemului de ecuații (matricea coeficienților lărgită prin coloana termenilor liberi), în funcție de cazurile :

$$n \geqslant r, \quad m \geqslant r,$$

se pot trage următoarele concluzii :

1) Dacă $n = r = m$, ecuațiile de echilibru au o soluție unică ; în acest caz rigidul se găsește în echilibru necondiționat.

2) Dacă $n - r < m$, se pot forma un număr de $p = m - r$ determinați caracteristici diferiți. Prin anularea acestor determinanți, se vor obține p relații suplimentare care conduc la determinarea unui număr p de parametri geometrici care condiționează poziția de echilibru a solidului rigid.

În acest caz, $n = r < m$, iar corpul se găsește în echilibru condiționat.

Scanned with OKEN Scanner

3) Dacă $n > r$, sistemul de ecuații de echilibru este nedeterminat, numărul necunoscutelor fiind mai mare decît numărul ecuațiilor principale. În acest caz solidul rigid este în echilibru static nedeterminat, iar numărul necunoscutelor arbitrare

$$q = n - r \tag{3.19}$$

se numește grad de nedeterminare statică. Pentru ridicarea nedeterminării se va face apel, în astfel de cazuri la metodele pe care ni le oferă disciplinele: Statica construcțiilor, Teoria elasticității, Rezistența materialelor etc.

3.7. ECHILIBRUL SISTEMELOR MECANICE

Mai multe corpuri legate între ele prin legături mecanice simple formează un sistem de corpuri. Sistemele de corpuri pot fi sisteme variabile și sisteme invariabile. În statică problema principală care se pune, la sistemele variabile de corpuri, este determinarea condiției de echilibru, iar cea secundară, determinarea reacțiunilor din legăturile exterioare, care leagă corpurile de spațiul fix și legăturile interioare, care leagă corpurile între ele. Sistemele invariabile de corpuri posedă suficiente legături mecanice care să le asigure starea de echilibru. Această stare poate fi static determinată sau static nedeterminată. La sistemele invariabile de corpuri, în statică, se urmărește determinarea reacțiilor din legăturile mecanice exterioare și interioare. Legăturile mecanice interioare pot fi, ca și cele exterioare, reazeme simple, articulații, legături cu fire sau bare rigide și încastrări. În acest sens, însăși o bară dreaptă simplă poate fi considerată ca un sistem de bare legate între ele prin încastrări.

Considerînd un sistem de corpuri ca în figura 3, *v*, *1*, în legăturile exterioare ale sistemului se dezvoltă reacțiunile $\bar{R}_A$ și $\bar{R}_C$. Înlăturînd corpul C_2, în articulația B trebuie să acționeze o forță $\bar{R}_{21}$, care reprezintă reacțiunea corpului C_2 asupra corpului C_1, pentru a se putea păstra starea inițială de echilibru a sistemului. În mod analog, corpul C_1 reprezintă un sprijin pentru corpul C_2 și dacă se înlătură trebuie înlocuit cu o forță $\bar{R}_{12}$. Corpurile C_1 și C_2 se află în interacțiune reprezentată prin forțele egale și de sens contrar din legătura interioară:

$$\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}. \tag{3.20}$$

Réacțiunile din legăturile interioare apar două cîte două, perechi, egale și opuse.

În cazul în care legăturile interioare sînt încărcate cu sarcini exterioare, în legături interacțiunea celor două corpuri nu se mai manifestă prin reacțiuni egale și de sens contrar. Legătura interioară însăși fiind încărcată cu forța $\bar{F}$, va fi în echilibru numai dacă se respectă condiția:

$$\bar{F} + \bar{R}_{12} + \bar{R}_{21} = 0. \tag{3.21}$$

Nodul B apare astfel ca un al treilea corp (fig. 3, *v*, *2*).

Eforturi în bare. În practica inginerească apar frecvent sisteme de corpuri formate din bare; unele bare sînt încărcate pe lungime, altele numai la extremități. În exemplul din figura 3, *v*, *3* bara BC constituie legătura exterioară pentru bara AB. Evident, bara BC este comprimată și va reacționa în sens contrar comprimării. Reacțiunea din bara rigidă se orientează pe direcția barei și se pune în evidență secționînd bara. Această reacțiune interioară barei se numește efort interior, acționînd pe direcția barei în ambele sensuri. Eforturile în bare sînt deci perechi egale și direct opuse. În figura 3, *v*, *4* ambele bare sînt solicitate numai axial și vor răspunde în sensul de a se opune comprimării. Reacțiunile din legăturile exterioare ale barelor fără sarcini pe deschidere sînt orientate pe direcția barelor și sînt egale ca mărime cu eforturile din bare.

Teorema solidificării. Dacă sistemul de corpuri este în echilibru sub acțiunea sarcinilor exterioare și a celor din legături, el poate fi considerat ca un singur corp. Ecuațiile de echilibru conțin forțele exterioare și reacțiunile exterioare. Dacă legăturile exterioare aduc în sistem tot atîtea ecuații care se pot scrie și întreg sistemul de corpuri este invariabil; solidificînd sistemul se pot obține mărimile reacțiunilor din legăturile exterioare. Este cazul grinzilor cu zăbrele care, în general, sînt static determinate exterior (fig. 3. *v*, *5*). Sistemul de bare este alcătuit din celule triunghiulare, prin urmare invariabile. Legăturile interioare sînt asimilate cu articulații cilindrice și în ambele exemple prezentate, se pot scrie cîte trei ecuații din care se determină reacțiunile interioare.

Scanned with OKEN Scanner

Eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele se pot scrie sub forma generală de mai jos:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \ldots + a_{1n}P_n &= N_1;\\ a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + \ldots + a_{2n}P_n &= N_2;\\ \cdots\cdots\cdots\

unde $\|A\|$ este matricea numerelor de influență :

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{nn} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}, \tag{3.25}$$

în care a_{ik} se obține atunci cînd $N_i = 0$ și P_k cînd $i \neq k$.

Teorema echilibrului părților. Dacă sistemul de corpuri este în echilibru sub acțiunea sarcinilor exterioare și a legăturilor, părți din sistem sînt de asemenea în echilibru, sub acțiunea sarcinilor ce le revin, adică sarcini exterioare, reacțiuni din legăturile exteriore și reacțiuni din legăturile interioare.

Cît privește determinarea eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele, amintim că acestea se pot estima și prin metode grafice, cum ar fi metoda grafică a izolării nodurilor sau metoda planului Cremona, pe care le vom prezenta sub formă de aplicații.

II. APLICAȚII

3.1. O ramă de geam AB reprezentată în secțiune, cu greutatea $G = 100$ daN se deschide prin rotirea sa în jurul axei orizontale A. Deschiderea se efectuează prin întinderea unui fir $B\,C\,D$, trecit peste scripeți C și D de dimensiuni neglijabile. Scripetele C și punctul A (fig. 3.1), sînt situate pe aceeași verticală. Neglijînd frecările, să se determine variația tensiunii N a firului, în funcție de unghiul format de direcția ramei AB cu orizontala AH, presupunînd că $AB = AC = R$.

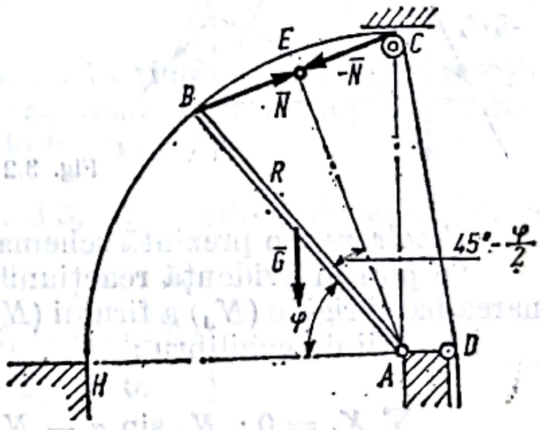


Fig. 3.1

Rezolvare. Scriem ecuația de momente în raport cu punctul A :

$$\sum M_{(A)} = 0 : -\overline{AE} \cdot N + G\frac{R}{2}\cos\varphi = 0.$$

Din triunghiul ABE deducem :

$$\overline{AE} = R\cos\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Înlocuind în ecuația de momente,

$$\cos\varphi = \sin(90° - \varphi) = 2\sin\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right),$$

obținem :

$$N = G\sin\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) = 100\sin\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\text{[da N]}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.2. Pentru susţinerea cablului purtător al unui funicular se foloseşte pilonul natural din figura 3.2, *a*.

Se cer eforturile din cabluri.

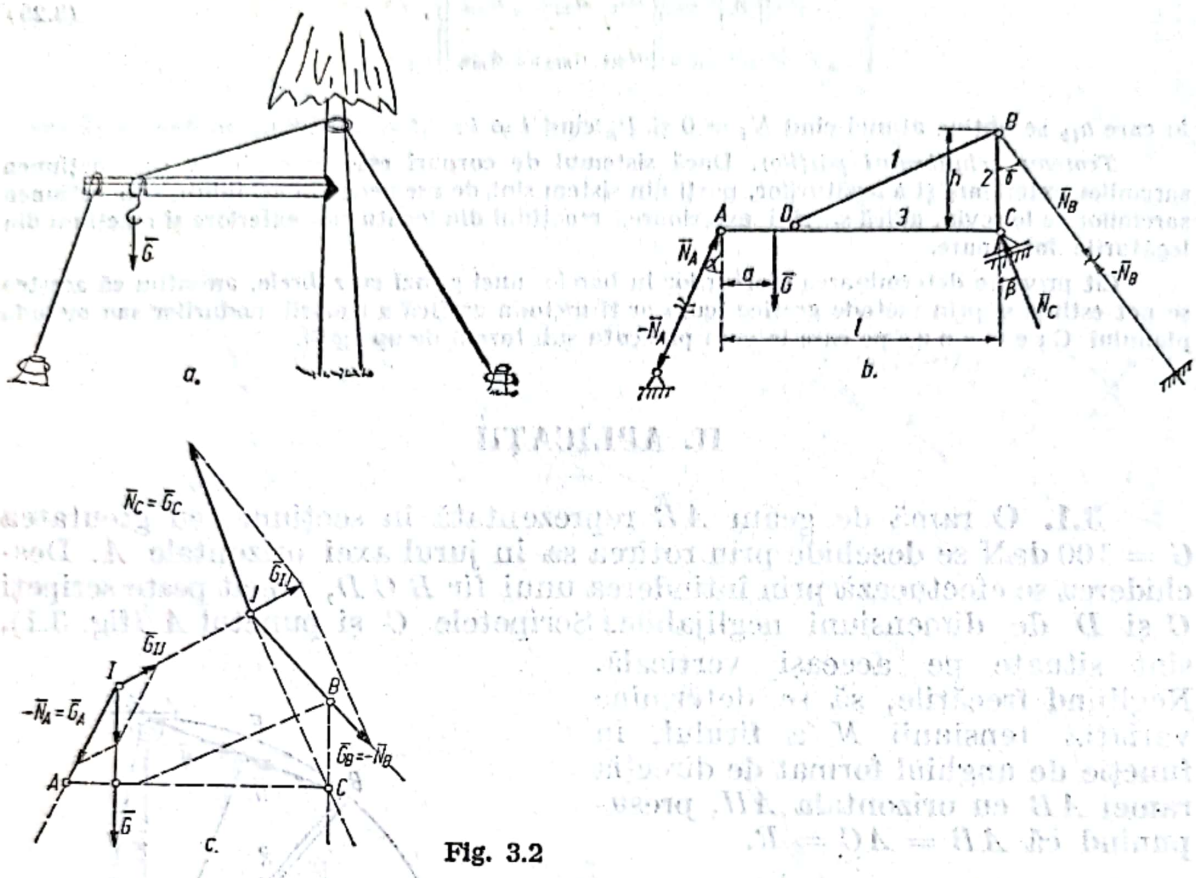


Fig. 3.2

Rezolvare. Se prezintă schematic problema în figura 3.2, *b* :

Se pun în evidenţă reacţiunile din legăturile exterioare prin secţionarea barei rigide (N_A) a firului (N_B) şi în rezemare (N_C).

Ecuaţii de echilibru :

$$\sum X_i = 0\,;\ N_A \sin\alpha - N_C \sin\beta - N_B \sin\gamma = 0,$$

$$\sum Y_i = 0\,;\ -G + N_A \cos\alpha + N_B \cos\gamma + N_C \cos\beta = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$\sum M_{(C)_i} = 0\,;\ G\cdot(l-a) - N_A\, l \cos\alpha + hN_B \sin\gamma = 0.$$

Pentru valorile particulare :

$$\alpha = 30°, \quad \beta = 30°$$

$$\gamma = 45°, \quad l = 1\text{ m}, \quad a = 30\text{ cm şi } h = 30\text{ cm}$$

reacţiunile devin :

$$N_A = 0{,}46\,G, \quad N_C = -2G \text{ şi } N_B = -1{,}1\,G.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare grafică. Se descompune G după trei direcţii (fig, 3.2, *c*)

3.3. În figura 3.3 este reprezentată pîrghia AOD, a mecanismului pentru ridicarea braţelor de fixare a buşteanului la gater. În stare de

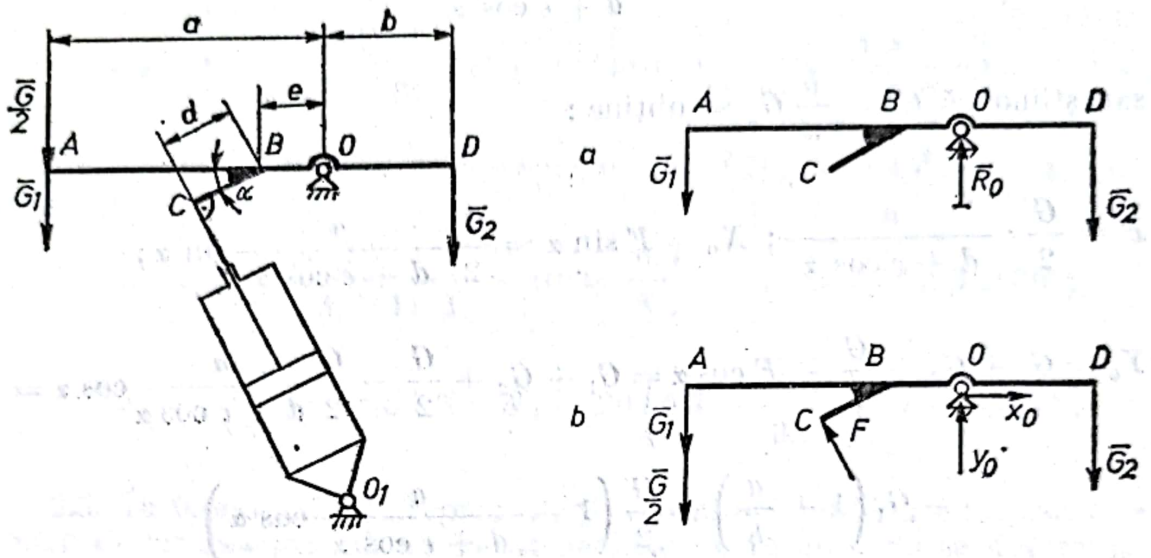


Fig. 3.3

repaus pîrghia stă în poziţie orizontală, iar în timpul lucrului se roteşte faţă de articulaţia O. Se cere forţa $\bar{F}$ de acţionare hidraulică şi reacţiunea din articulaţia O, la ridicarea braţelor de fixare.

Rezolvare. În stare de repaus (fig. 3.3, *a*), condiţia de echilibru a pîrghiei este dată de relaţiile scalare :

$$\left.\begin{aligned} \sum Y_i = 0 &: R_0 - G_1 - G_2 = 0; \\ \sum M_{(O)} = 0 &: G_1 a - G_2 b = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Rezultă :

$$R_0 = G_1 + G_2 \text{ şi } \frac{G_1}{G_2} = \frac{b}{a}.$$

În timpul ridicării braţelor de fixarea buşteanului (fig. 3.3., *b*), asupra pîrghiei acţionează jumătate din greutatea buşteanului iar condiţia de echilibru se realizează pentru :

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \quad X_0 - F\sin\alpha = 0; \\ &\sum Y_i = 0; \quad Y_0 - G_1 - G_2 - \frac{G}{2} + F\cos\alpha = 0; \\ &\sum M_{(O)} = 0; \quad \left(G_1 + \frac{G}{2}\right)a - F(d + e\cos\alpha) - G_2 \cdot b = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţia a treia rezultă:

$$F = \frac{\left(G_1 + \frac{G}{2}\right) a - G_2 b}{d + e \cos \alpha};$$

sau ştiind că $G_1 = \frac{b}{a} G_2$ se obţine:

$$F = \frac{G}{2} \cdot \frac{a}{d + e \cos \alpha}; \; X_0 = F \sin \alpha = \frac{G}{2} \frac{a}{d + e \cos \alpha} \sin \alpha;$$

$$Y_0 = G_1 + G_2 + \frac{G}{2} - F \cos \alpha = G_1 + G_2 + \frac{G}{2} - \frac{G}{2} \frac{a}{d + e \cos \alpha} \cos \alpha =$$

$$= G_1 \left(1 + \frac{a}{b}\right) + \frac{G}{2} \left(1 - \frac{a}{d + e \cos \alpha} \cos \alpha\right).$$

3.4. Să se găsească reacţiunile în legăturile barei de susţinere a cablului de funicular (fig. 3.4, *a*).

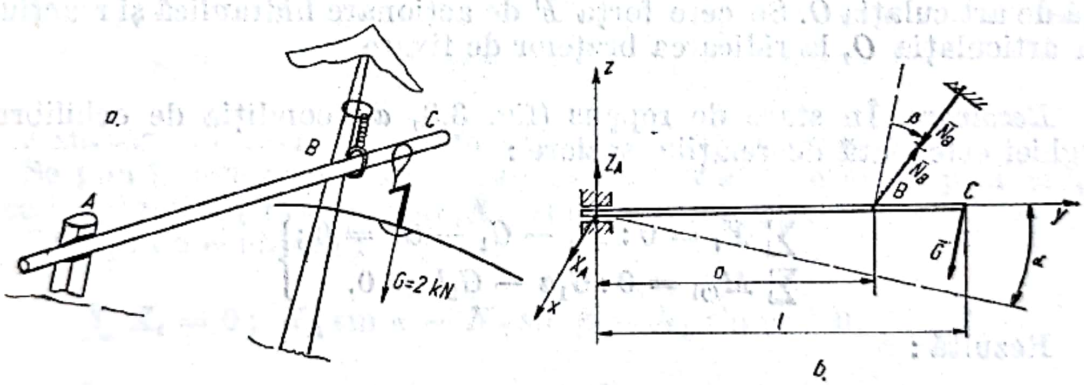


Fig. 3.4

Rezolvare. În figura 3.4, *b* se prezintă schematizat bara de susţinere a funicularului cu reacţiunile corespunzătoare. Ecuaţiile de echilibru ale barei sînt:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum X_i = 0 : X_A = 0; \\
&\sum Y_i = 0; \; -G \sin \alpha + N_B \sin (\alpha + \beta) = 0; \\
&\sum Z_i = 0 : Z_A + N_B \cos (\alpha + \beta) - G \cos \alpha = 0; \\
&\sum M_{0x,i} = 0 : G \cdot l \cdot \cos \alpha - N_B a \cdot \cos (\alpha + \beta) = 0; \\
&\sum M_{0y,i} = 0; \\
&\sum M_{0z,i} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă:

$$\beta = \text{arc tg}\left[\frac{l \operatorname{tg}\alpha - a}{(a + l \operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha}\right] \text{ (firul se înclină)}; \; X_A = 0;$$

$$N_B = G\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}; \; N_A = G\left[\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right];$$

Cu valorile numerice se obţine: $G = 20$ kN; $\alpha = 45°$; $l = 4{,}5$ m; $a = 4$ m;

$$\beta = \text{arc tg}\frac{4{,}5 \cdot 1 - 4}{(4 + 4{,}5 \cdot 1)\cdot 1} = \text{arc tg}\frac{0{,}5}{8{,}5} = \text{arc tg}\,0{,}58; \; \beta \cong 30°;$$

$$N_B = 20 \cdot \frac{0{,}7}{0{,}97} = 14{,}5 \text{ kN}; \; N_A = 20\left(0{,}7 - \frac{0{,}7}{0{,}97}\right) = -0{,}4 \text{ kN}.$$

3.5. În figura 3.5 este reprezentată masa înclinabilă a unui cărucior pentru deservirea maşinii de frezat pachete de furnire. Să se determine expresiile reacţiunilor din articulaţia O, în poziţia de descărcare (fig. 3.5, *a*)

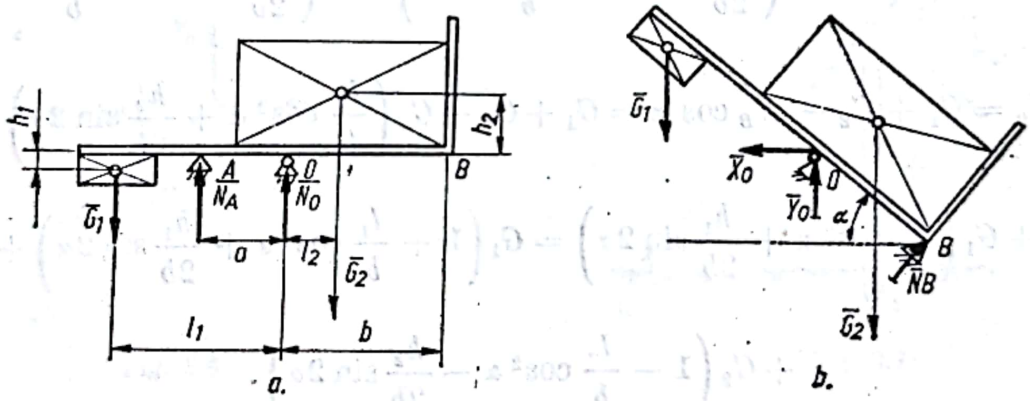


Fig. 3.5

şi în poziţia de încărcare (fig. 3.5, *b*) a căruciorului. Se cunosc: G_1 — contragreutatea, G_2 — greutatea pachetului de furnire, l_1, l_2, h_1, h_2, a şi b.

Rezolvare. În poziţia de descărcare (fig. 3.5, *a*) condiţia de echilibru a masei este dată de relaţiile scalare:

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\sum Y_i = 0; \; N_A + N_0 - G_1 - G_2 - 0; \\ &\textstyle\sum M_{(0)} = 0; \; G_1 l_1 - N_A \cdot a - G_2 \cdot l_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Din ecuaţia a doua rezultă:

$$N_A = \frac{G_1 \cdot l_1 - G_2 l_2}{a},$$

iar din prima relație se obține :

$$N_0 = G_1 + G_2 - N_A = G_1 + G_2 - \frac{G_1 l_1 - G_2 l_2}{a}.$$

În poziția de încărcare (fig. 3.5, *b*) ecuațiile scalare de echilibru sînt :

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0\,; \quad & -X_0 + N_B \sin\alpha = 0\,; \\ \sum Y_i = 0\,; \quad & Y_0 + N_B \cos\alpha - G_1 - G_2 = 0\,; \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

$$\sum M_{(0)} = 0\,;\; N_B b - G_2 \cdot \cos\alpha \cdot l_2 - G_2 h_2 \sin\alpha + G_1 l_1 \cos\alpha \cdot + G_1 h_1 \sin\alpha = 0.$$

Din ultima relație se obține :

$$N_B = G_2\left(\frac{l_2}{b}\cos\alpha \cdot + \frac{h_2}{b}\sin\alpha\right) - G_1\left(\frac{l_1}{b}\cos\alpha + \frac{h_1}{b}\sin\alpha\right).$$

Introducînd valoarea lui N_B în ecuațiile de proiecții pe orizontală și verticală se obține :

$$X_0 = N_B \sin\alpha = G_2\left(\frac{l_2}{2b}\sin 2\alpha + \frac{h_2}{b}\sin^2\alpha\right) - G_1\left(\frac{l_1}{2b}\sin 2\alpha + \frac{h_1}{b}\sin^2\alpha\right)$$

și

$$Y_0 = G_1 + G_2 - N_B \cos\alpha = G_1 + G_2 - G_2\left(\frac{l_2}{b}\cos^2\alpha + \frac{h_2}{2b}\sin 2\alpha\right) +$$

$$+ G_1\left(\frac{l_1}{b}\cos^2\alpha + \frac{h_1}{2b}\sin 2\alpha\right) = G_1\left(1 + \frac{l_1}{b}\cos^2\alpha + \frac{h_1}{2b}\sin 2\alpha\right) +$$

$$+ G_2\left(1 - \frac{l_2}{b}\cos^2\alpha - \frac{h_2}{2b}\sin 2\alpha\right).$$

3.6. Fiecare căprior din figura 3.6 este încărcat cu o sarcină de 1000 daN aplicată la mijlocul lungimii lor. Înclinarea căpriorilor este $\alpha = 30°$.

Să se determine reacțiunile zidurilor și efortul NT din tirantul CD, dacă $AC = \frac{AE}{3}$.

Rezolvare. Ferma fiind simetrică și forțele dispuse simetric, reacțiunile din reazemele A și B sînt egale fiecare cu 1000 daN, verticale și orientate în sus ; deci

$$Y_A = Y_B = 1000 \text{ daN}.$$

Pentru determinarea efortului NT din tirant, se izolează o jumătate de fermă și se introduc, pe lîngă forța dată de 1000 daN, reacțiunea de 1000 daN, forța NT din tirant și reacțiunile X_B și Y_B.

Ecuaţia de momente în raport cu articulaţia E se scrie :

$$\sum M_{(E)}=0 : -1000 \cdot \overline{AE}\cos 30^\circ + NT \cdot \frac{2}{3}\overline{AE}\sin 30^\circ + 1000 \cdot \frac{\overline{AE}}{2}\cos 30^\circ = 0.$$

Rezultă :

$$NT = 1928 \text{ daN}.$$

3.7. Stîlpul din figura 3.7 este încastrat în punctul A şi ancorat în B prin cablul BC. Asupra stîlpului acţionează în punctul B forţa $\bar{F}$ sub unghiul α.

Să se determine forţa care întinde cablul şi forţa care comprimă stîlpul.

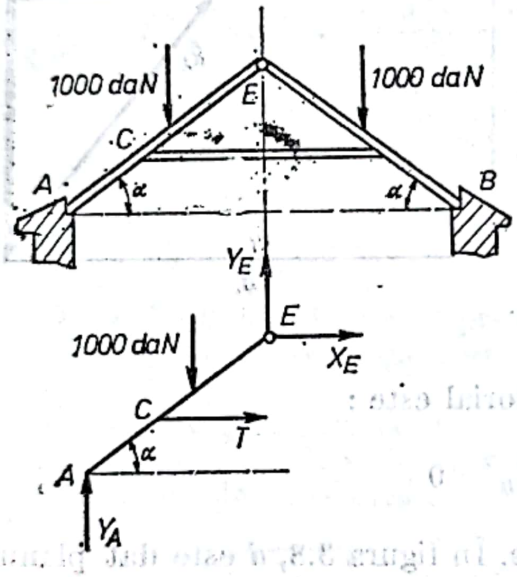


Fig. 3.6

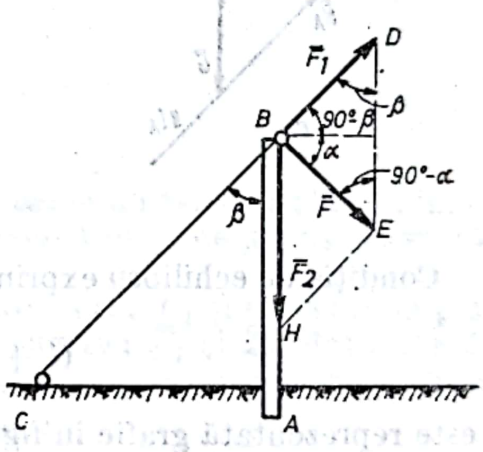


Fig. 3.7

Rezolvare. Încadrăm forţa $\bar{F}$ între direcţiile AB şi CB şi o descompunem cu ajutorul regulei paralelogramului forţelor.

Aplicăm, apoi teorema sinusurilor în triunghiul BDE :

$$\frac{F_2}{\sin[90^\circ-(\beta-\alpha)]} = \frac{F}{\sin\beta} = \frac{F_1}{\sin(90^\circ-\alpha)}.$$

Rezultă forţa care întinde cablul şi forţa care comprină stîlpul :

$$F_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}F \text{ şi } F_2 = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta}F.$$

3.8. Pilonul natural pentru susţinerea cablului purtător de funicular poate avea legăturile din figura 3.8, *a*. Se cer reacţiunile din legături şi eforturile din cabluri.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Situaţia reală poate fi prezentată schematic ca în figura 3. 8, *b* şi se presupune rezolvare grafică.

Reacţiunile din legăturile exterioare *A* (articulaţie) şi *D* (rezemare) se întîlnesc pe suportul forţei *G* (vezi fig. 3.8, *b*), în punctul *i*.

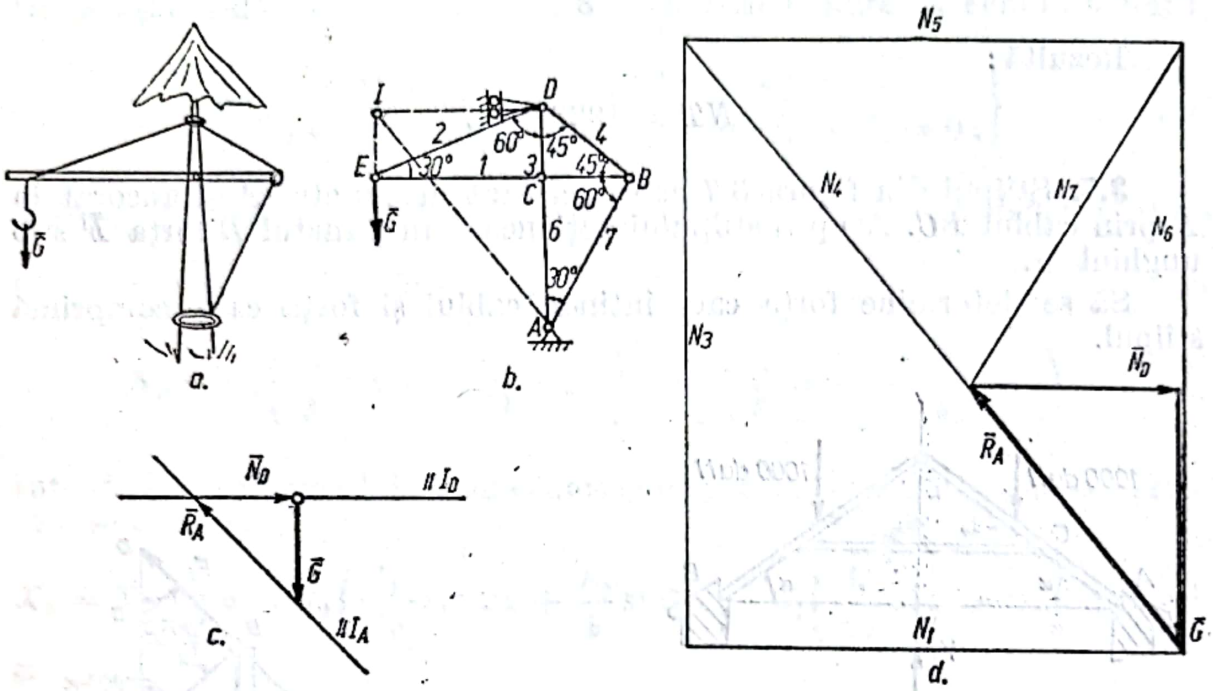


Fig. 3.8

Condiţia de echilibru exprimată vectorial este :

$$\bar{G} + \bar{R}_A + \bar{N}_D = 0$$

şi este reprezentată grafic în figura 3,8, *c*. În figura 3.8, *d* este dat planul C r e m o n a .

3.9. În figura 3.9 se prezintă o instalaţie de secţionat buşteni cu avans transversal ; instalaţia se compune din ferăstrăul electric cu lanţ basculant *1*, rampa *2* şi braţul opritor *4*. Să se determine apăsarea pe braţul *A*, în timpul procesului de tăiere considerînd cunoscute forţa de tăiere *F*, forţa de respingere F_0 şi greutatea buşteanului.

Rezolvare. Se izolează corpul 3 ca în figura 3.9, *b* înlocuind legăturile mecanice prin reacţiunile N_1 şi N_2. Ecuaţiile de echilibru se scriu în raport cu sistemul de referinţă *xOy* şi anume

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 ; \quad & G \sin \alpha - N_2 + F_0 \sin \beta + F \cos \beta = 0, \\ \sum Y_i = 0 ; \quad & N_1 - G \cos \alpha + F_0 \cos \beta - F \sin \beta = 0. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Se rezolvă sistemul de ecuaţii şi se obţine :

$$N_1 = G \cos \alpha - F_0 \cos \beta + F \sin \beta \text{ şi } N_2 = G \sin \alpha + F_0 \sin \beta + F \cos \beta$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă apăsarea pe braţul opritor 4,

$$N_2 = G \sin \alpha + F_0 \sin \beta + F \cos \beta.$$

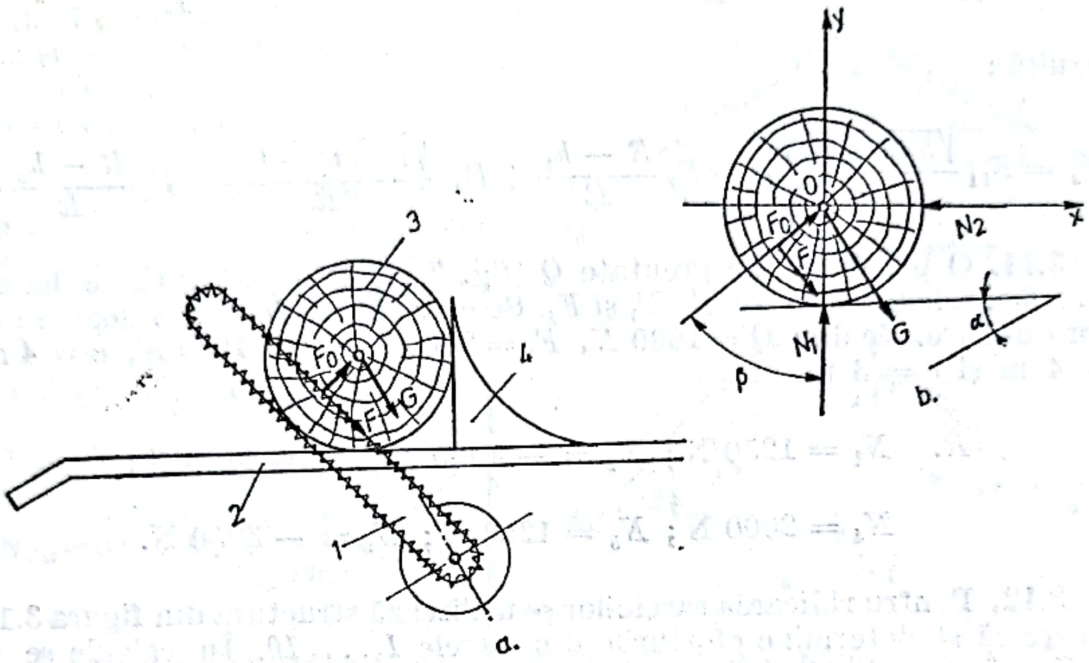


Fig. 3.9

3.10. În figura 3.10 este prezentată schema de tăiere a plăcilor înnobilate, cu două pînze de circular. Să se găsească forţa de avans necesară.

Rezolvare. În figura 3.10 s-au reprezentat prin O_1 şi O_2 centrele pînzelor de circular şi forţele procesului de aşchiere; $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ sînt forţe de tăiere, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ sînt reacţiuni normale, $\bar{F}_{01}$ şi $\bar{F}_{02}$ sînt forţe de respingere.

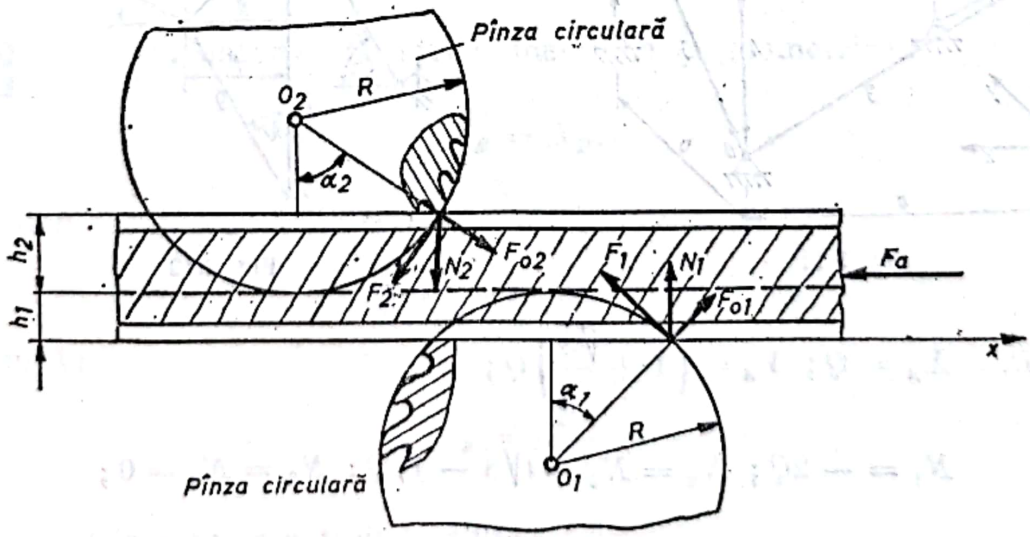


Fig. 3.10

Forţa de avans $\bar{F}_a$ se determină din condiţia de echilibru a plăcii:

$$\sum X_i = 0;\ F_{01} \sin \alpha_1 - F_1 \cos \alpha_1 + F_{02} \sin \alpha_2 - F_2 \cos \alpha_2 - F_a = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$F_{01}\frac{\sqrt{h_1(2R-h_1)}}{R}-F_1\frac{R-h_1}{R}+F_{02}\frac{\sqrt{h_2(2R-h_2)}}{R}-F_2\frac{R-h_2}{R}-F_a=0.$$

Rezultă :

$$F_a=F_{01}\frac{\sqrt{h_1(2R-h_1)}}{R}-F_1\frac{R-h_1}{R}+F_{02}\frac{\sqrt{h_2(2R-h_2)}}{R}-F_2\frac{R-h_2}{R}.$$

3.11. O platformă de greutate Q (fig. 3.11) este susținută de barele $1,\ldots,6$ și solicitată de forțele F_1 și F_2. Se cere să se calculeze valoarea forțelor din bare. Se dau $Q=1000\ N$, $F_1=2000\ N$, $F_2=1000\ N$, $a=4$ m, $b=4$ m și $c=3$ m.

R. $N_1=1250$ N; $N_2=-4000\ N$; $N_3=1250$ N;

$N_4=2000$ N; $N_5=1250\ N$; $N_6=-3250$ N.

3.12. Pentru ridicarea sarcinilor se utilizează structura din figura 3.12. Se cere să se determine eforturile din barele $1,\ldots,10$. În calcule se va neglija diametrul rolelor pentru cablu.

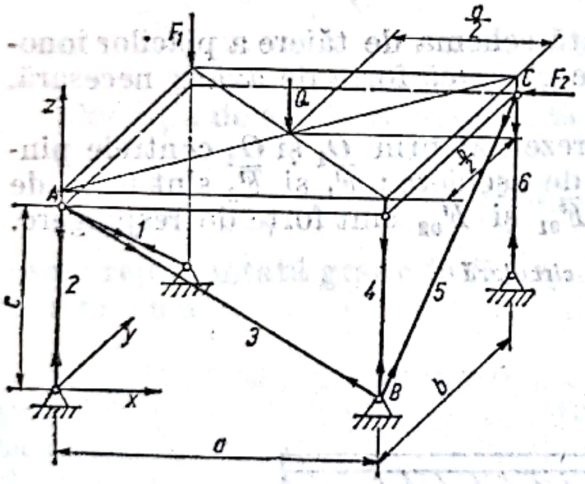


Fig. 3.11

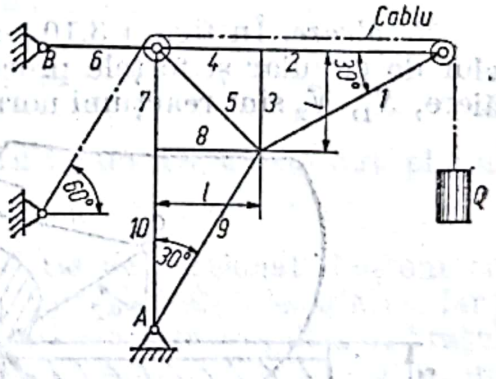


Fig. 3.12

R. $X_A=Q$; $Y_A=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Q$;

$N_1=-2Q$; $N_2=N_4=(\sqrt{3}-1)\,Q$; $N_3=N_8=0$;

$N_5=-\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)\,Q$; $N_6=0{,}5\,Q$; $N_7=-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)Q$;

$N_9=-2\,Q$; $N_{10}=-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)Q$.

Scanned with OKEN Scanner

3.13. Două scînduri identice, netede, AB și AC, fiecare de lungime $2a$ și greutate P, sînt îmbinate prin articulația A și se reazemă pe marginea unei mese în punctele D și E, fiind așezate simetric față de verticală, care trece prin A. Să se determine unghiul φ dintre scîndură și verticală și reacțiunile în punctele D și E, dacă lățimea masei DE este egală cu $2b$ (fig. 3.13).

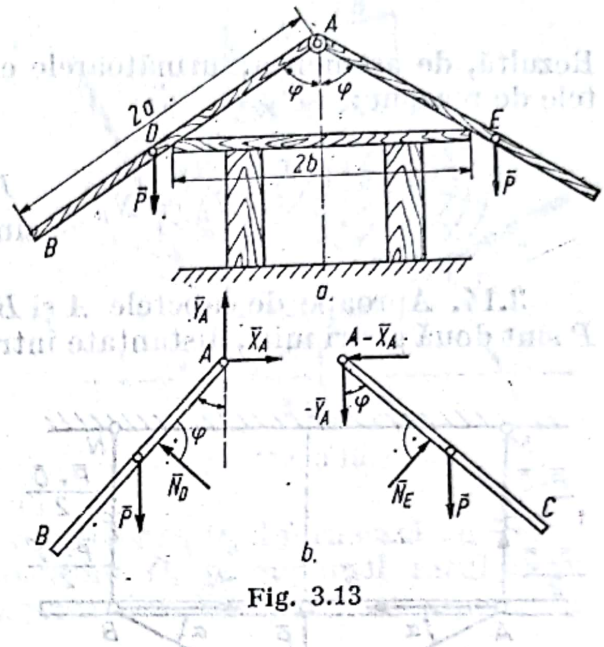


Fig. 3.13

Rezolvare. Descompunem sistemul și scriem ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp în parte. Ecuațiile de echilibru pentru scîndura AB sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0\,;\ X_A - N_D \cos\varphi = 0\,;\\ &\sum Y_i = 0\,;\ Y_A - P + N_D \sin\varphi = 0\,;\\ &\sum M_{(A)} = 0\,;\ aP\sin\varphi - \frac{b}{\sin\varphi} N_D = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

În mod analog se scriu ecuațiile de echilibru pentru scîndura AC:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0:\ -X_A + N_E \cos\varphi = 0\,;\\ &\sum Y_i = 0:\ -Y_A - P + N_E \sin\varphi = 0\,;\\ &\sum M_{(A)} = 0:\ \frac{b}{\sin\varphi} N_E - aP\sin\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Se observă că, datorită simetriei mecanice și geometrice:

$$N_E = N_D.$$

Adunînd ecuațiile a doua și a cincea, se obține:

$$-2P + 2N_D \sin\varphi = 0.$$

Rezultă:

$$N_D = \frac{P}{\sin\varphi}.$$

Înlocuind în ecuația a treia, rezultă:

$$aP\sin\varphi - \frac{b}{\sin\varphi} \cdot \frac{P}{\sin\varphi} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$\sin \varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Rezultă, de asemenea, următoarele expresii pentru reacţiunile din punctele de reazem:

$$N_D = N_E = \frac{P}{\sin \varphi} = P \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

3.14. Aproape de capetele A şi B ale unei bare de lemn de greutate P sînt două găuri mici, distanţate între ele cu $2a$. Prin aceste găuri trece un fir de lungime $2l$, la mijlocul căruia este atîrnată greutatea Q, iar capetele M şi M' ale firului sînt fixate de acelaşi nivel, avînd distanţa $2a$ între ele. Să se afle unghiul α, în poziţia de echilibru a sistemului, precum şi forţa N_1 care comprimă bara (fig. 3.14).

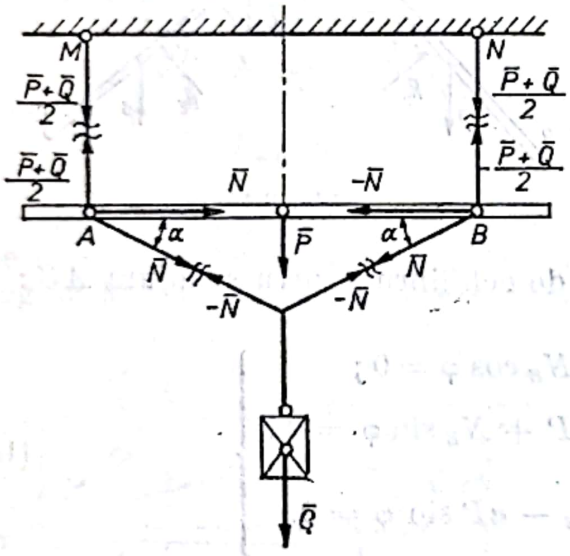


Fig. 3.14

Rezolvare. Efectuăm echilibrul greutăţii $\bar{Q}$ şi al celor două fire, ecuaţia de echilibru pentru greutatea $\bar{Q}$ se scrie:

$$\sum Y_i = 0 : 2N \sin \alpha - Q = 0,$$

de unde:

$$N = \frac{Q}{2 \sin \alpha}.$$

Ecuaţiile de echilibru ale nodului A sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0 : N_1 + N \cos \alpha = 0; \\ &\sum Y_i = 0 : \frac{P+Q}{2} - N \sin \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Rezultă:

$$\sin \alpha = \frac{Q}{P+Q} \text{ şi } N_1 = \frac{1}{2} \sqrt{P(P+2Q)}.$$

3.15. Doi buşteni de formă cilindrică, avînd greutăţile P_1 şi P_2 se reazemă între ei şi pe două plane înclinate cu unghiurile α şi β faţă de planul orizontal. Să se determine poziţia de echilibru a sistemului, reacţiunile exterioare şi forţa de interacţiune (fig. 3.15).

Rezolvare. Aplicînd teorema solidificării, considerăm că cei doi bușteni formează un singur corp, acționat de forțele active $\bar{P}_1$ și $\bar{P}_2$ și supus reacțiunilor $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ ale celor două plane înclinate. Proiectînd aceste forțe pe orizontală și verticală, se obțin ecuațiile :

$$\left.\begin{aligned} N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\beta &= 0\,; \\ N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\beta &= P_1 + P_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

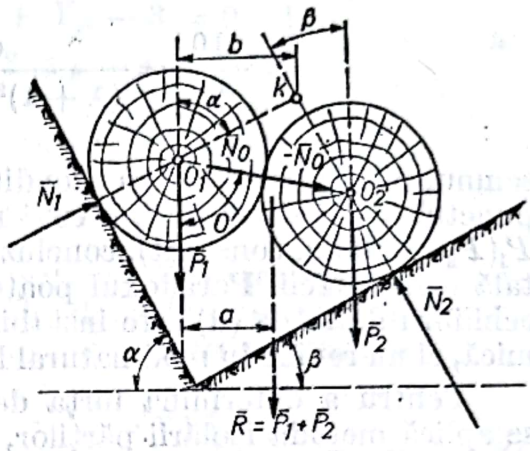


Fig. 3.15

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține :

$$N_1 = \frac{(P_1 + P_2)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\,;$$

$$N_2 = \frac{(P_1 + P_2)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\,.$$

Notînd cu θ unghiul pe care linia centrelor $O_1\,O_2$ îl formează cu verticala, distanța a de la verticala punctului O_1 la suportul rezultantei $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$ se obține aplicînd teorema lui Varignon în raport cu punctul O_1 :

$$a = \frac{P_2}{P_1 + P_2}\,|\overline{O_1O_2}|\sin\theta. \qquad \text{(b)}$$

Distanța de la punctul K de intersecție a reacțiunilor N_1 și N_2 pînă la suportul forței P_1 este :

$$b = |\overline{OK}|\sin\alpha.$$

Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul O_1O_2 ne conduce la :

$$\frac{O_1K}{\sin(\theta-\beta)} = \frac{O_1O_2}{\sin(\alpha+\beta)},$$

astfel încît se obține pentru b expresia :

$$b = \frac{\sin\alpha\cdot\sin(\theta-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\,|\overline{O_1O_2}|\,. \qquad \text{(c)}$$

Pentru echilibru trebuie îndeplinită condiția $a = b$, egalînd relația (b) cu (c), rezultă :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\lambda+1}{\lambda\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}, \qquad \text{(d)}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s-a notat $\lambda = \frac{P_1}{P_2}$, poziţia de echilibru fiind astfel determinată.

Considerînd λ variabil, derivata funcţiei θ este:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{(\lambda+1)^2 + (\lambda \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)^2},$$

semnul ei fiind negativ în condiţiile problemei. Aceasta înseamnă că punctul O_1 se situează la o cotă mai înaltă, odată cu creşterea greutăţii P_1 (P_2 rămînînd constant), concluzie care pare să infirme legea fundamentală a mecanicii. Paradoxul poate fi explicat prin faptul că poziţia de echilibru dată de (d) este instabilă (dînd sistemul o deplasare oricît de mică, el nu revine în mod natural la poziţia definită de relaţia (d)).

Pentru a determina forţa de interacţiune N_0, avînd direcţia O_1O_2, se aplică metoda izolării părţilor, exprimînd, de exemplu, că forţele concurente $\bar{N}_1, \bar{N}_0$ şi $\bar{P}$, la care este supus buşteanul O_1 se echilibrează. Proiectînd aceste forţe pe linia centrelor, rezultă:

$$N_0 = P_1 \cos\theta - N_1 \cos(\theta + \alpha),$$

relaţie în care urmează să se înlocuiască N_1 şi θ prin valorile determinate mai sus.

3.16. Să se determine reacţiunile din articulaţiile A, B, C, D, E şi F şi cele din reazemele N şi R, pentru sistemul de bare de lemn din figura 3.16.

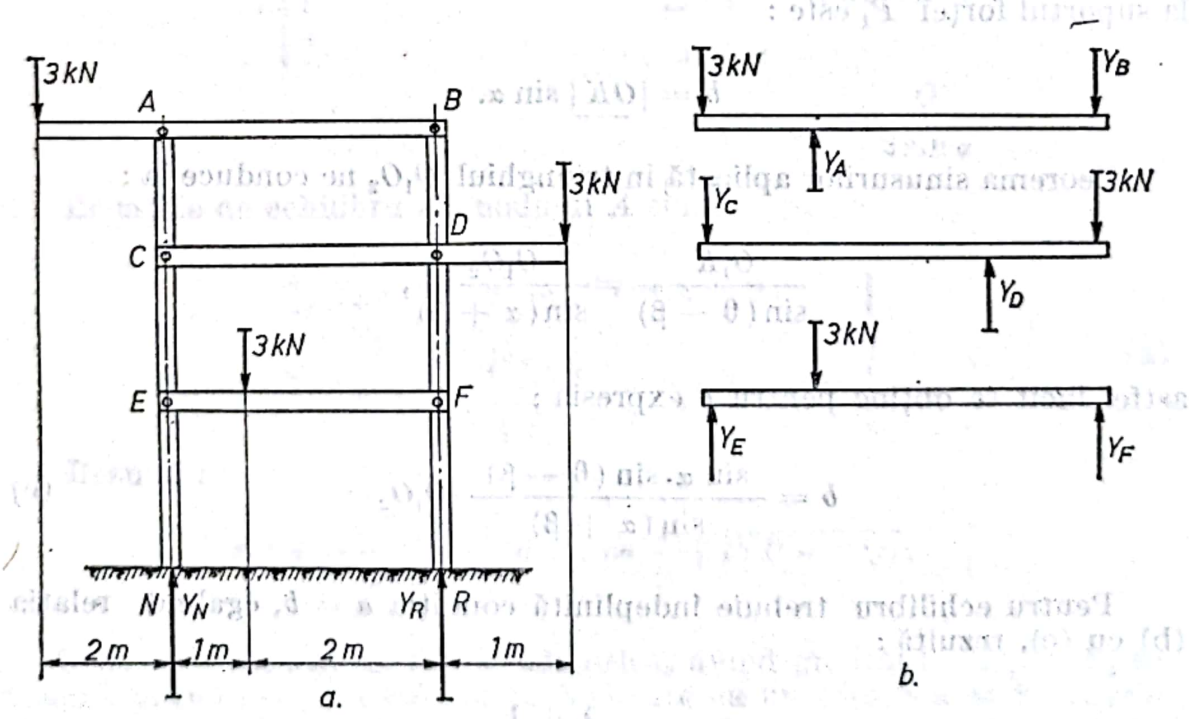


Fig. 3.16

Rezolvare. Reacţiunile din reazemele N şi R se determină făcînd echilibrul întregului sistem; rezultă ecuaţiile:

$$\left.\begin{aligned}\sum Y_i &= 0;\ -3 + Y_N - 3 + Y_R - 3 = 0;\\ \sum M_{(N)} &= 0;\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 + 3\cdot Y_R - 4\cdot 3 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Rezolvînd sistemul, se obţine:

$$Y_N = 6\ \text{kN} \quad \text{şi} \quad Y_R = 3\ \text{kN}.$$

Pentru a determina reacţiunile din articulaţii, descompunem sistemul ca în figura 3.16, *b* şi scriem ecuaţiile de echilibru pentru fiecare bară în parte. Astfel, pentru bara AB rezultă următoarele ecuaţii:

$$\left.\begin{aligned}\sum Y_i &= 0;\ -3 + Y_A - Y_B = 0;\\ \sum M_{(A)} &= 0;\ 2\cdot 3 - 3\,Y_B = 0.\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Rezultă:

$$Y_A = 5\ \text{kN} \quad \text{şi} \quad Y_B = 2\ \text{kN}.$$

Ecuaţiile de echilibru pentru bara CD sînt:

$$\left.\begin{aligned}\sum Y_i &= 0;\ -Y_C + Y_D - 3 = 0;\\ \sum M_{(D)} &= 0;\ 3\,Y_C - 1\cdot 3 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Rezolvînd sistemul, se deduce:

$$Y_C = 1\ \text{kN} \quad \text{şi} \quad Y_D = 4\ \text{kN}.$$

În fine, ecuaţiile de echilibru pentru bara EF se scriu:

$$\left.\begin{aligned}\sum Y_i &= 0;\ Y_E - 3 + Y_F = 0;\\ \sum M_{(E)} &= 0;\ -1\cdot 3 + 3\cdot Y_F = 0.\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Se obţine:

$$Y_E = 2\ \text{kN} \quad \text{şi} \quad Y_F = 1\ \text{kN}.$$

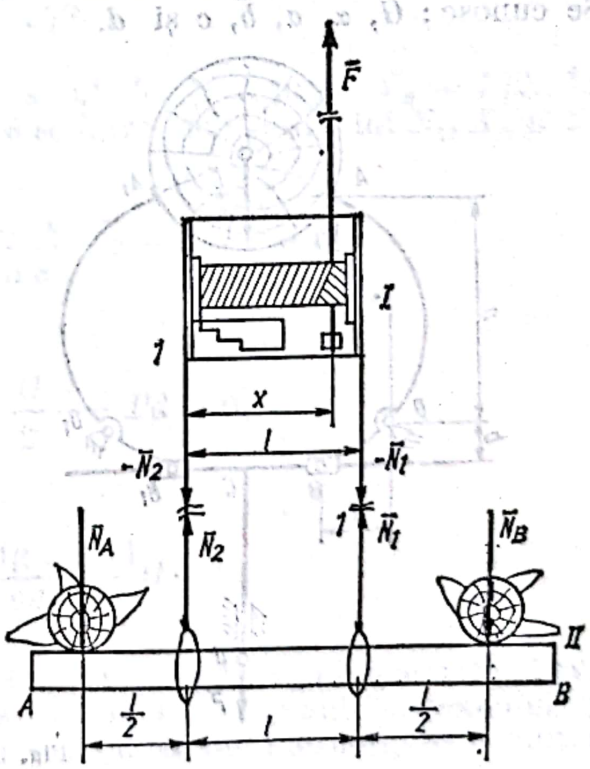


Fig. 3.17

3.17. Grupul cu motor de acţionare cu cablu trăgător în circuit deschis este ancorat ca în figura 3.17. Se cer reacţiunile.

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru pentru grupul motor I,

$$\left.\begin{aligned}\sum Y_i &= 0;\ F - N_1 - N_2 = 0;\\ \sum M_{(1)_i} &= 0;\ F\cdot x - N_1\cdot l = 0,\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

de unde se obține:

$$N_1 = F\frac{x}{l} \quad \text{și} \quad N_2 = \frac{F(l-x)}{l}.$$

Ecuațiile de echilibru pentru grinda II

$$\left.\begin{aligned} &\sum Y_i = 0\,;\; N_A + N_B - N_1 - N_2 = 0\,; \\ &\sum M_{(A)_i} = 0\,;\; T_2\frac{l}{2} + N_1\cdot\frac{3l}{2} - N_B\cdot 2l = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

de unde rezultă:

$$N_B = N_A = \frac{F}{4}(l - 2x).$$

3.18. Să se găsească expresia forței P, pentru fixarea unui buștean pe căruciorul de fixare și centrare al unui gater, funcție de greutatea bușteanului G (căruciorul de fixare preia jumătate din greutatea bușteanului, restul fiind preluat de căruciorul de rezemare) din figura 3.18. Se cunosc: G, α, a, b, c și d.

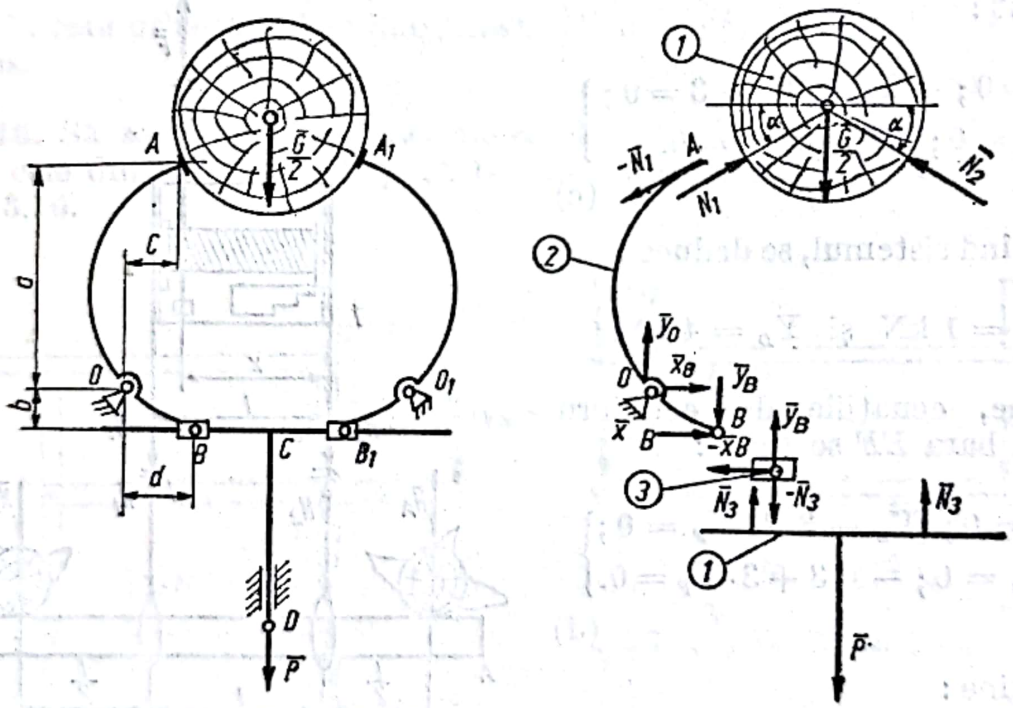


Fig. 3.18

Rezolvare. În calcul se va ține cont că sistemul este simetric. Se descompune sistemul și se face echilibrul fiecărui element.
Corpul 1:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0\,; \quad N_1\cos\alpha - N_2\cos\alpha = 0\,; \\ &\sum Y_i = 0\,; \quad N_1\sin\alpha + N_2\sin\alpha - \frac{G}{2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Rezultă :

$$N_1 = N_2 = \frac{G}{4 \sin \alpha}.$$

Corpul 2 :

$$\sum M_{(0)} = 0\,;\ a N_1 \cos \alpha - c N_1 \sin \alpha + X_B \cdot b - Y_B \cdot d = 0.$$

Corpul 3 :

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0: \quad & - X_B = 0\,; \\ \sum Y_i = 0. \quad & Y_B - N_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Rezultă :

$$Y_B = N_3.$$

Corpul 4 :

$$\sum Y_i = 0\,;\ 2N_3 - P = 0.$$

Rezultă :

$$N_3 = P/2.$$

Se egalează cele două expresii a lui N_3 şi rezultă $Y_B = P/2$. În ecuaţia de momente faţă de punctul 0 se introduc valorile lui N_1, X_B şi Y_B obţinîndu-se

$$\frac{G\,a}{4 \sin \alpha} \cos \alpha - \frac{G \sin \alpha}{4 \sin \alpha}\ c - \frac{P}{2} \cdot d = 0,$$

sau

$$a \frac{G}{2} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{G}{2} c - Pd = 0,$$

de unde rezultă :

$$P = \frac{(a \cdot \operatorname{ctg} \alpha - c)}{2d} G.$$

3.19. Pe braţul de presare O_1O, al unei maşini de cojit buşteni (fig.3.19) este montat capul de frezat *1* ; rolele sînt pentru sprijinul buşteanului în timpul cojirii. Cît este forţa de presare N în timpul lucrului, în condiţia echilibrului barei O_1O şi reacţiunile pe rolele de sprijin ?

Se cunosc : $\bar{F}$ — forţa de tăiere ; $\bar{F}_0$ — reacţiunea ($\bar{F}_0 = f \cdot \bar{F}$) ; $\bar{G}_0$ — greutatea capului de frezat ; $\bar{G}$ greutatea buşteanului ; unghiul α şi dimensiunile a, b şi R.

Rezolvare. Se descompune sistemul şi se face echilibrul fiecărui element. Echilibrul braţului O_1O :

$$\sum M_{(O)_1} = 0\,;\ - N \cdot a - G_0 b - F \cdot R + F_0 \cdot b = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această ecuație rezultă:

$$N = \frac{(F_o - G_o)\, b - FR}{a}.$$

Din echilibrul bușteanului

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \quad F + N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha = 0; \\ &\sum Y_i = 0; \quad N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha - G - F_o = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

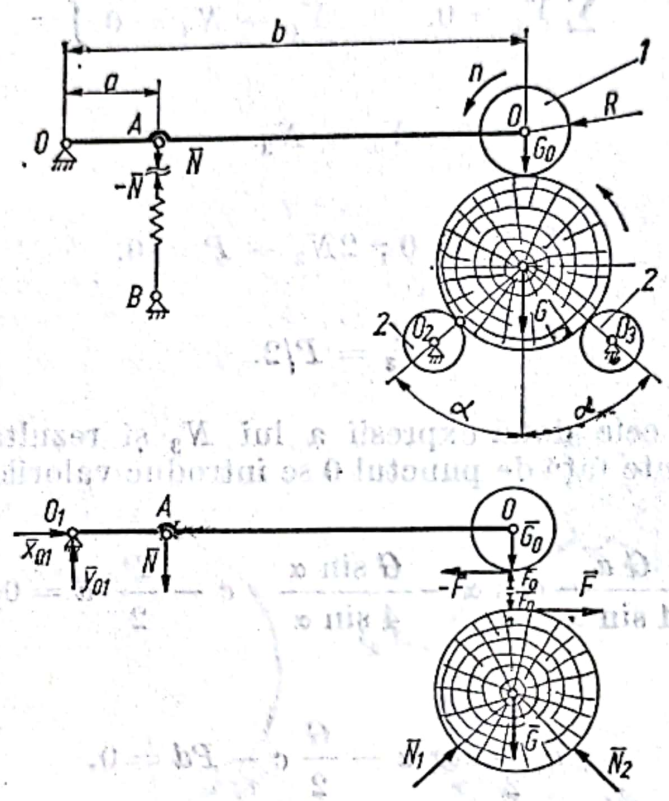


Fig. 3.19

rezultă

$$N_1 = N_2 - \frac{F}{\sin\alpha}$$

și introducînd în relația de proiecții pe axa Oy se determină

$$N_2 = \frac{F}{2\sin\alpha} + \frac{G + F_o}{2\cos\alpha}.$$

Se introduce valoarea lui N_2 în expresia lui N_1 și se obține

$$N_1 = \frac{G + F_o}{2\cos\alpha} - \frac{F}{2\sin\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.20. În figura 3.20 este reprezentat un dispozitiv pentru fixarea și centrarea buștenilor. Se cere să se determine expresia forței $\bar{P}$ necesară fixării bușteanului. Se cunosc : G, α, l_1 și l.

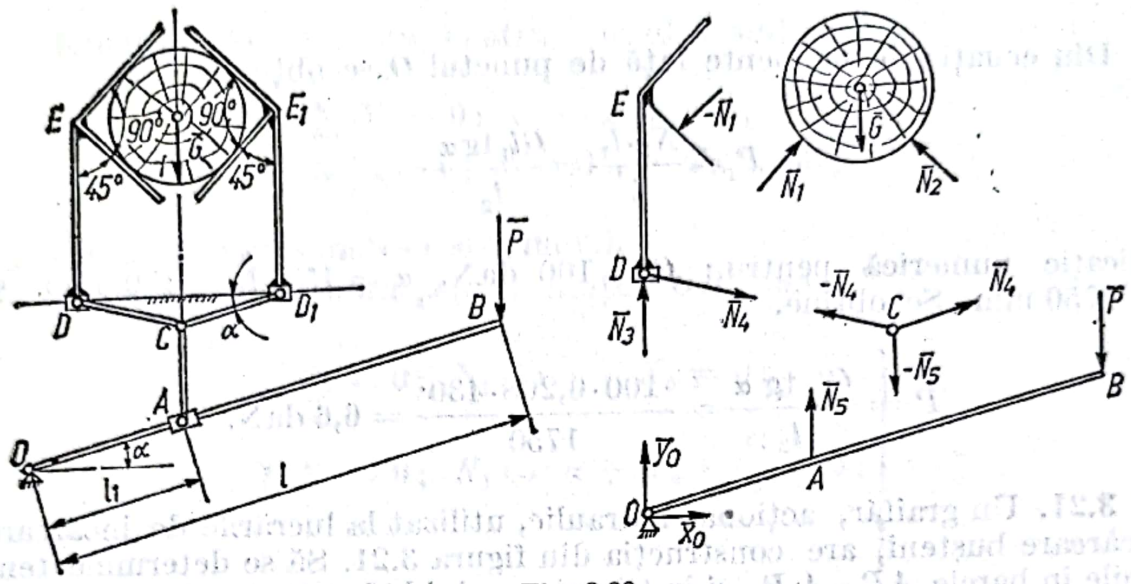


Fig. 3.20

Rezolvare. Se descompune sistemul și se face echilibrul fiecărui element ; se va ține seama că dispozitivul este simetric construit.
Ecuațiile de echilibru pentru buștean sînt :

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0;\ (N_1 - N_2)\cos\frac{\pi}{4} = 0; \\ \sum Y_i = 0;\ (N_1 + N_2)\cos\frac{\pi}{4} - G = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Se face echilibrul barei DE :

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0;\ N_4\cos\alpha - N_1\cos\frac{\pi}{4} = 0; \\ \sum Y_i = 0;\ N_3 - N_4\sin\alpha - N_1\cos\frac{\pi}{4} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Echilib rul nodului C :

$$\sum Y_i = 0;\ 2N_4\sin\alpha - N_5' = 0.$$

Echilibrul barei OB :

$$\sum M_{(O)} = 0;\ N_5 l_1\cos\alpha - Pl\cos\alpha = 0.$$

Din condițiile de echilibrul bușteanului rezultă :

$$N_1 = N_2 = \frac{G\sqrt{2}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuaţiile de echilibru al barei DE rezultă:

$$N_4 = \frac{G}{2\cos\alpha}.$$

Din ecuaţia de momente faţă de punctul O se obţine:

$$P = \frac{N_5 \cdot l_1}{l} = \frac{G l_1 \operatorname{tg}\alpha}{l_2}.$$

Aplicaţie numerică pentru: $G = 100$ daN, $\alpha = 15°$, $l_1 = 430$ mm şi $l = 1750$ mm. Se obţine.

$$P = \frac{G l_1 \operatorname{tg}\alpha}{l_2} = \frac{100 \cdot 0{,}268 \cdot 430}{1750} = 6{,}6 \text{ daN}.$$

3.21. Un graifăr, acţionat hidraulic, utilizat la lucrările de încărcare descărcare buşteni, are construcţia din figura 3.21. Să se determine tensiunile în barele AB, A_1B_1 şi în tija pistonului hidraulic în timpul deplasării unui pachet de buşteni de greutate G. Se cunosc dimensiunile a, b, c şi d.

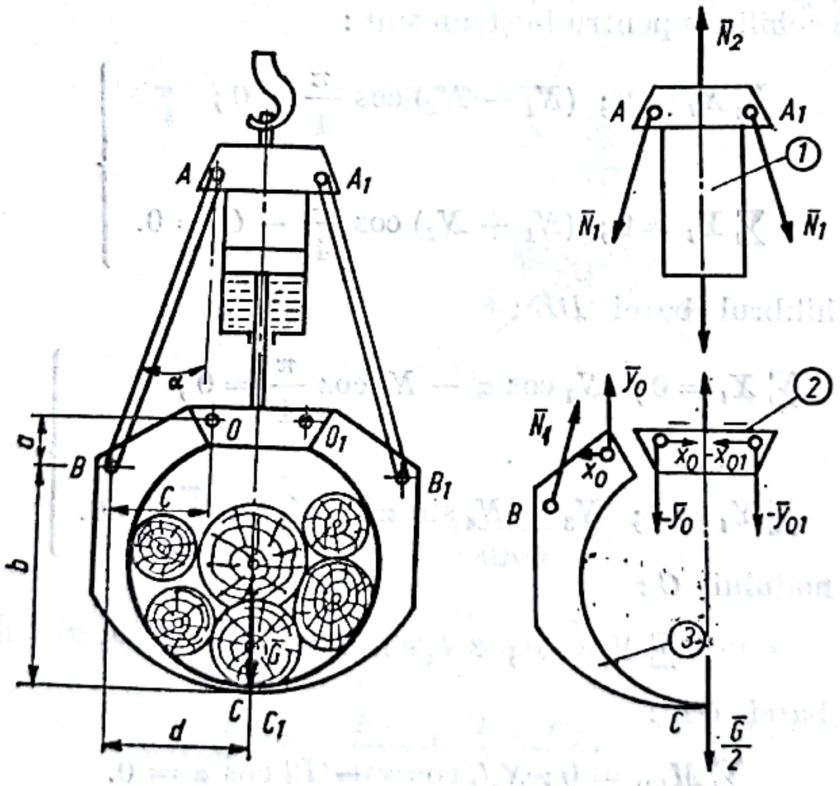


Fig. 3.21

Rezolvare. Graifărul are o construcţie simetrică, fapt de care se va ţine seama în calcul; de asemenea se va considera că pe fiecare braţ OBC şi $O_1B_1C_1$ acţionează jumătate din greutatea pachetului de buşteni.

Pentru corpul *1* ecuația de echilibru se scrie:

$$\sum Y_i = 0;\ N_2 - 2N_1 \cos \alpha - N = 0.$$

Ecuațiile de echilibru pentru corpul *2* sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ X_O - X_{O1} = 0; \\ &\Sigma Y_i = 0;\ N - Y_O - Y_{O1} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

$Y_O = Y_{O1}$ în baza simetriei sistemului.

Ecuațiile de echilibru pentru brațul OBC sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ N_1 \sin \alpha - X_0 = 0; \\ &\sum Y_i = 0;\ N_1 \cos \alpha + Y_0 - \frac{G}{2} = 0; \\ &\sum M_{(B)} = 0;\ X_0 a + Y_0 c - \frac{G}{2} d = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Prin rezolvarea sistemului se obține:

$$X_0 = N_1 \sin \alpha;\ Y_0 = \frac{G}{2} - N_1 \cos \alpha$$

și introducînd în ecuația de momente rezultă:

$$N_1 a \sin \alpha + \left(\frac{G}{2} - N_1 \cos \alpha\right) c - \frac{G}{2} d = 0;$$

deci

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G(d - c)}{(a \sin \alpha - c \cos \alpha)};$$

atunci

$$Y_0 = \frac{G}{2} - \frac{G(d - c)}{2(a \sin \alpha - c \cos \alpha)} \cos \alpha.$$

În continuare se deduce:

$$N = 2Y_0 = G - \frac{G(d - c)}{(a \sin \alpha - c \cos \alpha)} \cos \alpha.$$

3.22. Pentru sistemul de bare articulate din figura 3.22, *a*, reprezentînd grinda transversală a unei macarale-portal utilizată în depozitul de

bușteni, să se determine reacțiunile din articulația A și reazemul mobil G și eforturile în bare prin metoda analitică a separării nodurilor.

Rezolvare. Se face echilibrul exterior și se determină valoarea reacțiunilor din legături

$$\sum X_i = 0 : -X_A - 1000 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0 : Y_A - 2000 + Y_G = 0;$$

$$\sum M_{(A)} = 0;\ 1000 - Y_G\, 2 \cdot (1 + \sqrt{3}) + 2000 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 0.$$

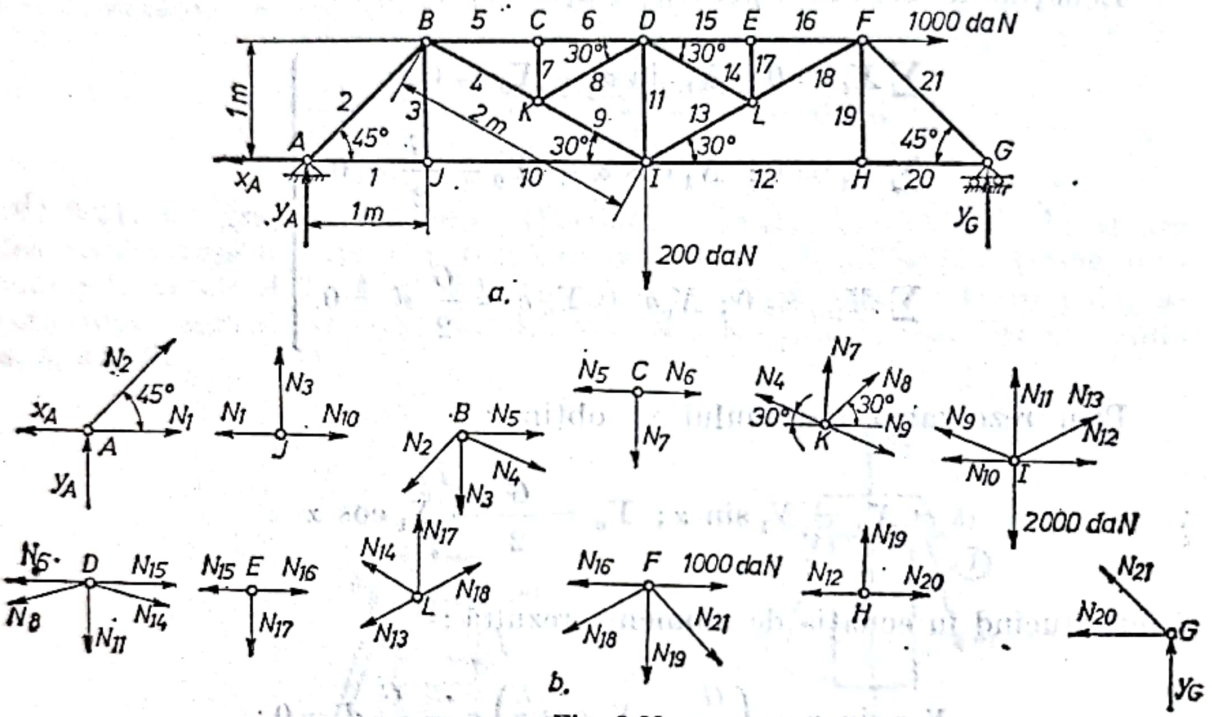


Fig. 3.22

Se obține:

$$X_A = 1000 \text{ daN};\ Y_G = 1183 \text{ daN} \text{ și } Y_A = 817 \text{ daN}.$$

Se face echilibrul fiecărui nod:

Nodul A:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0;\ -X_A + N_1 + N_2 \cos 45° = 0; \\ \sum Y_i = 0;\ Y_A + N_2 \cos 45° = 0. \end{aligned}\right\}$$

Nodul J:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0;\ -N_1 + N_{10} = 0; \\ \sum Y_i = 0;\ N_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Rezultă:

$$N_{10} = 1817 \text{ daN} \text{ și } N_3 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Nodul B:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ -N_2 \cos 45^\circ + N_5 + N_4 \cos 30^\circ = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ -N_2 \cos 45^\circ + N_3 - N_4 \cos 60^\circ = 0.\end{aligned}\right\}$$

Rezultă:

$$N_4 = 1632 \text{ daN},\ N_5 = -2226 \text{ daN}.$$

Nodul C:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ -N_5 + N_6 = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ \ N_7 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Se obţine:

$$N_6 = -2226 \text{ daN}.$$

Nodul K:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ -N_4 \cos 30^\circ + N_8 \cos 30^\circ + N_9 \cos 30^\circ = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ N_4 \cos 60^\circ + N_8 \cos 60^\circ - N_9 \cos 60^\circ = 0.\end{aligned}\right\}$$

Rezultă:

$$N_9 = 1632 \text{ daN},\ N_8 = 0,$$

Nodul G:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ -N_{20} - N_{21} \cos 45^\circ = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ Y_G + N_{21} \cos 45^\circ = 0.\end{aligned}\right\}$$

Rezultă:

$$N_{21} = -1680 \text{ daN},\ N_{20} = 1183 \text{ daN}.$$

Nodul H:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ -N_{12} + N_{20} = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ \ N_{19} = 0.\end{aligned}\right\}$$

Rezultă:

$$N_{12} = 1183 \text{ daN}.$$

Nodul F:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ -N_{16} + 1000 + N_{21} \cos 45^\circ - N_{18} \cos 30^\circ = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ -N_{19} - N_{21} \cos 45^\circ - N_{18} \cos 60^\circ = 0.\end{aligned}\right\}$$

Rezultă:

$$N_{18} = 2368 \text{ daN},\ N_{16} = -2225 \text{ daN}.$$

Nodul E:

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0;\ -N_{15} + N_{16} = 0;\\ \sum Y_i = 0;\ \ N_{17} = 0.\end{aligned}\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă :

$$N_{15} = -2225 \text{ daN}.$$

Nodul L :

$$\sum X_i = 0\,;\ -N_{14}\cos 30^\circ - N_{13}\cos 30^\circ + N_{18}\cos 30^\circ = 0\,;$$
$$\sum Y_i = 0\,;\ N_{14}\cos 60^\circ + N_{18}\cos 60^\circ - N_{13}\cos 60^\circ = 0.$$

Rezultă :

$$N_{13} = 2368 \text{ daN},\ N_{14} = 0.$$

Nodul I :

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i = 0\,;\ -N_{10} - N_9\cos 30^\circ - N_{13}\cos 30^\circ + N_{12} = 0\,;\\ \sum Y_i = 0\,;\ N_{11} + N_{13}\cos 60^\circ + N_9\cos 60^\circ - 2000 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Rezultă :

$$N_{11} = 0.$$

3.23. Să se determine eforturile din presiunea vîntului la șarpanta unei hale de prelucrare a lemnului, alcătuită din grinda cu zăbrele ca în figura 3.23. Sarcinile din vînt ce acționează la noduri sînt $F_{1V} = F_{3V} = 650$ daN. $F_{2V} = 1\,300$ daN.

Rezolvare. Scara forțelor 1 cm = 500 daN ; scara lungimilor 1/100.

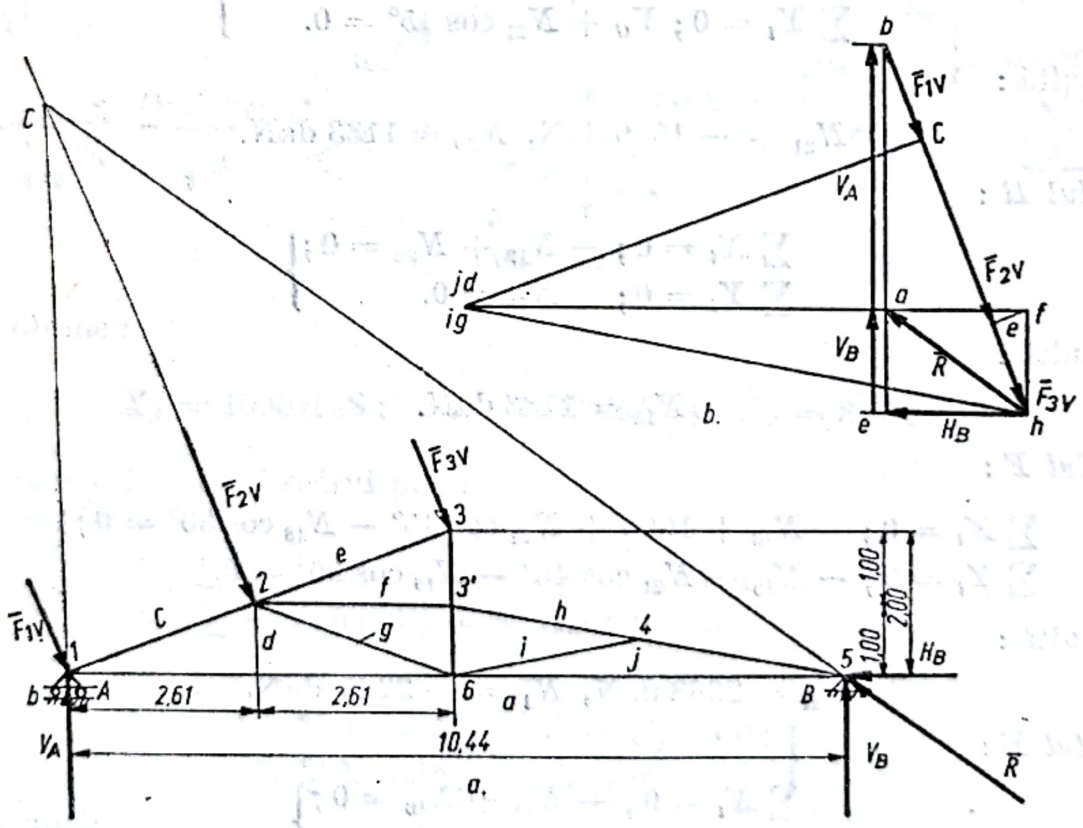


Fig. 3.23

Reacţiunile grinzii cu zăbrele şi eforturile din bare s-au obţinut grafic. Reacţiunile s-au determinat din poligonul forţelor după ce mai întîi s-a găsit direcţia lui $\bar{R}$. Punctul C este la intersecţia direcţiei reacţiunii V_A cu direcţia rezultantei de acţiune a presiunii vîntului.

Din poligonul forţelor rezultă :

$V_A = 1780$ daN ; $V_B = 700$ daN ;

$H_B = 930$ daN ; $R = 1150$ daN.

Prin construirea epurei B o w (fig. 3.23, *b*) rezultă eforturile din barele grinzii cu zăbrele ce se dau în tabelul 3.23.

Tabelul 3.23

Barele	Eforturile în bare	
	Sarcini produse de vînt	
	Compresiune (−) daN	Tracţiune (+) daN
$N_{12} = N_{cd}$	3250	—
$I_{16} = I_{ad}$	—	2800
$D_{26} = D_{gd}$	0	—
$D_{23} = D_{gf}$	3750	—
$N_{23} = N_{ef}$	—	40
$M_{33'} = M_{fw}$	700	—
$M_{3'6} = M_{gi}$	0	—
$N_{3'4} = N_{hi}$	3800	—
$D_{46} = D_{iy}$	0	—
$N_{45} = N_{hy}$	3800	—
$I_{56} = I_{ay}$	—	2800

3.24. În figura 3.24 este reprezentată schema de lucru a unui ferăstrău circular de retezat, sistem armonică. Se consideră cunoscute forţa de tăiere F, forţa de respingere F_0, greutatea pînzei circulare G, greutatea barei de susţinere G_1 şi momentul de antrenare M_0. Să se determine forţele ce se nasc în articulaţia O_1 în timpul procesului de tăiere.

Rezolvare. Se descompune sistemul în corpurile *1* şi *2* şi se introduc reacţiunile echivalente legăturilor mecanice. Se scriu ecuaţiile de echilibru pentru fiecare corp. Pentru corpul *1*, se scriu ecuaţiile de echilibru

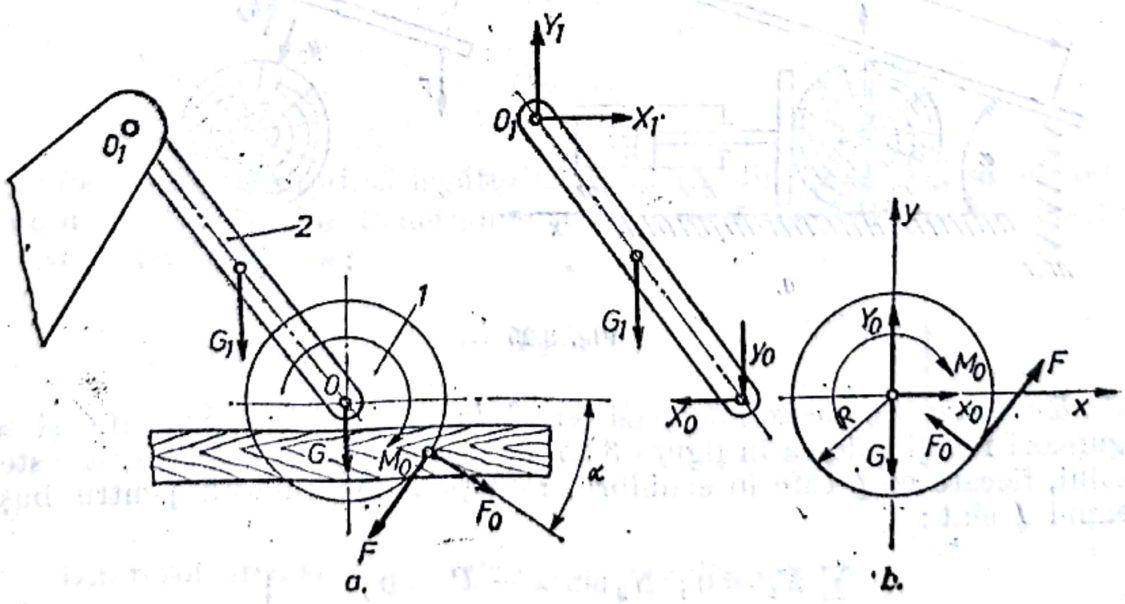


Fig. 3.24

în raport cu sistemul de referinţă xOy şi anume:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ F\sin\alpha - F_0\cos\alpha + X_0 = 0;\\ &\sum Y_i = 0;\ F\cos\alpha + F_0\sin\alpha + Y_0 - G = 0;\\ &\sum M_{z(O)} = 0;\ M_0 - FR = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Ecuaţiile de echilibru pentru bara *2* sînt

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ X_1 - X_0 = 0;\\ &\sum Y_i = 0;\ Y_1 - Y_0 - G_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Din rezolvarea sistemului format din ecuaţiile de echilibru ale celor două corpuri se obţine:

$$X_0 = F_0\cos\alpha - F\sin\alpha,\ Y_0 = G - F_0\sin\alpha - F\cos\alpha,$$

$$X_1 = X_0 = F_0\cos\alpha - F\sin\alpha \text{ şi } Y_1 = G_1 + Y_0 = G_1 + G - F_0\sin\alpha - F\cos\alpha.$$

3.25. În figura 3.25 este reprezentat un dispozitiv de avans cu piston şi placă de apăsare, la o maşină pentru debitat aşchii. Cunoscînd forţa de apăsare P dezvoltată în piston şi greutatea G a buşteanului, să se determine forţa în resort în condiţia de echilibru a sistemului.

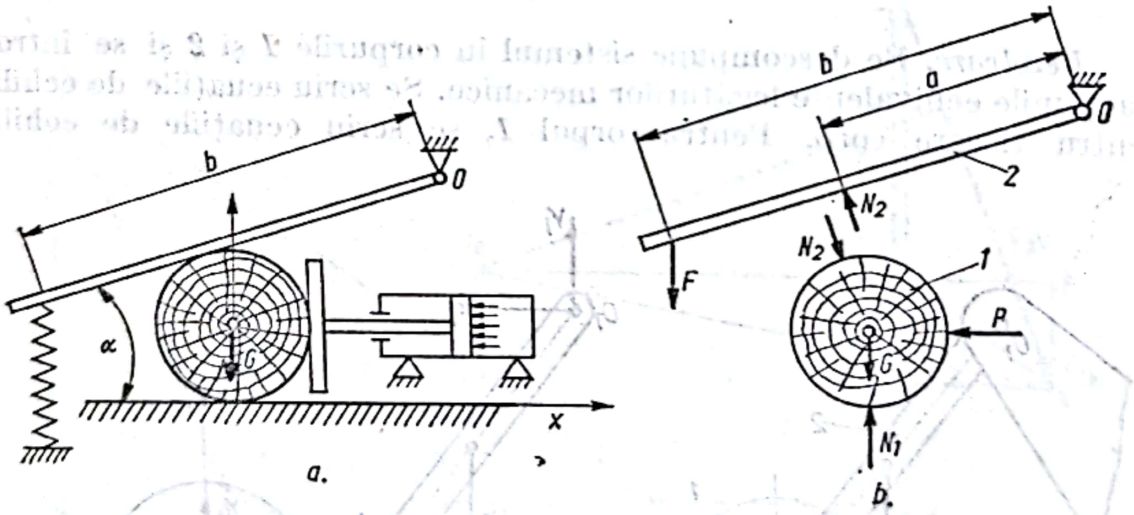


Fig. 3.25

Rezolvare. Se descompune sistemul în corpurile componente şi se figurează reacţiunile ca în figura 3.25, *b*. În condiţia de echilibru a sistemului, fiecare corp este în echilibru. Ecuaţiile de echilibru pentru buşteanul *1* sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ N_2\sin\alpha - P = 0;\\ &\sum Y_i = 0;\ N_1 - G - N_2\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Scanned with OKEN Scanner

în raport cu sistemul de referinţă xOy şi anume:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ F\sin\alpha - F_0\cos\alpha + X_0 = 0;\\ &\sum Y_i = 0;\ F\cos\alpha + F_0\sin\alpha + Y_0 - G = 0;\\ &\sum M_{z(O)} = 0;\ M_0 - FR = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Ecuaţiile de echilibru pentru bara *2* sînt

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ X_1 - X_0 = 0;\\ &\sum Y_i = 0;\ Y_1 - Y_0 - G_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Din rezolvarea sistemului format din ecuaţiile de echilibru ale celor două corpuri se obţine:

$$X_0 = F_0\cos\alpha - F\sin\alpha,\ Y_0 = G - F_0\sin\alpha - F\cos\alpha,$$

$$X_1 = X_0 = F_0\cos\alpha - F\sin\alpha \text{ şi } Y_1 = G_1 + Y_0 = G_1 + G - F_0\sin\alpha - F\cos\alpha.$$

3.25. În figura 3.25 este reprezentat un dispozitiv de avans cu piston şi placă de apăsare, la o maşină pentru debitat aşchii. Cunoscînd forţa de apăsare P dezvoltată în piston şi greutatea G a buşteanului, să se determine forţa în resort în condiţia de echilibru a sistemului.

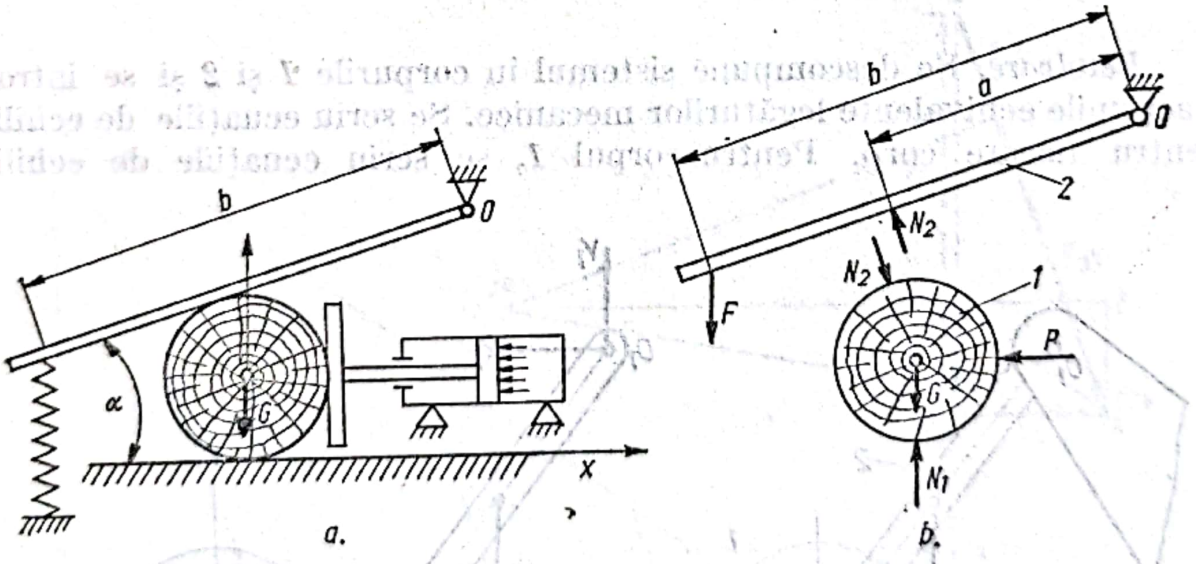


Fig. 3.25

Rezolvare. Se descompune sistemul în corpurile componente şi se figurează reacţiunile ca în figura 3.25, *b*. În condiţia de echilibru a sistemului, fiecare corp este în echilibru. Ecuaţiile de echilibru pentru buşteanul *1* sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ N_2\sin\alpha - P = 0;\\ &\sum Y_i = 0;\ N_1 - G - N_2\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Ecuaţia de echilibru pentru placa de apăsare *2* :

$$\sum M_{ei} = 0\,; \quad N_2\, a - F\, b \cos \alpha = 0.$$

Din rezolvarea sistemului format din cele trei ecuaţii se obţine :

$$N_2 = \frac{P}{\sin \alpha}, \quad N_1 = G + P \operatorname{ctg} \alpha \text{ şi } F = \frac{2\, a\, P}{b \sin 2\, \alpha}.$$

3.26. Un elevator transversal din depozitul de buşteni este reprezentat în figura 3.26, *a*. Să se determine reacţiunile din articulaţia *B* şi reazemul *A* precum şi eforturile în barele *4*, *5* şi *6*. Se cunosc : distanţa *a* şi forţa *P*.

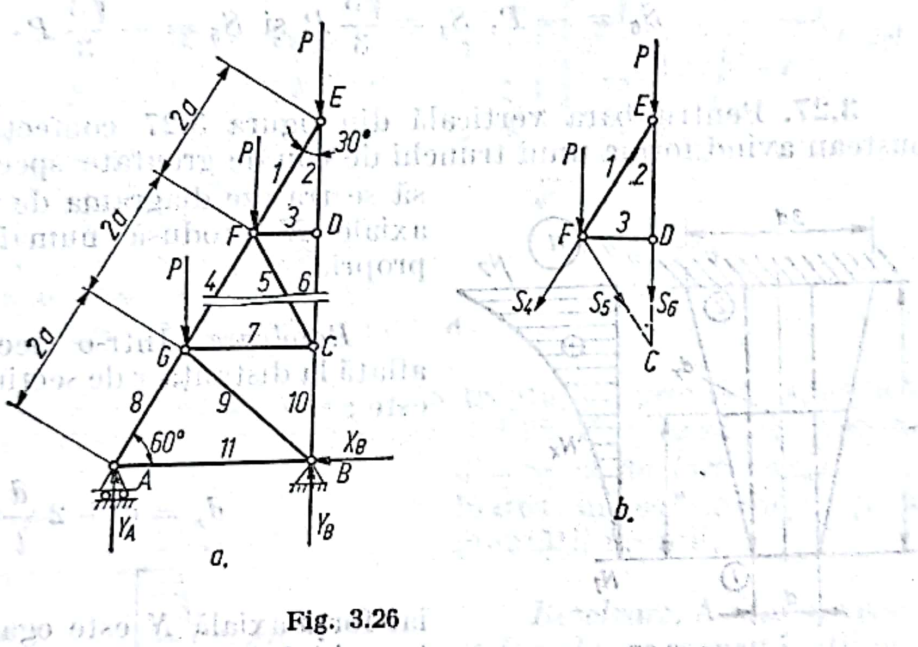


Fig. 3.26

Rezolvare. Se suprimă legăturile mecanice din *A* şi *B* şi se introduc reacţiunile echivalente. Reacţiunile se determină din condiţia de echilibru a sistemului şi anume :

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0\,; && -X_B = 0\,; \\ &\sum Y_i = 0\,; && Y_A + Y_B - 3\,P = 0\,; \\ &\sum M_{(B)i} = 0\,; && 3\,a\,Y_A - 2\,aP - aP = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Din rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultă soluţiile

$$X_B = 0\,; \; Y_A = P \text{ şi } Y_B = 2P.$$

Scanned with OKEN Scanner

Eforturile în barele *4*, *5* și *6* se determină prin metoda secțiunilor; se secționează sistemul ca în figură și se consideră echilibrul părții superioare (fig. 3.26, *b*). Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\sum Y_i = 0; \quad 2P + S_4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + S_5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + S_6 = 0; \\ &\sum M_{(F)i} = 0; \quad -aP + aS_6 = 0; \\ &\sum M_{(C)i} = 0; \quad aP + aS_4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a\sqrt{3}\, S_A \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Soluțiile sistemului de ecuații sînt:

$$S_6 = -P, \; S_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} P \text{ și } S_5 = -\frac{\sqrt{3}}{3} P.$$

3.27. Pentru bara verticală din figura 3.27 confecționată dintr-un buștean avînd forma unui trunchi de con de greutate specifică γ se cere să se traseze diagrama de variație a forței axiale N produsă numai de greutatea proprie.

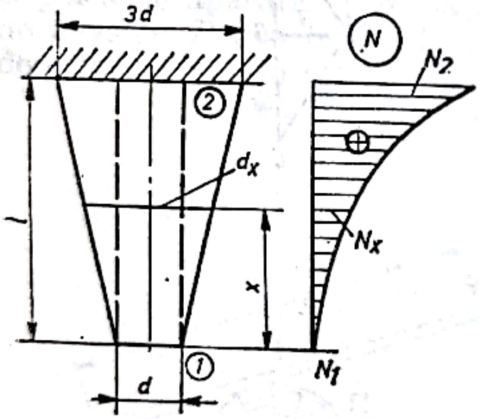


Fig. 3.27

Rezolvare. Într-o secțiune oarecare aflată la distanța x de secțiunea l diametrul este:

$$d_x = d + 2\frac{d}{l} x,$$

iar forța axială N este egală cu greutatea trunchiului de con de înălțime x:

$$N_x = \gamma \frac{\pi x}{3} \left[\frac{d^2}{4} \left(1 + 2\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} \left(1 + 2\frac{x}{l}\right) \right],$$

pentru $x = 0$ rezultă $N_1 = 0$, iar pentru

$$x = l \text{ rezultă } N_2 = N_{\max} = \frac{13}{12} \gamma \pi d^2 l.$$

Deci forța axială se distribuie pe lungimea barei după o parabolă cubică (fig. 3.27).

3.28. Pentru bara verticală din figura 3.28, de secțiune constantă A, de greutate specifică γ și lungime $3l$, solicitată de forțele concentrate

Scanned with OKEN Scanner

P și $2P$, se cere să se traseze diagrama de forțe axiale. La calculul forței axiale se va ține cont și de greutatea proprie a barei.

Rezolvare. Din suma de proiecții pe verticală se determină mărimea reacțiunii X_3, respectiv :

$$\sum X_i = 0;\ X_3 - 2P - P - 3Al\gamma = 0;\ X_3 = 3P + 3Al\gamma.$$

Expresiile forței axiale pe fiecare porțiune de bară sînt :

$N_{12} = P + A\gamma x$; pentru $x = 0$ rezultă

$$N_1 = +P \text{ iar}$$

pentru $x = l$ rezultă $N_2' = +P + A\gamma l$;

$$N_{23} = 3P + A\gamma l + A\gamma x;$$

pentru $x = 0 \rightarrow N_2'' = 3P + A\gamma l$;

pentru $x = 2l \rightarrow N_3 = 3P + 2A\gamma l$.

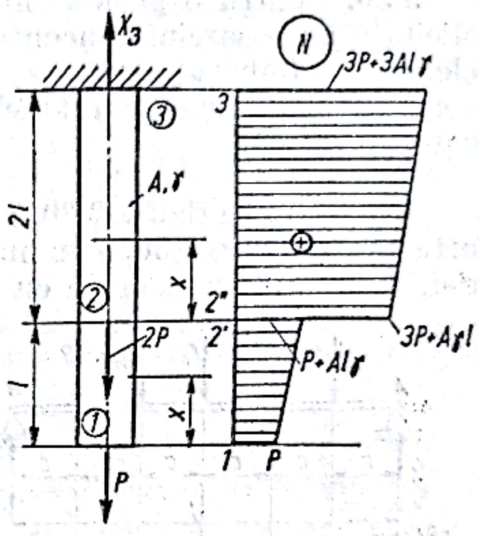


Fig. 3.28

Datorită greutății proprii, care este o sarcină uniform distribuită, pe cele două zone *1 — 2* și *2—3*, forța axială variază liniar iar în punctele *1* și *2*, unde există forțele concentrate P și $2P$, se produc salturi în diagrama de forțe axiale (fig. 3.28).

3.29. Un stîlp de secțiune variabilă în trepte, de greutate specifică γ este solicitat de forțele $P = \gamma Al$ ca în figura 3.29. Se cere să se traseze diagrama de forțe axiale cu luarea în considerație și a greutății proprii.

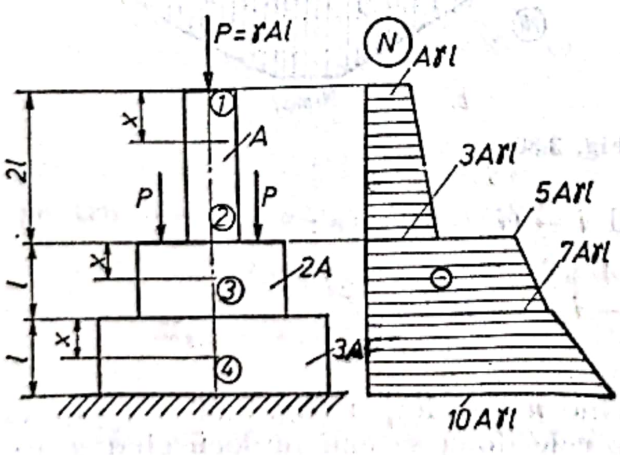


Fig. 3.29

Rezolvare. Avînd în vedere forțele ce solicită stîlpul, cît și greutatea proprie, forța axială pe fiecare zonă are expresia :

$$N_{12} = -P - A\gamma x =$$

$= -A\gamma l - A\gamma x$; pentru $x = 0$ rezultă $N_1 = -A\gamma l = -P$;

pentru $x = 2l$ rezultă $N_2' = -3A\gamma l$;

$$N_{23} = -3P - 2A\gamma l - 2A\gamma x = -3A\gamma l - 2A\gamma l - 2A\gamma x;$$

pentru $x = 0$ rezultă $N_2'' = -5A\gamma l$;

pentru $x = l$ rezultă $N_3 = -7A\gamma l$;

Scanned with OKEN Scanner

$$N_{34} = -3P - 2A\gamma l - 2A\gamma l - 3A\gamma x = -7A\gamma l - 3A\gamma x;$$

pentru $x = 0$ rezultă $N_3 = -7A\gamma l$.

pentru $x = l$ rezultă $N_4 = -10\,A\gamma l$.

Deci pe cele trei porțiuni forța axială variază liniar, cu salturi în dreptul forțelor concentrate (fig. 3.29).

3.30. Pentru o grindă simplu rezemată la capete (fig. 3.30, *a* și *b*) solicitată de n sarcini concentrate transversale, egale și așezate în punctele care o împart în $(n+1)$ intervale, egale fiecare cu $c = l/(n+1)$, se cere să se traseze diagramele de forța tăietoare și momente încovoietoare.

Rezolvare. În figura 3,30, *a* s-au luat pe grindă un număr n impar de forte, iar în figura 3.30, *b* un număr n par. În ambele cazuri, datorită simetriei, reacțiunile sînt egale cu $Y_A = Y_B = nP/2$.

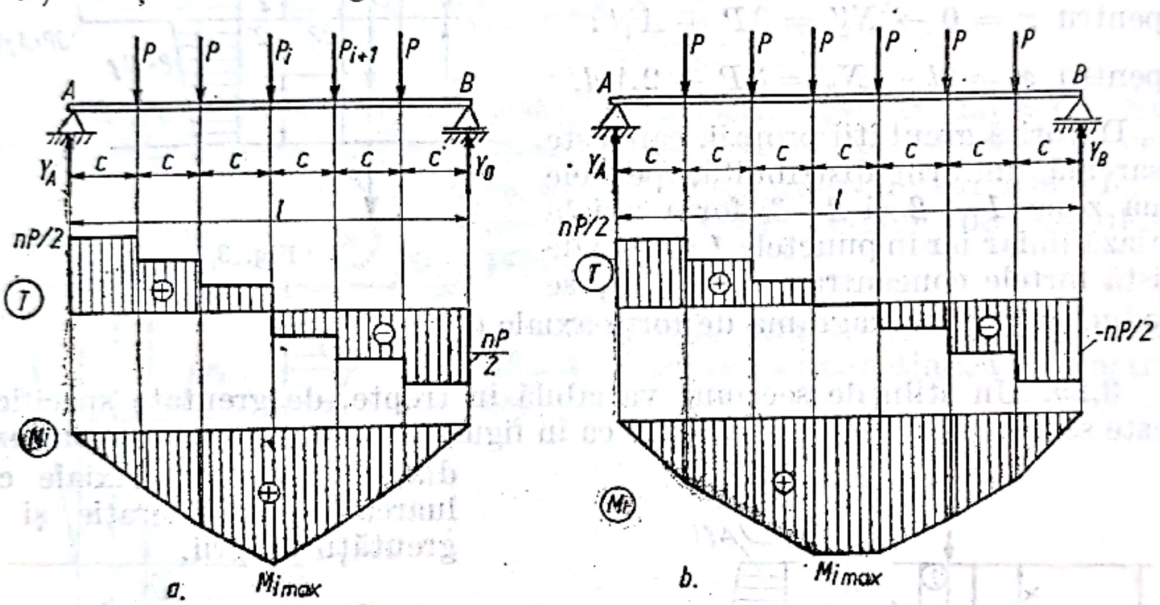


Fig. 3.30

Forța tăietoare, în intervalul $i - (i+1)$ este:

$$T_{i,i+1} = Y_A - i\,P = P\,\frac{n-2i}{2}$$

și se anulează în mijlocul grinzii cînd n este impar (fig. 3.30, *a*), sau are valoarea zero pe intervalul dintre cele două sarcini mijlocii cînd n este par (fig. 3.30, *b*).

Momentul încovoietor M_i, în dreptul sarcinii i, este:

$$M_i = Y_A.i.c - P.c[1+2+\ldots+(i-1)] = Y_A.i.c - Pc\,\frac{i(i-1)}{2};$$

$$M_i = \frac{Pci}{2}(n-i+1) = \frac{P.i.l}{2(n+1)}(n-i+1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Diagrama momentelor încovoietoare este o linie poligonală cu ordonata maximă sub sarcina centrală cînd n este impar sau cu latura centrală orizontală cînd n este par. Momentul încovoietor maxim are valoarea:

cînd n este impar: $i = \frac{n+1}{2}$ rezultă $M_{max} = \frac{Pl}{8}(n+1)$;

cînd n este par: $i = \frac{n}{2}$ rezultă $M_{max} = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{n(n+2)}{n+1}$

Pentru un număr de 1...10 forţe P, în condiţiile anunţului, corespund următoarele valori de momente încovoietoare maxime:

$$n = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;$$

$$M_{max} = \frac{Pl}{4};\ \frac{Pl}{3};\ \frac{Pl}{2};\ \frac{3Pl}{3};\ \frac{3Pl}{4};\ \frac{6Pl}{7};\ Pl;\ \frac{10Pl}{9};\ \frac{5Pl}{4};\ \frac{15l}{11}.$$

3.31. Pentru grinda simplu rezemată la capete, solicitată de două sarcini concentrate transversale, egale şi aşezate simetric faţă de mijlocul grinzii (fig. 3.31) se cere să se traseze diagramele T şi M_i.

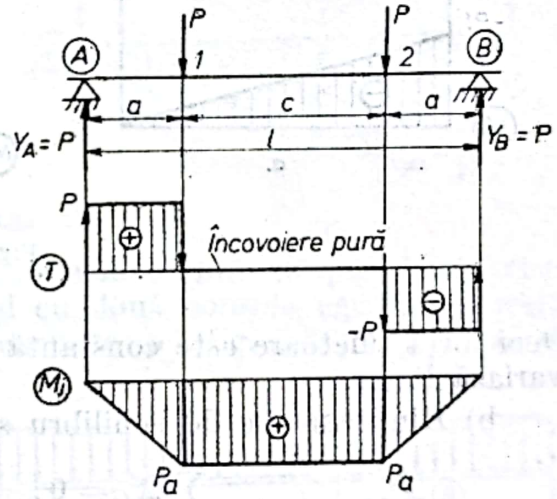


Fig. 3.31

Rezolvare. Reacţiunile sînt egale cu $Y_A = Y_B = P$.

Valorile forţelor tăietoare pe cele trei intervale sînt:

$$T_{A1} = P;\ T_{12} = Y_A - P;$$

$$T_{2-B} = -Y_B = -P.$$

Momentele încovoietoare au expresiile:

$$M_{A1} = Y_A x = Px;$$

pentru $x = 0$ rezultă $M_A = 0$;

pentru $x = a$ rezultă $M_1 = aP$;

$$M_{12} = Y_A(x + a) - Px = Px + Pa - Px = aP = \text{const.};$$

$$M_{2B} = Y_B x = Px;\ \text{pentru } x = 0 \text{ rezultă } M_B = 0;$$

$$\text{pentru } x = a \text{ rezultă } M_2 = aP.$$

3.32. Pentru grinzile în consolă din figura 3.32, a şi b se cere să se traseze diagramele de eforturi T şi M_i.

Rezolvare. a) Din ecuaţiile de echilibru static

$$\sum X_i = 0;\ X_1 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;\ Y_1 - P = 0;$$

$$\sum M_{(1)} = 0;\ M_1 - Pl = 0,$$

rezultă reacţiunile $X_1 = 0$; $Y_1 = P$ şi $M_1 = Pl$.

Scanned with OKEN Scanner

Forța tăietoare este $T_{1-2} = + Y_1 = P = \text{const.}$, iar momentul încovoietor este $M_{1-2} = - Pl + Px$, cu valorile

pentru $x = 0$, $M_1 = - Pl$

pentru $x = l$ $M_2 = 0$.

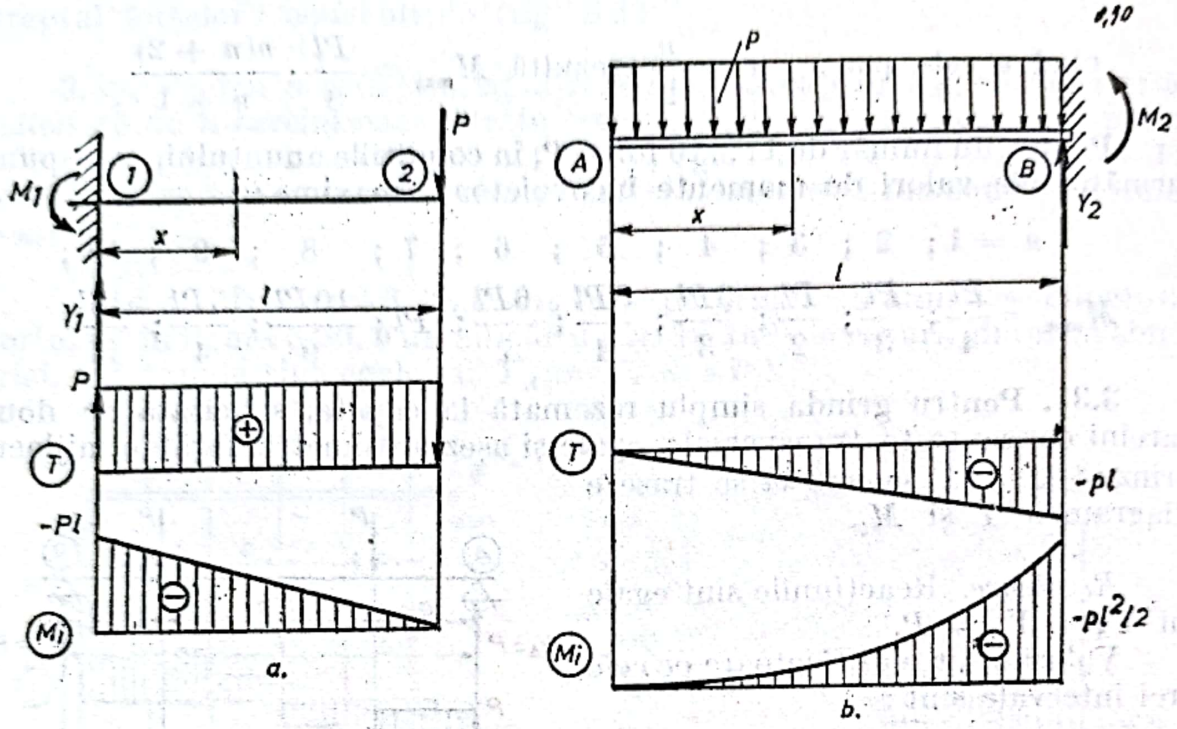


Fig. 3.32

Deci forța tăietoare este constantă și pozitivă iar momentul încovoietor variază liniar.

b) Din ecuațiile de echilibru static

$$\sum X_i = 0; \qquad X_2 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad - pl + Y_2 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad - p \frac{l^2}{2} - M_2 = 0,$$

rezultă: $X_2 = 0$; $Y_2 = pl$ și $M_2 = - pl^2/2$.

Forța tăietoare într-o secțiune oarecare x este

$T_{1-2} = - px$, pentru $x = 0$ rezultă $T_1 = 0$ iar pentru $x = l$, $T_2 = - pl$.

Momentul încovoietor în secțiunea curentă este

$M_{iz} = - px \cdot \frac{x}{2} = - px^2/2$, având o variație parabolică între $M_1 = 0$, pentru $x = 0$ și $M_2 = - pl^2/2$ pentru $x = l$.

3.33. Pentru grinzile simplu rezemate din figura 3.33, *a* și *b* se cere să se traseze diagramele de forțe tăietoare și momente încovoietoare.

R. *a.* $T_{max} = pl/2$; $M_{max} = pl^2/8$

b. $|T_{max}| = p_0 l/3$; $M_{max} = p_0 l^2/9\sqrt{3}$.

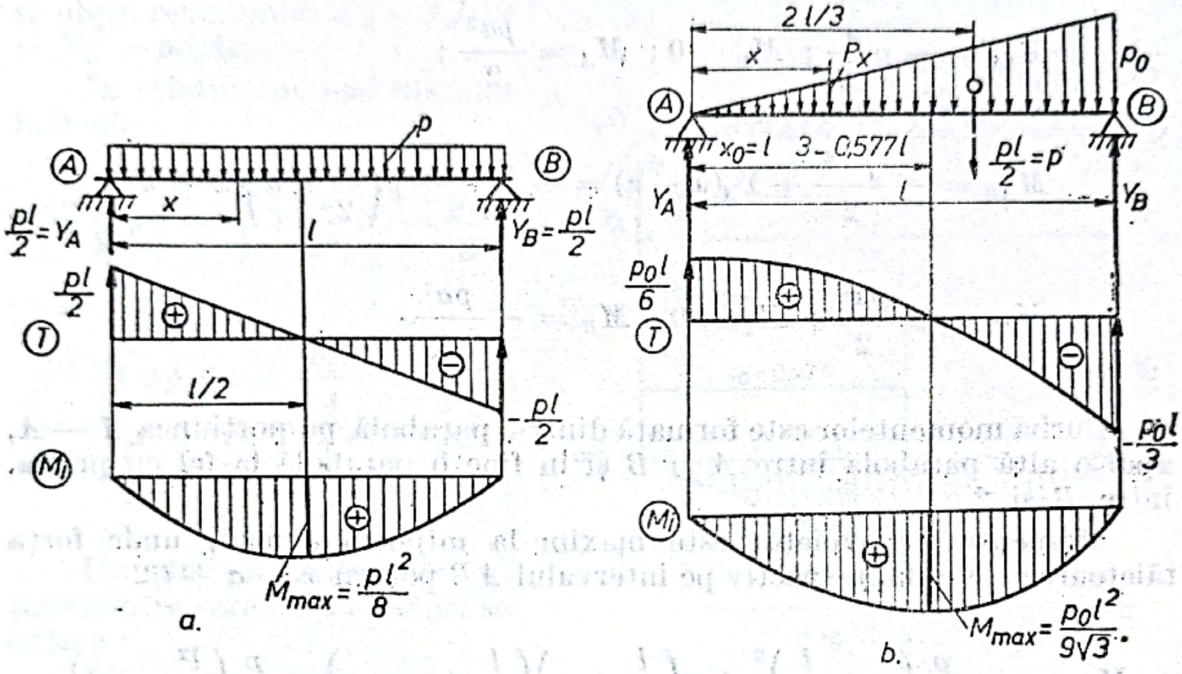


Fig. 3.33

3.34. Pentru grinda simplu rezemată (echivalentă cu piesele de cherestea sau bușteni așezați pe rampe) și cu două console egale, solicitată de o sarcină uniform distribuit de intensitate p (fig. 3.34) se cere să se traseze diagramele de eforturi T și M_i.

Rezolvare. Datorită simetriei reacțiunile din cele două reazeme sînt egale, respectiv

$$Y_A = Y_B = p(0,5l + a).$$

Expresiile forțelor tăietoare sînt:

(1°) $T_{1A} = -px$; $T_1 = 0$;

$T'_A = -pa$;

(2°) $T_{AB} = -px + Y_A =$

$= -px + p\left(\frac{l}{2} + a\right)$;

$T'_A = p\frac{l}{2}$; $T'_B = -p\frac{l}{2}$;

(3°) $T_{B2} = -px$; $T_2 = 0$; $T_B = -pa$.

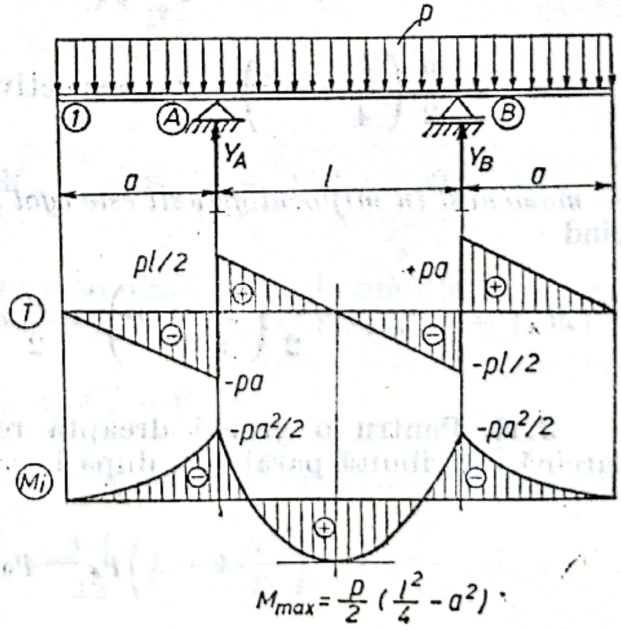


Fig. 3.34

Relaţiile (1°), (2°) şi (3°) arată că dreptele care reprezintă diagrama tăietoare au peste tot aceeaşi înclinare, deci sînt paralele. Se observă că forţa tăietoare trece prin zero în reazeme, iar la mijlocul deschiderii grinzii este egală cu zero.

Momentele încovoietoare au expresiile :

$$M_{1A} = -p\frac{x^2}{2};\quad M_1 = 0;\quad M_A = \frac{pa^2}{2};$$

$$M_{AB} = -\frac{px^2}{2} + Y_A(x-a) = -\frac{px^2}{2} + p\left(\frac{l}{2}+a\right)(x-a);$$

$$M_{2B} = -\frac{px^2}{2};\quad M_2 = 0;\quad M_B = -\frac{pa^2}{2}.$$

Curba momentelor este formată dintr-o parabolă pe porţiunea $1 - A$, apoi o altă parabolă între A şi B şi în fine o parabolă la fel cu prima, între B şi 2.

Momentul încovoietor este maxim la mijlocul grinzii, unde forţa tăietoare este nulă, respectiv pe intervalul AB pentru $x = a + l/2$

$$M_{max} = -\frac{p}{2}\left(a+\frac{l}{2}\right)^2 + p\left(\frac{l}{2}+a\right)\left(\frac{l}{2}+a-a\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4}-a^2\right).$$

Sînt interesante cîteva cazuri particulare :

— *momentul la mijlocul grinzii este nul* cînd

$$\frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4}-a^2\right) = 0,\ \text{respectiv}\ l = 2a\ \text{sau}\ a = 0{,}5\,l;$$

— *momentul în mijlocul grinzii este egal şi de semn contrar cu cel de reazem* cînd

$$|M_A| = |M_{max}|;\ \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4}-a^2\right) = \frac{p}{2}a^2,\ \text{respectiv}\ a = \frac{l}{\sqrt{8}} = 0{,}354\,l.$$

3.35. Pentru o grindă dreaptă realizată din lemn, solicitată de o sarcină distribuită parabolic, după legea (fig. 3.35) :

$$p_x = p_0\frac{x^2}{l^2}$$

se cere să se traseze diagramele de variaţie a forţelor tăietoare şi momentului încovoitor.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Din ecuaţiile de echilibru static

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A + Y_B - P = 0;$$
$$\sum M_{(A)} = 0, \quad Y_B l - P x_G = 0,$$

se obţin reacţiunile $Y_A = p_0 l/12$ şi $Y_B = p_0 l/4$.

În relaţiile de mai sus s-au înlocuit

$$P = \int_0^l p \, \mathrm{d}x = \int_0^l p_0 \frac{x^2}{l^2} \mathrm{d}x = \frac{p_0 l}{3},$$

şi

$$x_G = \frac{\int_0^l x p_x \mathrm{d}x}{\int_0^l p_x \mathrm{d}x} = \frac{\frac{p_0 l^2}{4}}{\frac{p_0 l}{3}} = \frac{3}{4} l.$$

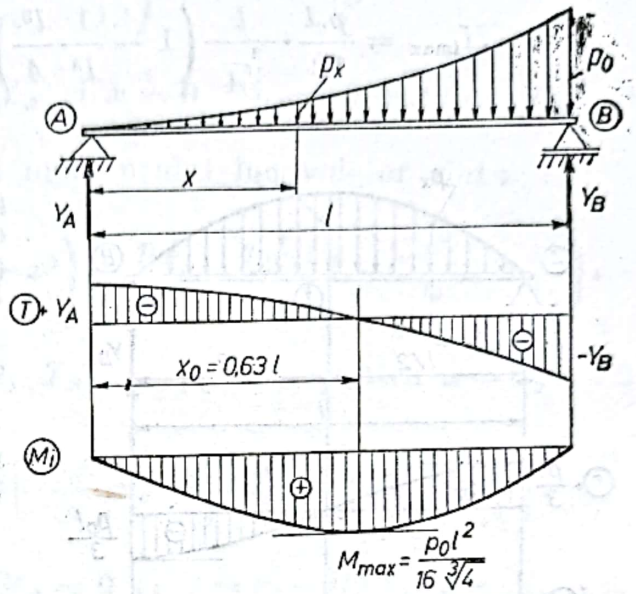


Fig. 3.35

Utilizînd relaţiile diferenţiale dintre sarcini şi eforturi se obţine :

$$\frac{\mathrm{d}T_x}{\mathrm{d}x} = -p_n = -p_0 \frac{x^2}{l^2} \text{ respectiv}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_{ix}}{\mathrm{d}x^2} = -p_0 \frac{x^2}{l^2},$$

Prin integrare se obţine :

$$T_x = -p_0 \frac{x^3}{3l^2} + C_1; \quad M_{ix} = -p_0 \frac{x^4}{12\,l^2} + C_1 x + C_2.$$

Cele două constante de integrare se obţin punînd condiţia că în reazemul A ; deci pentru $x = 0$; $T_A = Y_A$ şi $M = 0$, respectiv

$$\frac{p_0 l}{12} = C_1 \text{ şi } C_2 = 0.$$

Cele două relaţii, ale forţei tăietoare şi momentului încovoietor, devin :

$$T_x = -p_0 \frac{x^3}{3l^2} + \frac{p_0 l}{12} = \frac{p_0 l}{12}\left(1 - 4\frac{x^3}{l^3}\right);$$

$$M_{ix} = -p_0 \frac{x^4}{12l^2} + \frac{p_0 l}{12} x = \frac{p_0 l}{12} x\left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right).$$

Forța tăietoare variază după o parabolă cubică și se anulează pentru $x_0 = l/\sqrt[3]{4} = 0{,}63\,l$.

Momentul încovoietor variază după o parabolă de gradul patru și are valori în reazeme și este maxim pentru $x = x_0$ (unde se anulează forța tăietoare)

$$M_{\max} = \frac{p_0 l}{12} \cdot \frac{l}{\sqrt[3]{4}} \left(1 - \frac{1}{l^3}\,\frac{l^3}{4}\right) = \frac{p_0 l^2}{16\sqrt[3]{4}} = 0{,}0394\,p_0 l^2.$$

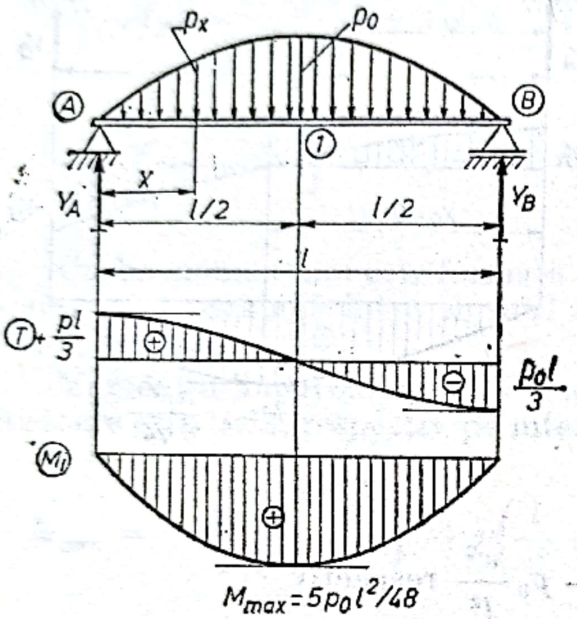


Fig. 3.36

3.36. O sarcină ce solicită o grindă simplu rezemată variază după o lege parabolică, de forma (fig. 3.36) :

$$p_x = Ax^2 + Bx + C.$$

Se cere să se traseze diagramele de forțe tăietoare și momente încovoietoare.

Rezolvare. Constantele A, B și C determină din condițiile : pentru $x = 0$, $p_x = 0$; pentru $x = l$, $p_x = 0$ și pentru $x = l/2$, $p_x = p_0$. Făcînd calculele se obține : $A = -4p_0/l^2$; $B = 4p_0/l$ și $C = 0$, respectiv expresia de variație a sarcinii este

$$p_x = -4\,\frac{p_0}{l^2}\,x^2 + \frac{4p_0}{l}\,x = \frac{4p_0}{l^2}\,x(l - x).$$

Valoarea totală a forței ce solicită grinda este :

$$P = \int_0^l p_x\,\mathrm{d}x = \frac{4p_0}{l^2}\int_0^l (xl - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,p_0 l.$$

Datorită simetriei reacțiunile sînt egale

$$Y_A = Y_B = \frac{P}{2} = \frac{p_0}{3}\,l.$$

Utilizînd relațiile diferențiale dintre sarcini și eforturi

$$\frac{\mathrm{d}T_x}{\mathrm{d}x} = -p_x = -\frac{4p_0}{2}\,x(l - x) \text{ și } \frac{\mathrm{d}M_{ix}}{\mathrm{d}x} = T_x,$$

Scanned with OKEN Scanner

se obţin :

$$T_x = -\frac{4p_0}{l^2}\left(\frac{x^2 l}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1;$$

$$M_{ix} = -\frac{4p_0}{l^2}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1 x + C_2.$$

Din condiţiile $x = 0$, $T_A = Y_A$ şi $x = 0$, $M_{iA} = 0$ rezultă : $C_2 = 0$ şi $C_1 = p_0 l/3$.

Expresiile forţei tăietoare şi momentului încovoietor sînt :

$$T_x = T_{AB} = -\frac{4p_0}{l^2}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{p_0 l}{3} = \frac{p_0 l}{3}\left(1 - 6\frac{x^2}{l^2} + 4\frac{x^3}{l^3}\right),$$

pentru $x = 0$, $T_A = p_0 l/3$; $x = l$, $T_B = -p_0 l/3$ şi pentru $x = x_0 = l/2$ $T = 0$;

$$M_{ix} = -\frac{4p_0}{l^2}\left(\frac{l}{6}x^3 - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{p_0 l}{3}x = \frac{p_0 l}{3}x\left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right),$$

pentru $x = 0$, $M_A = 0$, $x = l$, $M_B = 0$ şi $x = x_0 = l/2$, $M_{i_1} = M_{\max} = 5p_0 l^2/48$.

În figura 3.36 sînt trasate diagramele T şi M_i.

3.37. Pentru grinzile din figura 3.37, *a* şi *b* solicitate de sarcini a căror intensităţi variază după legile :

$$\text{a) } p_x = p_0 \sin\frac{\pi}{l}x \text{ şi b) } p_x = p_0 \sin\frac{2\pi}{l}x,$$

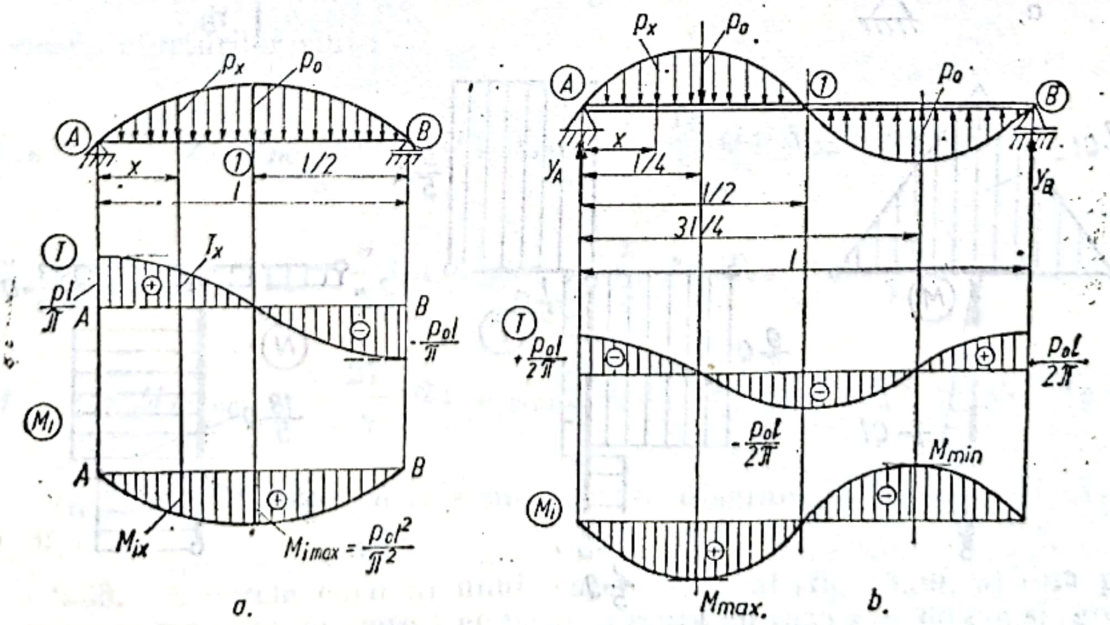


Fig. 3.37

se cere să se traseze diagramele de forţe tăietoare T şi momente încovoietoare M_i.

R. a) $T_{max} = p_0 l/\pi$; $M_{max} = p_0 l^2/\pi^2$;

b) $T_{max} = p_0 l/2\pi$; $M_{max} = p_0 l^2/4\pi^2$.

3.38. Pentru sistemul din figura 3.38, *a* utilizat la ridicarea sarcinilor Q se cere să se traseze diagramele de eforturi N, T şi M_i.

Rezolvare. Neglijînd raza rolei C, sistemul de bare este descompus în elementele componente ca în figura 3.38, *b*.

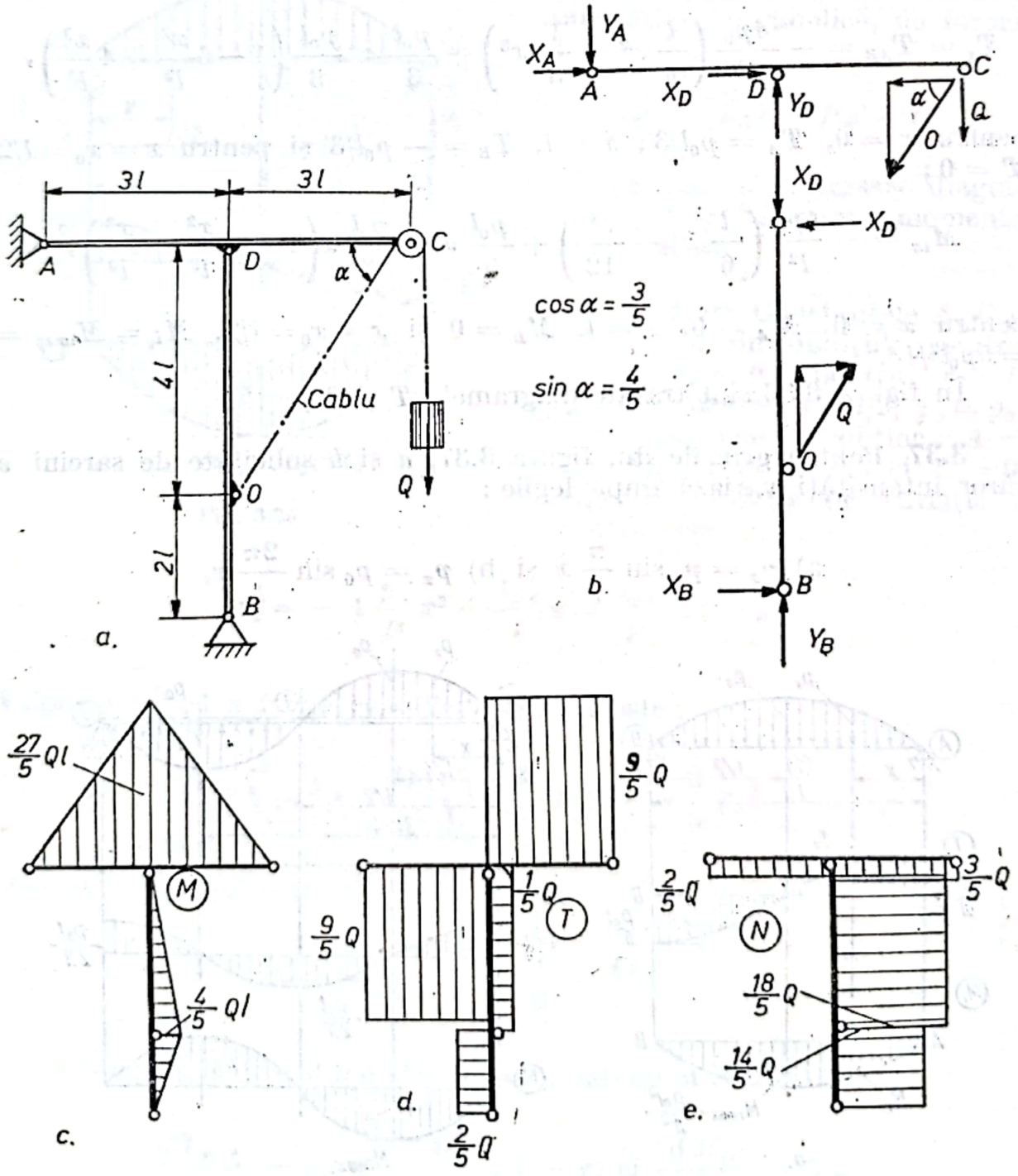


Fig. 3.38

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuațiile de echilibru static
— pentru bara ADC:

$$\sum X_i = 0;\ X_A + X_D - \frac{3}{5}Q = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;\quad -Y_A + Y_D - \frac{4}{5}Q - Q = 0;$$

$$\sum M_{(D)} = 0;\ 3Y_A l - 3\left(\frac{4}{5}+1\right)Ql = 0;$$

— pentru bara DB:

$$\sum X_i = 0;\ -X_D + \frac{3}{5}Q + X_B = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;\ -Y_D + \frac{4}{5}Q + Y_B = 0;$$

$$\sum M_{(D)} = 0;\ \frac{3}{5}Q \cdot 4l + 6X_D l = 0,$$

se obțin reacțiunile exterioare și interioare

$$X_A = \frac{2}{3}Q;\ X_B = -\frac{3}{5}Q;\ X_D = \frac{1}{5}Q;\ Y_A = \frac{9}{5}Q;\ Y_B = \frac{14}{5}Q \text{ și}$$

$$Y_D = \frac{18}{5}Q.$$

Valorile eforturilor sînt:

$$N_{AD} = -\frac{2}{5}Q;\ N_{DC} = -\frac{3}{5}Q;\ N_{DO} = -\frac{18}{5}Q;\ N_{OB} = -\frac{14}{5}Q;$$

$$T_{AD} = -\frac{9}{5}Q;\ T_{DC} = \frac{9}{5}Q;\ T_{DO} = -\frac{1}{5}Q;\ T_{OB} = +\frac{2}{5}Q;$$

$$M_C = 0;\ M_{D(ADC)} = -\frac{27}{5}Ql;\ M_{D(DOB)} = 0;\ M_A = 0;\ M_0 = \frac{4}{5}Ql,\ M_B = 0.$$

În figurile 3.38, *c*, *d* și *e* sînt trasate diagramele de eforturi N, T și M_i.

3.39. Arborele cotit al unui gater vertical (fig. 3.39, *a*) este pus în mișcare prin curele, care trec peste o roată cu raza $r = 60$ cm și greu-

tatea $Q = 600$ daN. Efortul din ramura conducătoare a curelei este $S_1 = 4$ $S = 400$ daN. Forţa din planul arborelui, dată de bielă este $P = 3000$ daN. Să se determine forţa P_1 normală pe planul sistemului şi să se construiască apoi diagramele de eforturi N, T, M_i şi M_t.

Rezolvare. Forţele din curea se reduc, în raport cu punctul pe axa AB la o forţă $S' = 4\,S + S = 5\,S = 500$ daN şi la un cuplu de torsiune $M_{tj} = 4\,Sr - Sr = 3\,Sr = 18\,000$ daN. cm.

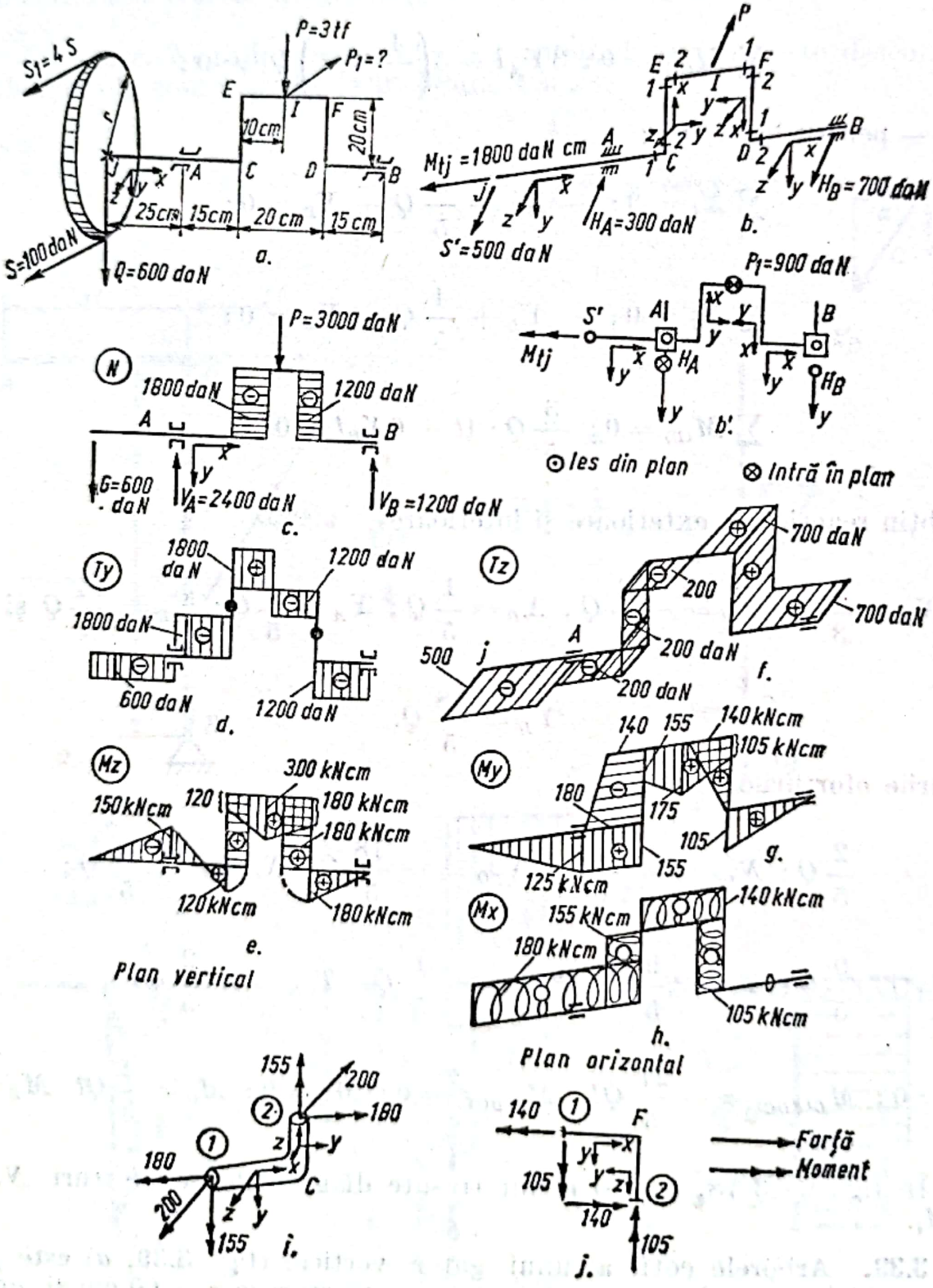


Fig. 3.39

Din ecuaţia de echilibru

$$\sum M_x = 0;\ M_{t_j} - P_1 \cdot 20 = 0,\ \text{se obţine}\ P_1 = 900\ \text{daN}.$$

Sistemul fiind plan, forţele exterioare care îl solicită se pot grupa în forţe situate în planul lui (verticale, fig. 3.39, *b*) şi forţe normale pe planul lui (orizontale, fig. 3.39, *b'*).

Forţele din planul vertical produc forţele axiale N (fig. 3.39, *c*), forţele tăietoare T_y (fig. 3.39, *d*) şi momentele încovoietoare M_z (fig. 3. 39, *e*) ale căror diagrame s-au construit ca pentru un cadru plan.

Sub acţiunea *forţelor normale pe planul sistemului* (orizontale) în reazemele (lagărele) A şi B apar reacţiunile H_A şi H_B, a căror valoare rezultă din ecuaţiile de echilibru, respectiv $H_A = 300$ daN şi $H_B = 700$ daN.

Diagrama forţelor tăietoare T_z este prezentată în figura 3.39, *f*. Întrucît T_z = const., pe fiecare porţiune, momentul încovoietor M_y variază liniar şi, ca atare, sînt necesare, pentru trasarea diagramei, numai valorile momentelor la extremităţile intervalelor, respectiv :

$$M_{yA} = 500.25 = 12500\ \text{daN}\cdot\text{cm};\ M_{yC_1} = 500.40 - 300.15 = 13500\ \text{daN}\cdot\text{cm};$$

$$M_{yC_2} = -M_{tAB} = -18000\ \text{daN}\cdot\text{cm};\ M_{yE_1} = -18000 + 200.20 =$$

$$= 14000\ \text{daN}\cdot\text{cm};$$

$$M_{yE_2} = M_{yC_1};\ M_{y_1} = M_{D_2} = 200.10 = 17500\ \text{daN}\cdot\text{cm};$$

$$M_{yF_1} = 16500 - 700.10 = 10500\ \text{daN}\cdot\text{cm};\ M_{yF_2} = 700.20 = 14000\ \text{daN}\cdot\text{cm};$$

$$M_{yD_1} = 0;\ M_{yD_2} = 700.15 = 10500\ \text{daN}\cdot\text{cm}.\ \text{(fig. 3.39, } g).$$

Momentul de torsiune $M_t = M_x$ (fig. 3.39, *h*) este constant pe fiecare porţiune dreaptă; $M_{tyAC} = 18000$ daN·cm; $M_{tCE} = -500.400 + 300.15 = -15500$ daN·cm; $M_{tEF} = -700.20 = -14000$ daN·cm; $M_{tFD} = 700.15 = 10500$ daN·cm.

În figura 3.39, *i* se verifică echilibrul momentelor din nodul C iar în figura 3.39, *j* din nodul F.

Observaţie. În figura 3.39 s-au notat momentele în kN.m.

3.40. Pentru grinzile din figura 3 ·40, *a*, . . . , *f* se cere să se traseze diagramele de eforturi N, T şi M_t.

R. v. figura 3.40, *a* . . . *f*.

3.41. Pentru grinda spaţială din figura 3.41, *a* se cere să se traseze diagramele de eforturi N, T, M_t şi M_i. Forţa concentrată $P = ap$ este orizontală, paralelă cu bara AB şi perpendiculară pe planul format din barele $BCDE$; forţa concentrată $2P = 2pa$ este verticală, perpendiculară pe bara AB şi se găseşte în planul barelor CD, BC şi DE; forţa distribuită p este verticală. Unghiurile dintre bare în punctele B, C şi D sînt drepte. Direcţia axelor x, y şi z este cea din figură, reprezentată pe fiecare zonă. Cotele se consideră din centrele de greutate ale fiecărei bare.

Scanned with OKEN Scanner

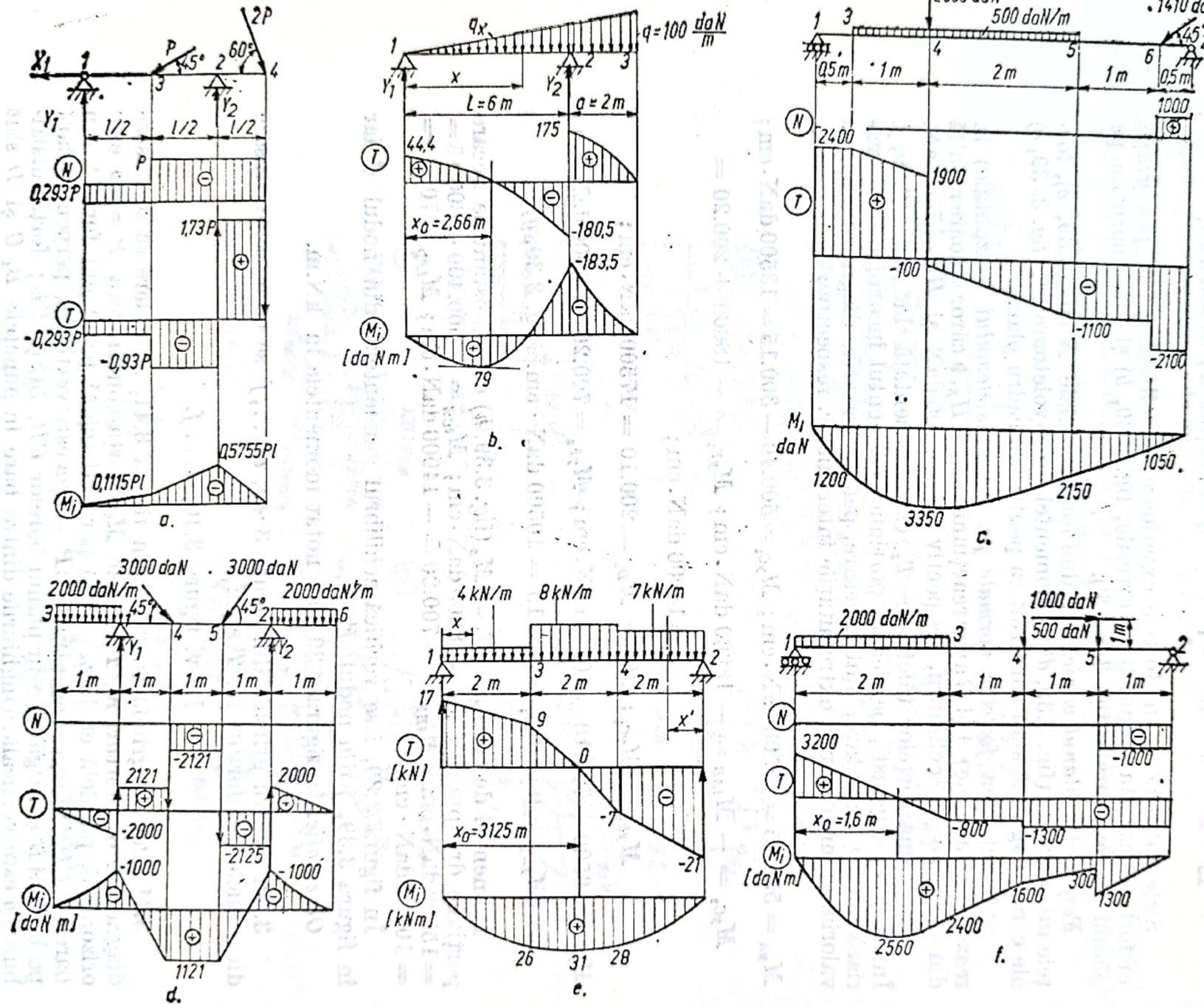

a.
b.
c.
d.
e.
f.
2P
P
45°
60°
1/2
1/2
1/2
0,293P
1,73P
-0,293P
-0,93P
0,1115Pl
0,5755Pl
q=100 daN/m
L=6 m
a=2 m
44,4
175
-180,5
-183,5
x₀=2,66 m
79
[da N m]
2000 daN
500 daN/m
1410 daN
0,5 m
1 m
2 m
1 m
0,5 m
24,00
1900
-100
-1100
-2100
1000
1200
3350
2150
1050
3000 daN
3000 daN
2000 daN/m
2000 daN/m
-2121
2121
2000
-2000
-2125
-1000
-1000
1121
4 kN/m
8 kN/m
7 kN/m
17
9
0
-7
-21
x₀=3125 m
[kN]
[kNm]
26
31
28
1000 daN
500 daN
3200
-1000
-800
-1300
x₀=1,6 m
1600
300
1300
2400
2560

Fig. 3.40

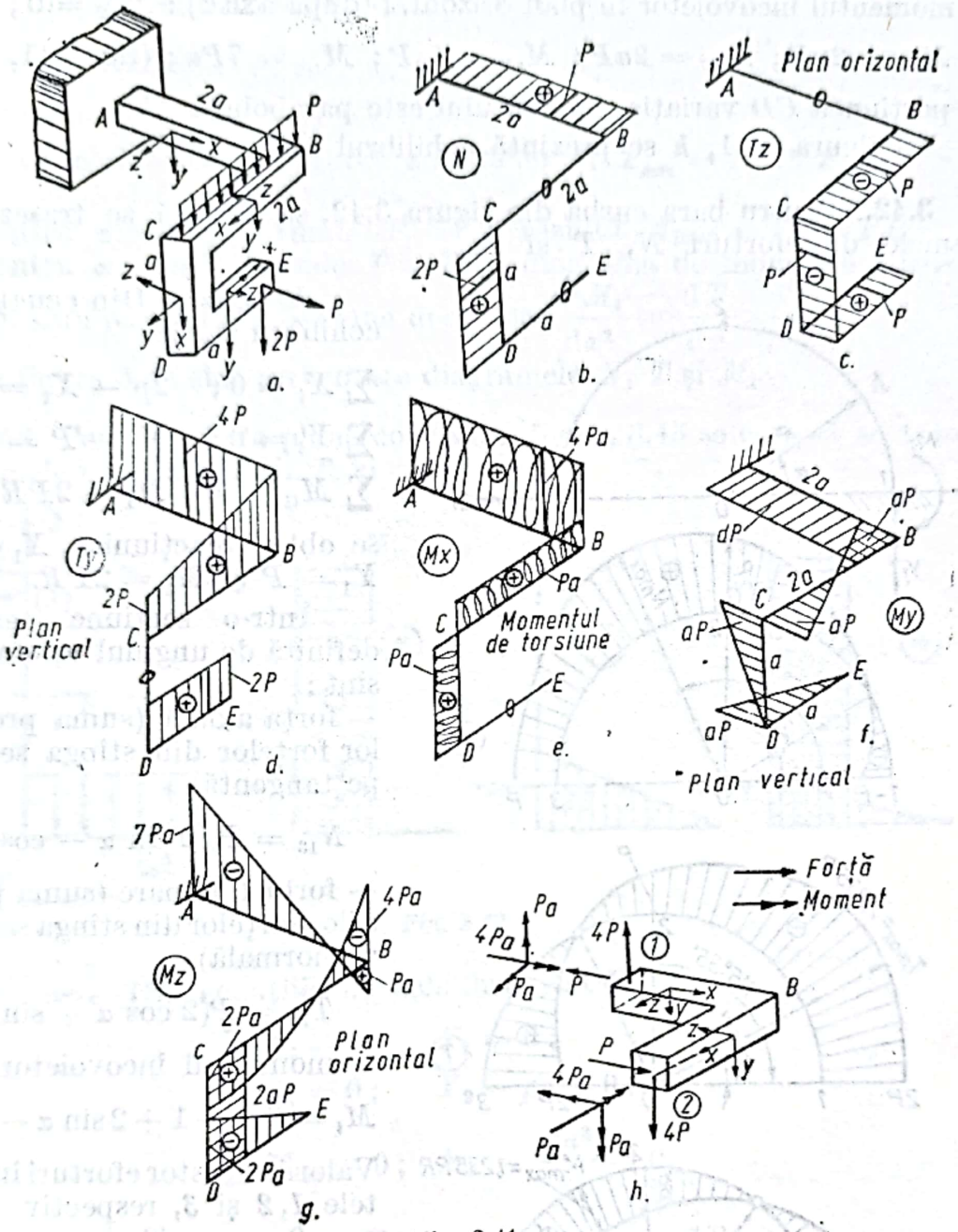


Fig. 3.41

Rezolvare. Eforturile axiale pe fiecare porțiune sînt :

— forța axială : $N_{DC} = +2P$; $N_{AB} = +P$ (fig. 3.41, *b*) ;

— forța tăietoare (în plan orizontal) : $T_{ED} = P$; $T_{DC} = P$; $T_{CB} = P$ (fig. 3.41, *c*)

— forța tăietoare (în plan vertical) : $T_{ED} = 2P$; $T_C = 2P$; $T_B = 4P$; $T_{BA} = 4P$; (fig. 3.41, *d*),

— momentul de torsiune : $M_t = M_x$; $M_{DC} = aP$; $M_{CB} = aP$; $M_{AB} = 4aP$; (fig. 3.41, *e*) ;

— momentul de încovoiere în plan vertical (după axa y) : $M_{yE} = 0$; $M_{yD} = aP$;

$$M_{yC} = aP \; ; \; M_{yB} = -AP \; ; \; M_{yA} = -aP \text{ (fig. 3.41, } f) \; ;$$

— momentul încovoietor în plan orizontal (după axa z) : $M_{zE} = 0$;

$M_{zD} = 2aP$; $M_{zC} = 2aP$; $M_{zB} = 4aP$; $M_{zA} = 7Pa$; (fig. 3.41, g) ;

pe porțiunea CD variația momentului este parabolică.

În figura 3.41, h se prezintă echilibrul nodului B.

3.42. Pentru bara curbă din figura 3.42, se cere să se traseze diagramele de eforturi N, T și M_i.

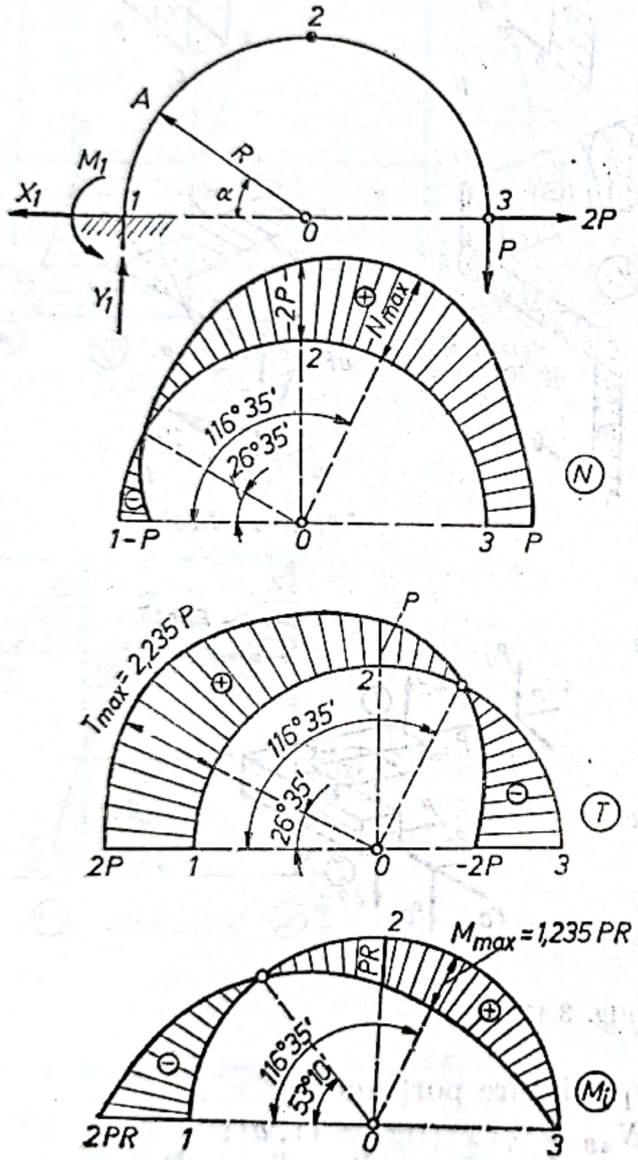


Fig. 3.42

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru static

$$\sum X_i = 0 ; \quad 2p - X_1 = 0 ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; \quad Y_1 - P = 0 ;$$

$$\sum M_{(1)} = 0 ; \quad M_1 - 2PR = 0,$$

se obțin reacțiunile $X_1 = 2P$; $Y_1 = P$ și $M_1 = 2PR$.

Într-o secțiune oarecare, definită de unghiul α, eforturile sînt :

— forța axială (suma proiecțiilor forțelor din stînga secțiunii pe tangentă)

$$N_{13} = P\,(2 \sin \alpha - \cos \alpha) ;$$

— forța tăietoare (suma proiecțiilor forțelor din stînga secțiunii pe normală)

$$T_{13} = P(2 \cos \alpha + \sin \alpha) ;$$

— momentul încovoietor

$$M_i = PR(-1 + 2 \sin \alpha - \cos \alpha).$$

Valorile acestor eforturi în punctele *1*, *2* și *3*, respectiv pentru $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$ și $\alpha = \pi$, sînt :

$$N_1 = -P ; \quad T_1 = 2P ;$$
$$M_1 = -2PR ;$$

$$N_2 = 2P ; \quad T_2 = P ;$$
$$M_2 = PR ;$$

$$N_3 = P ; \quad T_3 = -2P ; \quad M_3 = 0.$$

Pe baza expresiilor eforturilor se obțin punctele unde acestea se anulează sau au valori maxime, respectiv :

din $N_{13} = 0$, rezultă $\alpha = 26°35'$;

din $T_{13} = 0$, rezultă $\alpha = 116°35'$;

Scanned with OKEN Scanner

din $M_{13} = 0$, rezultă $\alpha = 53°10'$

din $\frac{dN_{13}}{d\alpha} = 0$, rezultă $\alpha = 116°35'$;

din $\frac{dT_{13}}{d\alpha} = 0$, rezultă $\alpha = 26°35'$ și $T_{max} = 2{,}235\ P$.

Pentru $\alpha = 116°35'$ (unde $T_{13} = 0$) rezultă $M_{imax} = 1{,}235\ PR$.
Pentru $\alpha = 26°35'$ (unde $T = T_{max}$) diagrama de momente încovoietoare are un punct de inflexiune deoarece $\frac{d^2M_i}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = 0$.

În figura 3.42 sînt prezentate diagramele N, T și M_i.

3.43. Pentru grinda plană cotită din figura 3.43 se cere să se traseze diagramele de eforturi N, T și M_i.

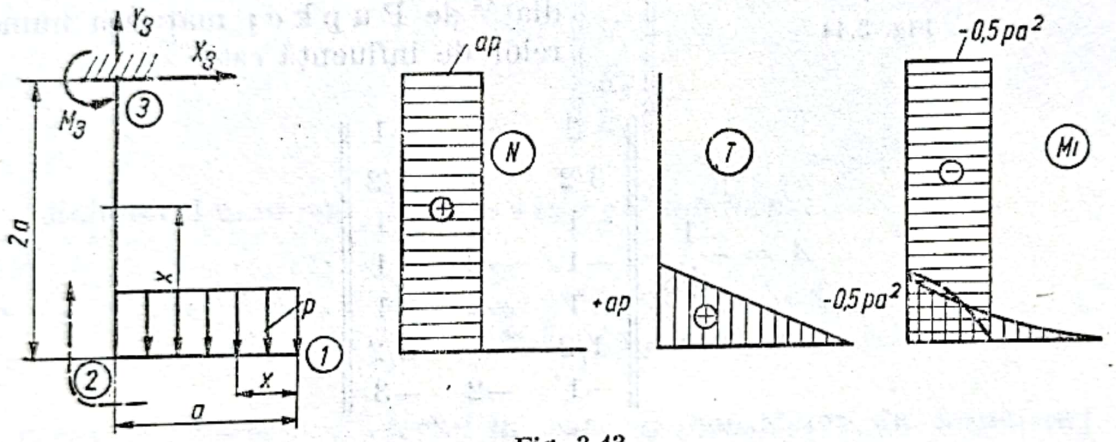


Fig. 3.43

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru static

$$\sum X_i = 0; \quad X_3 = 0;$$
$$\sum X_i = 0; \quad Y_3 - pa = 0;$$
$$\sum M_{(3)} = 0; \quad M_3 - \frac{pa^2}{2} = 0,$$

se obțin reacțiunile: $X_3 = 0$, $Y_3 = pa$ și $M_3 = pa^2/2$.

Pentru reprezentarea diagramelor N, T și M_i se parcurge grinda cotită de la punctul *1* spre *2* și *3*.

Astfel se obțin:

— forța axială: $N_{12} = 0$; $N_{23} = +ap$;

— forța tăietoare: $T_{12} = +px$; $T_1 = 0$; $T_2 = ap$;

— momentul încovoietor: $M_{22} = -px \cdot \frac{x}{2} = -\frac{px^2}{2}$; $M_1 = 0$;

$$M_2 = -\frac{pa^2}{2};$$

$$M_{23} = -\frac{pa \cdot a}{2} = -\frac{pa^2}{2}; \quad M_3 = -\frac{pa^2}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

La calculul și la așezarea diagramelor de eforturi se păstrează convenția de sens de la grinzile drepte. Diagrama momentelor încovoietoare se așază în dreptul fibrelor întinse prin încovoiere. În colțul *2*, unde se îmbină rigid două bare, în unghi drept, momentul încovoietor se rabate de pe o porțiune pe cealaltă, în schimb forța tăietoare trece în forța axială și invers.

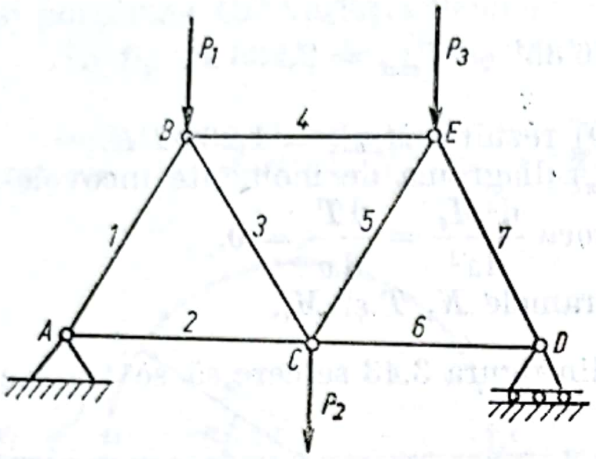


Fig. 3.44

3.44. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 3.44, format din 7 bare egale.

Rezolvare. Problema a fost studiată de P u p k e; matricea numerelor de influență este

$$A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Se observă că forma și sarcinile sînt simetrice, deci și matricea este simetrică, iar un efort oarecare va fi, de exemplu:

$$N_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-P_1 + 2P_2 + P_3).$$

3.45. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 3.45, *a*, simplu rezemată în nodul *1* și articulată în nodul *7*.

Rezolvare. Se adoptă un sistem de referință *xAy* și se exprimă forțele exterioare prin componente față de aceste axe. Astfel, forțele exterioare dintr-un nod și vor forma vectorul coloană:

$$\|F_i\| = \begin{Vmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{Vmatrix}.$$

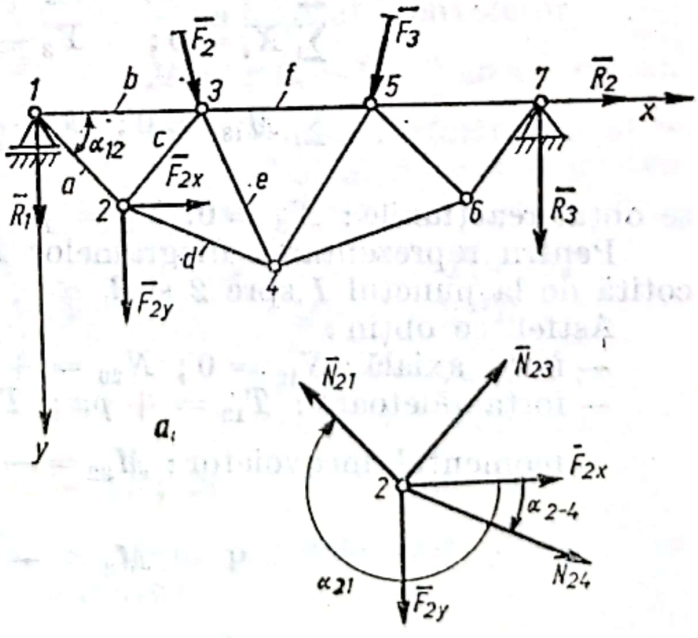


Fig. 3.45

Totalitatea forțelor din noduri se constituie într-o matrice coloană $(2n \times 1)$:

$$\|F\| = \left\| \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{matrix} \right\|.$$

Eforturile în bare, notate $N_a, N_b, \ldots$, precum și reacțiunile se constituie, de asemenea, într-un vector coloană $(2n \times 1)$:

$$\|N\| = \left\| \begin{matrix} N_a \\ N_b \\ \vdots \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \right\|.$$

Echilibrul unui nod oarecare i se scrie sub forma

$$\left\| \begin{matrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} R_{ix} \\ R_{iy} \end{matrix} \right\| + \sum_j \left\| \begin{matrix} \cos \alpha_{ij} & 0 \\ \sin \alpha_{ij} & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} N_{ij} \\ 0 \end{matrix} \right\| = 0,$$

în care: N_{ij} reprezintă efortul în bara ij considerat de întindere; R_i eventualele reacțiuni din nodul i; α_{ij} unghiul pe care-l face axa x cu direcția barei ij, avînd orientarea de la i spre $j (i \to j)$; j ia valorile corespunzătoare tuturor barelor care pleacă din nodul i.

Astfel pentru grinda cu zăbrele, rezultă:

$$\left\| \begin{matrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ \vdots \\ F_{7x} \\ F_{7y} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_{12} & \sin \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{21} & 0 & \cos \alpha_{23} & \cos \alpha_{24} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_{21} & 0 & \sin \alpha_{23} & \sin \alpha_{24} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{34} & \cos \alpha_{35} & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{31} & \sin \alpha_{32} & \sin \alpha_{34} & \sin \alpha_{35} & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} N_a \\ N_b \\ N_c \\ N_d \\ N_e \\ N_f \\ \vdots \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

sau în formă condensată

$$\|F\| + \|T\| \cdot \|N\| = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă matricea — vector a necunoscutelor

$$\|N\| = -\|T\|^{-1}\|F\|.$$

3.46. Să se determine reacţiunile din articulaţia A şi reazemul D, pentru bara AD pentru grinda de lemn din figura 3.46.

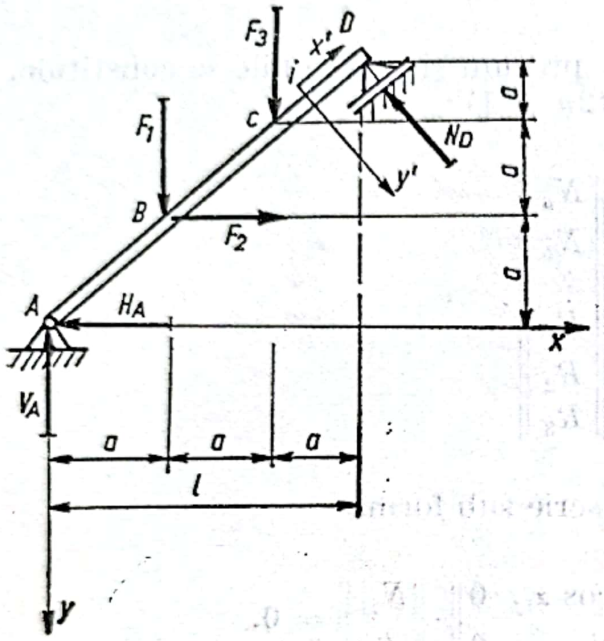


Fig. 3.46

Rezolvare. Pornind de la eforturile de secţiune N, T, M definite pentru situaţia sistemelor plane cu forţe în planul lor, se defineşte vectorul eforturilor (3×1), într-o secţiune curentă i în forma:

$$\|Q_i\| = \left\|\begin{matrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{matrix}\right\|.$$

Pentru grinda din figura 3.46, expresia vectorului $\|Q_i\|$, secţiunea i, aflîndu-se între C şi D, este:

$$\|Q_i\| = \left\|\begin{matrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \left(\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y_i & x_i & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} H_A \\ V_A \\ 0 \end{matrix}\right\| + \right.$$

$$\left. + \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(y_i-a) & (x_i-a) & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} -F_2 \\ -F_1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(y_i-2a) & (x-2a) & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 \\ -F_3 \\ 0 \end{matrix}\right\| \right),$$

în care:

$$\left\|\begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \|L\|$$

este matricea cosinusurilor directori pentru un sistem plan.

Dacă se particularizează vectorul eforturilor în punctul D, ţinînd seama că:

$$\|Q_D\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ -N_D \\ 0 \end{matrix}\right\|$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține condiția matriceală:

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ -N_D \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} H_A - F_2 \\ V_A - F_1 - F_3 \\ 3a \cdot H_A + 3a \cdot V_A - 2a \cdot F_1 - a \cdot F_3 \end{Vmatrix},$$

care reprezintă sistemul de ecuații de echilibru, din care se determină reacțiunile H_A, V_A și N_D.

3.47. O placă de lemn, de formă pătrată și de grosime constantă, $OABC$, este menținută în poziție orizontală prin articulația sferică O, cablul CD și barele EE' și FF' ca în figura 3.47. În punctul G, mijlocul laturii BC, este aplicată o greutate P, egală cu cea a plăcii. Să se determine reacțiunile din legături.

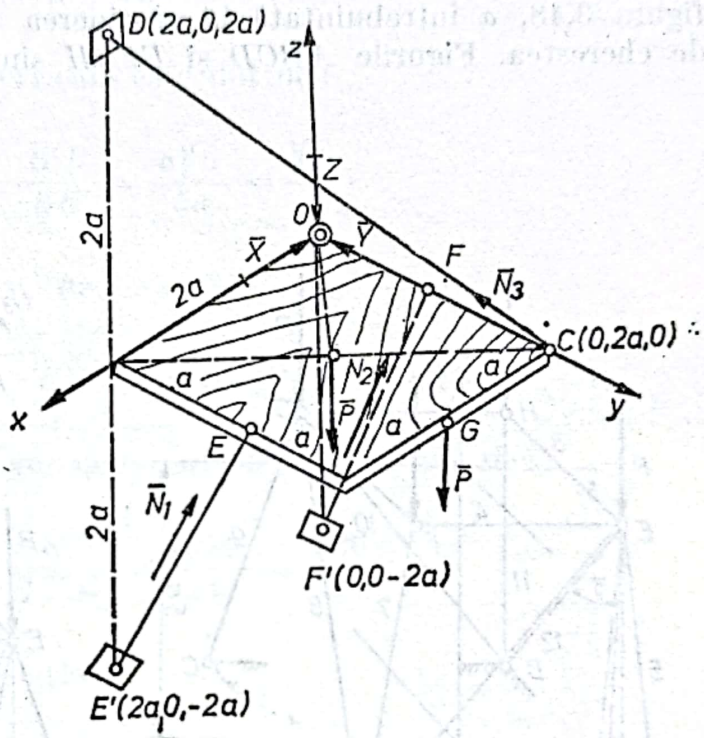


Fig. 3.47

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum X_i = 0; \quad \frac{N_3}{\sqrt{3}} - X = 0; \\
&\sum Y_i = 0; \quad \frac{N_1}{\sqrt{5}} + \frac{N_2}{\sqrt{5}} - \frac{N_3}{\sqrt{3}} - Y = 0; \\
&\sum Z_i = 0; \quad \frac{2N_1}{\sqrt{5}} + \frac{2N_2}{\sqrt{5}} + \frac{N_3}{\sqrt{3}} - Z - 2P = 0; \\
&\sum M_{ix} = 0; \quad \frac{2N_1}{\sqrt{5}}\,a + \frac{2N_2}{\sqrt{5}}\,a + \frac{N_3}{\sqrt{3}} \cdot 2a - 3aP = 0; \\
&\sum M_{iy} = 0; \quad \frac{2N_1}{\sqrt{5}} \cdot 2a + 2a \cdot P = 0; \\
&\sum M_{iz} = 0; \quad \frac{N_1}{\sqrt{5}} \cdot 2a - \frac{N_3}{\sqrt{3}} \cdot 2a = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinut, rezultă :

$$N_1 = N_2 = P\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad N_3 = \frac{P\sqrt{3}}{2}; \; X = Y = Z = \frac{P}{2}.$$

3.48. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 3.48, *a* întrebuinţată la susţinerea unui rezervor într-o fabrică de cherestea. Figurile *ABCD* şi *EFGH* sînt două pătrate de laturi $3a$

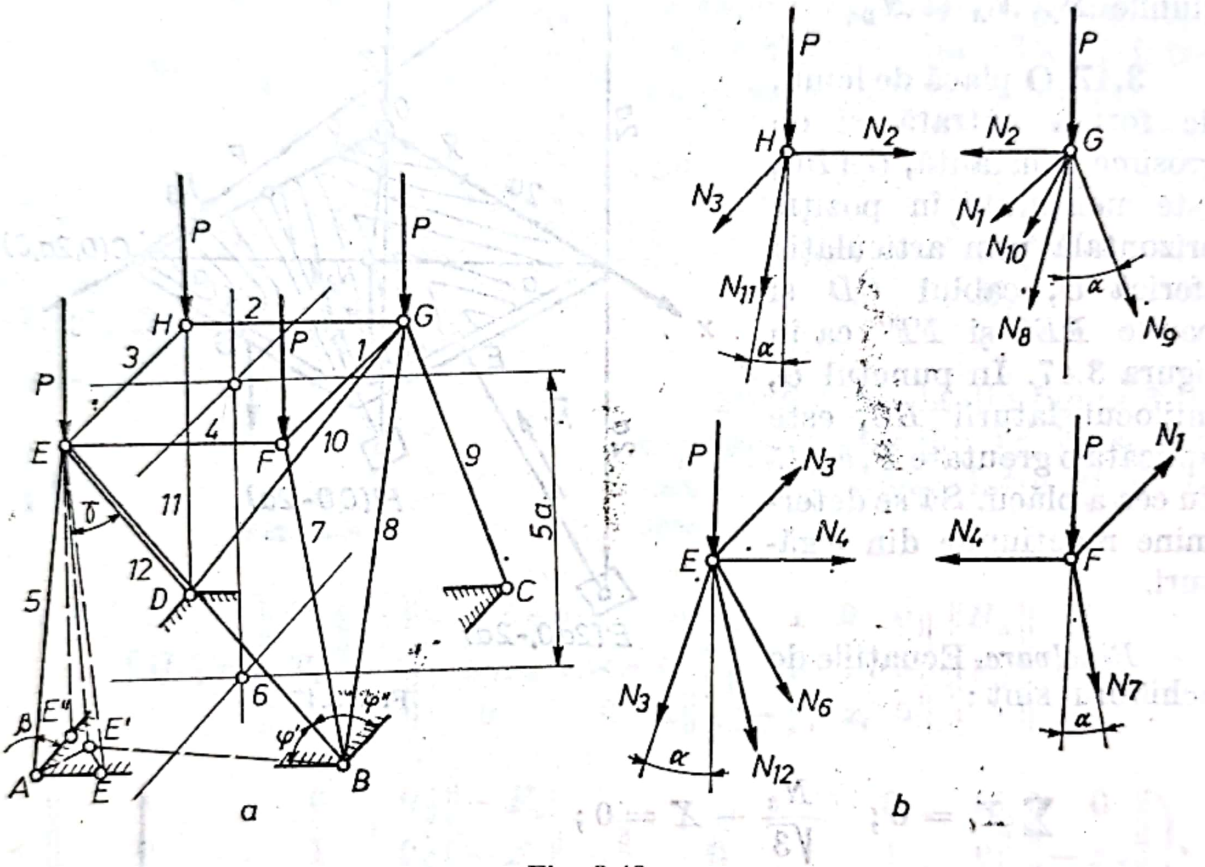


Fig. 3.48

respectiv *a*, planele lor fiind ambele orizontale şi situate la distanţa $5a$ unul de celălalt. Forţele P sînt verticale.

Rezolvare. Grinda cu zăbrele are în total 12 bare, deci prezintă 12 necunoscute, eforturile din bare. Se pot scrie cîte trei ecuaţii de echilibru pentru fiecare din nodurile E, F, B, H ; vom obţine deci $3.4 = 12$ ecuaţii ; eforturile din toate barele grinzii pot fi, deci complet determinate. Reacţiunile transmise plăcii de fundaţie sînt egale şi direct opuse rezultantei eforturilor din bare, respectiv din punctele A, B, C şi D.

Figura formată de barele sistemului este un trunchi de piramidă regulată, muchiile ei făcînd cu laturile pătratului de bază unghiurile date de :

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{26}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Unghiurile muchiilor cu verticala sînt date de :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AE'}{EE'} = \frac{a\sqrt{2}}{5a} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Verificare :

$$2\cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1.$$

Unghiul unei diagonale cu verticala este dat de :

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{E'B}{EE'} = \frac{a\sqrt{5}}{5a} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Distanța EE''' este dată de :

$$EE''' = \sqrt{\overline{EE'}^2 + \overline{EE'''}^2} = \sqrt{(5a)^2 + a^2} = a\sqrt{26},$$

iar unul dintre unghiurile diagonale cu orizontala este dat de

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\overline{EE'''}}{\overline{E'''B}} = \frac{a\sqrt{26}}{2a} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Celălalt unghi rezultă din relația

$$\cos\varphi'' = \sqrt{1 - \cos^2\gamma - \cos^2\varphi'} = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Toate elementele geometrice fiind determinate, ecuațiile de echilibru ale nodurilor E și F sînt (fig. 3.48, *b*) :

— pentru nodul E :

$$\sum X_i = 0\,; \quad N_4 + N_6\cos\varphi' + N_{12}\cos\varphi'' - N_5\cos\beta = 0\,;$$

$$\sum Y_i = 0\,; \quad N_3 + N_6\cos\varphi'' + N_{12}\cos\varphi' - N_5\cos\beta = 0\,;$$

$$\sum Z_i = 0\,; \quad -P - N_6\cos\gamma - N_{12}\cos\gamma - N_5\cos\alpha = 0\,;$$

— pentru nodul F :

$$\sum X_i = 0\,;\ N_1 - N_7\cos\beta = 0\,;$$

$$\sum Y_i = 0\,;\ N_4 - N_7\cos\beta = 0\,;$$

$$\sum Z_i = 0\,;\ -P - N_7\cos\alpha = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultimele trei ecuații, ținînd seama și de simetria grinzii, rezultă:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -\frac{P}{5};\ N_7 = N_{11} = -\frac{\sqrt{27}}{5}P.$$

Introducînd aceste valori în sistemul de ecuații de echilibru al nodului E, se obține un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute N_5, N_4, N_{12}, care rezolvat conduce la:

$$N_5 = \frac{\sqrt{27}}{5}\cdot P;\ N_6 = N_{12} = 0.$$

În baza simetriei, rezultă

$$N_9 = N_5 = \frac{\sqrt{27}}{5}P;\ N_{10} = N_6 = 0;\ N_{12} = N_8 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

FENOMENUL FRECĂRII ÎN SISTEME MECANICE DIN ECONOMIA FORESTIERĂ

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

4.1. GENERALITĂȚI

Practica a demonstrat că ipotezele simplificatoare, admise în mecanică, pot conduce la rezultate ce nu reflectă realitatea decît cu o aproximație ce nu se poate neglija în toate cazurile.

În timpul mișcării relative a două corpuri, pe suprafețele de contact apar forțe ce se opun mișcării, numite *forțe de frecare*, deoarece suprafețele corpurilor în contact nu pot fi perfect netede, în urma prelucrării ele prezentînd asperități și neregularități (fig. 4. *a*).

Frecarea joacă un dublu rol în tehnică, fiind pe de o parte utilă, asigurînd stabilitatea și mișcarea corpurilor, deplasarea vehiculelor, transmiterea mișcării prin curele, roți cu fricțiune. Frecarea apare, de asemenea, la frînele pentru stăpînirea mișcării, în procesul tehnologic de prelucrare a lemnului etc.

Frecare este, pe de altă parte dăunătoare, deoarece micșorează randamentul mașinilor, produce uzuri în cuplele cinematice ale mecanismelor și mașinilor (lagăre, angrenaje, ghidaje etc.).

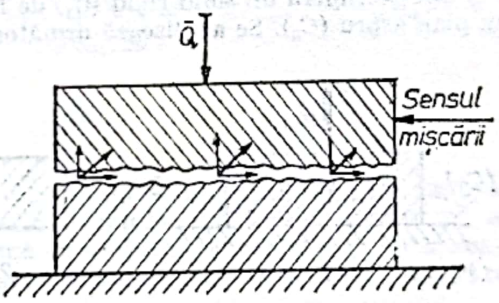


Fig. 4.a

Pentru a stabili categoriile de frecare, se consideră două corpuri (C_1) și (C_2) în contact (fig. 4.*b*), sub acțiunea unor forțe de apăsare reciprocă. Presupunînd corpurile așa cum sînt ele în realitate, deformabile, contactul dintre ele va avea loc în cuprinsul unei suprafețe Ω aparținînd unui plan (π). Corpul (C_2) se presupune fix, iar asupra corpului (C_1) acționează un sistem de forțe

$$F_i, (i = 1,2,\ldots, n).$$

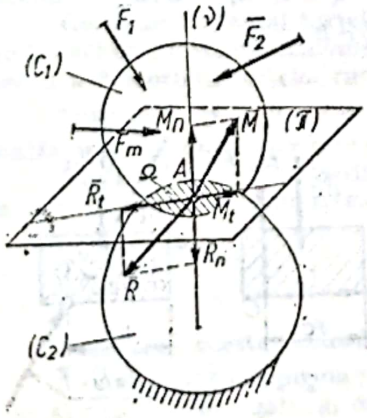


Fig. 4.b

Reducînd acest sistem de forțe în punctul A de contact al celor două corpuri, se obține un torsor avînd ca elemente de reducere forța rezultantă $\bar{R}$ și momentul rezultant $\bar{M}$. Elementele torsorului de reducere pot fi descompuse în componente după direcția normalei comune în planul de contact și dreapta din planul tangent (π). Efectul mecanic al celor patru componente vectoriale este pus în evidență de patru tendințe de mișcare concomitente. Astfel componenta $\bar{R}_n$ tinde să deplaseze corpul (C_1) pe direcția normală, desprinzîndu-l de corpul fix (C_2) sau apăsîndu-l. În cea de a doua ipoteză, corpul (C_2) reacționează cu o forță egală și de sens contrar,

$$\bar{N} = -\bar{R}_n. \qquad (4.1)$$

Componenta $\bar{R}_t$ tinde să deplaseze corpul în planul tangent ; considerînd suprafața aspră, mișcarea are loc numai

dacă forța $\bar{R}_t$ depășește valoarea forței de frecare de alunecare, definită de Coulomb

$$T_{max} \leqslant \mu N. \tag{4.2}$$

Componenta $\bar{M}_n$ poate antrena corpul într-o mișcare de rotație în jurul normalei, numită mișcare de pivotare. Dacă suprafața este aspră, mișcarea de pivotare întîmpină momentul forțelor de frecare, care depinde de apăsarea normală prin coeficientul de pivotare ν, numit *moment de pivotare*.

$$M_\nu \leqslant \nu N. \tag{4.2}$$

Componenta $\bar{M}_t$ rotește corpul în planul tangent, dar cum acesta este plan de contact, rotirea în jurul tangentei se transformă în rostogolire. Mișcării de rostogolire i se opune un moment de frecare la rostogolire, care depinde, de asemenea, de reacțiunea normală prin coeficientul de frecare la rostogolire s. Momentul de frecare la rostogolire se exprimă prin inegalitatea :

$$M_r \leqslant s \cdot N. \tag{4.3}$$

Se evidențiază, prin urmare, trei tipuri de frecări :
1. Frecarea de alunecare ;
2. Frecarea de rostogolire ;
3. Frecarea de pivotare.

4.2. FRECAREA DE ALUNECARE

Se consideră un solid rigid (C_1) de formă paralelipipedică (fig. 4. *c*, 1) care se sprijină pe un plan aspru (C_2). Se analizează următoarele cazuri :

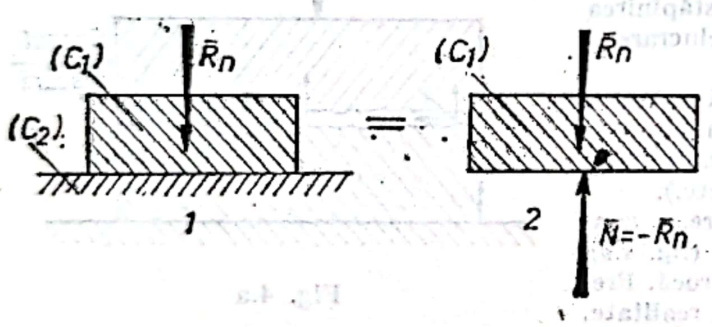


Fig. 4.c

1. Asupra corpului (C_1) acționează un sistem de forțe date, care se reduce la o rezultană unică $\bar{R}_n$, normală la suprafața de sprijin.

Pentru echilibru trebuie ca reacțiunea suprafeței (echivalentă legăturii) să aibă aceeași valoare, același suport și sensul opus forței $\bar{R}_n$ (fig. 4. *c*. 2).

2. Sisemul de forțe exterioare date, ce acționează corpul (C_1) se reduce la o rezultantă unică avînd componentele coplanare $\bar{R}_n$ și $\bar{R}_t$ (fig. 4,*d*, 1). Sistemul forțelor de legătură este echivalent, în acest caz, cu două componente $\bar{N}$ și $\bar{T}$ (fig. 4. *d*, 2). Pentru ca echilibrul să fie satisfăcut, este necesar ca :

$$R_t \leqslant \mu N\,;\; N - R_n = 0\,;\; R_t \cdot y + \frac{l}{2} R_n - x_C N = 0,$$

din care, pentru poziția de echilibru la limită, rezultă

$$x_0 = \frac{l}{2} + \mu y. \tag{4.4}$$

Din relația (4.4) rezultă că în ipoteza unei componente orizontale a rezultantei forțelor exterioare date, reacțiunea normală $\bar{N}$ nu mai acționează pe același suport cu $\bar{R}_n$, ci deplasat, în sensul forței $\bar{R}_t$. Deplasarea este cu atît

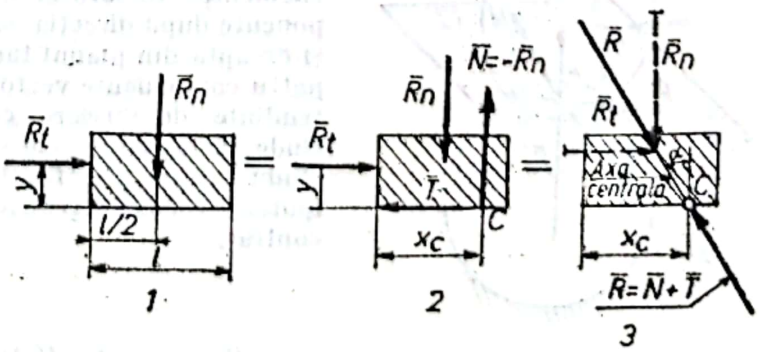


Fig. 4.d

mai mare cu cît cota y și coeficientul de frecare la alunecare μ al suprafețelor în contact este mai mare. Echilibrul este real și stabil pentru $\bar{R}_t \leqslant \mu \bar{R}_n$ și

$$\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l, \text{ respectiv } 0 \leqslant y \leqslant \frac{l}{2}. \tag{4.5}$$

4.3. FRECAREA DE ROSTOGOLIRE

Să considerăm cazul simplu al unei roți de vehicul care se sprijină pe o suprafață plană orizontală, fiind solicitată în axul ei O de o forță verticală $\bar{G}$ și de forța orizontală $\bar{F}$, care tinde să o deplaseze pe orizontală. Renunțînd la ipoteza rigidității, în conformitate cu care, contactul dintre roată și suprafața de sprijin are loc într-un singur punct geometric A, trebuie luată în considerare situația reală, ținînd seama de faptul că atît roata cît și calea de rulare,

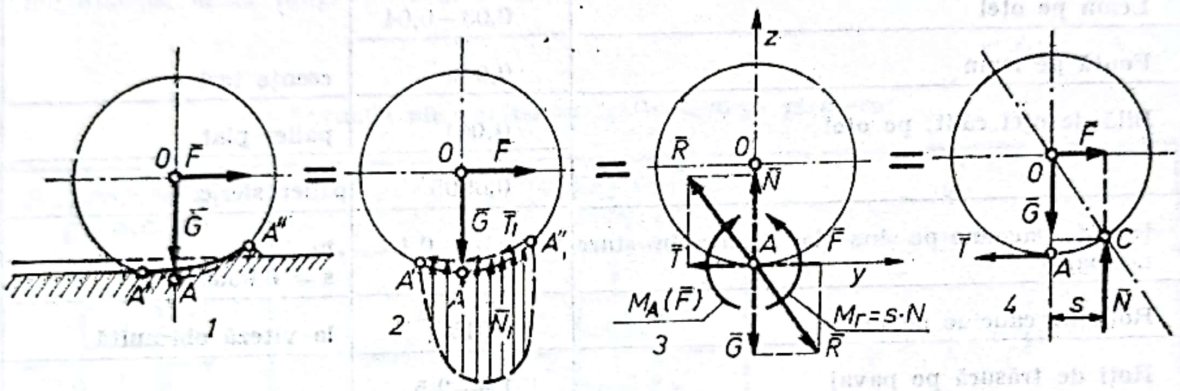


Fig. 4.e

admit o deformație limitată, contactul lor realizîndu-se pe o anumită suprafață (pată de contact) în jurul punctului A (fig. 4. *e*, 1). Aplicînd axioma legăturii fiecărui punct de contact, se vor introduce componentele $\bar{N}_i$ și $\bar{T}_i$ a căror diagramă de repartizare este redată cu aproximație în figura 4.*e*, 2. Se reduce sistemul de forțe exterioare date și de legătură în raport cu punctul A (fig. 4. *e*, 3) și se obține :

$$\bar{R} = \bar{G} + \bar{F},$$

respectiv

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{T},$$

situate în planul roții, și $\bar{M}_A(\bar{F})$ respectiv $\bar{M}_r$, situate perpendicular pe planul roții.

Reducînd sistemul forțelor de legătură $\bar{N}_i$ în raport cu puncul teoretic de contact C, se obține schema mecanic echivalentă din figura 4.*e*, 4. Analizînd rolul îndeplinit de fiecare componentă a torsorului forțelor care solicită roata se pot trage concluziile :

Sarcina $\bar{G}$ apasă roata pe suprafața de sprijin, producînd, pînă la o anumită limită, deformația acesteia, după care este echilibrată de reacțiunea normală $\bar{N} = -\bar{G}$.

Forța orizontală $\bar{F}$ imprimă roții tendința de alunecare pe suprafața orizontală de reazem, la care se opune forța de frecare $\bar{T}$. Pentru echilibru este necesar ca :

$$F \leqslant T_{max} = \mu N = \mu G. \tag{4.6}$$

Depășirea acestei valori produce fenomenul de derapaj.

Cuplul $\bar{M}_A(\bar{F})$ imprimă roții o tendință de rostogolire, la care se opune momentul rezultant al forțelor de legătură, denumit momentul frecării de rostogolire, M_r :

$$M_r = s \cdot N = s \cdot G, \tag{4.7}$$

unde s se măsoară în unităţi de lungime şi este denumit coeficient al frecării de rostogolire. În tabelul 4.*a* se dau cîteva valori orientative ale coeficientului frecării de rostogolire.

Recomandări pentru coeficientul frecării de rostogolire (s)

Tabelul 4. a

Felul materialelor în contact	Coeficientul s [cm]	Observaţii
Fier pe fier	0,005	
Oţel moale pe oţel moale	0,005	
Lemn pe lemn	0,05—0,06	
Lemn pe oţel	0,03—0,04	
Fontă pe lemn	0,046	esenţe tari
Bilă de oţel călit, pe oţel	0,001	palier plat
	0,0005	palier sferic
Roţi de vagoane pe şine (la frînare în stare normală)	0,05—0,1	în funcţie de raza roţii s = 0,0065
Roţii de cauciuc pe beton	0,315	la viteză obişnuită
Roţi de trăsură pe pavaj	1,8—2,5	

4.4. FRECAREA DE PIVOTARE

Este un fenomen cu multiple aplicaţii în tehnică. El stă la baza funcţionării ambreiajelor, frînelor cu disc, a pivoţilor de macara, a lagărelor cu inele etc.

Studiul acestui fenomen presupune existenţa unui pivot (C_1) care se sprijină într-un lagăr (C_2), zona de contact S fiind o suprafaţă aspră de revoluţie (fig. 4. *f*, 1).

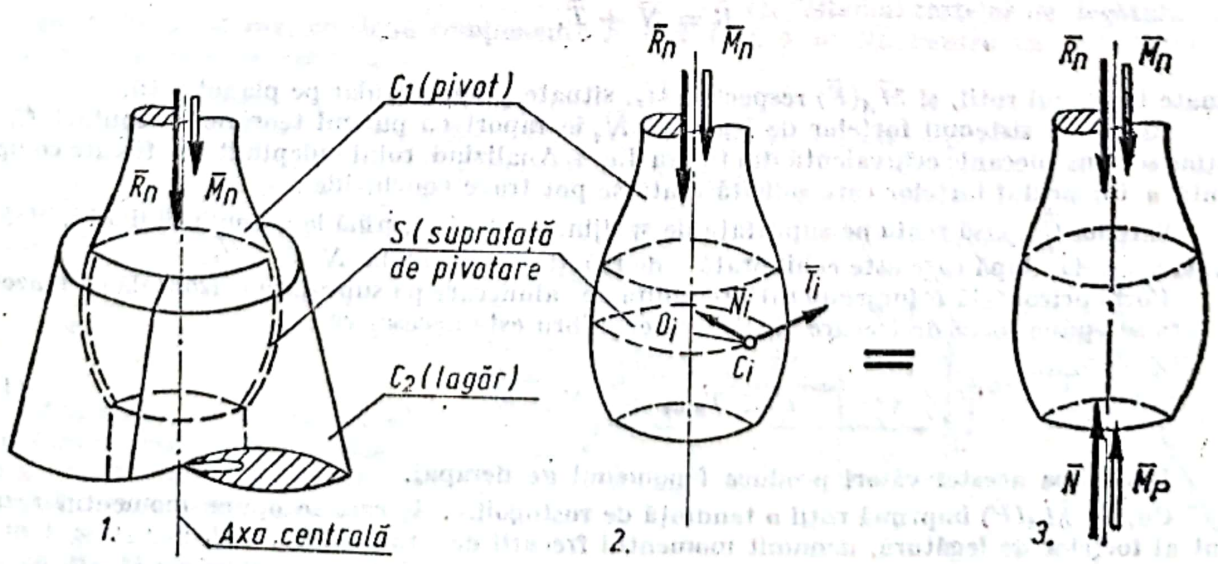


Fig. 4.f

Scanned with OKEN Scanner

Acțiunea forțelor exterioare aplicate pivotului se reduce la un torsor minimal ($\bar{R}_n$ și $\bar{M}_n$) în raport cu axa de simetrie a corpului, ceea ce are ca efect tendința de deplasare și rotire a pivotului în lungul și în jurul axei sale. Reacțiunile transmise pivotului de către lagăr (fig. 4.f,2) sînt distribuite continuu și simetric pe suprafața de contact S, astfel că într-un punct oarecare C_i există o reacțiune normală $\bar{N}_i$ și una tangențială $\bar{T}_i$. Reducînd forțele de legătură în raport cu axa de rotație se obține un torsor minimal (fig. 4. *f*, *e*), format din reacțiunea rezultantă $\bar{N}$ și momentul rezultant al frecării de piviotare M_p. Pentru echilibru trebuie satisfăcută condiția :

$$M_n \leqslant M_p \cdot \tag{4.8}$$

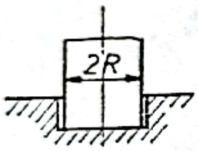
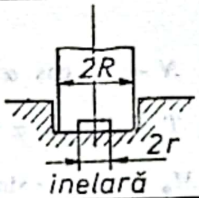
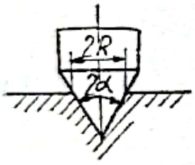
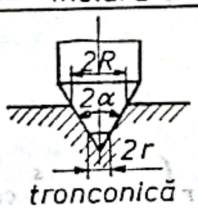
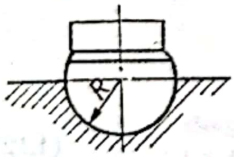
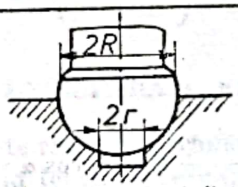
Valoarea maximă a momentului frecării de pivotare se calculează, în general, cu relația :

$$M_p = k \cdot N = k \cdot R_n, \tag{4.9}$$

în care k este un coeficient care depinde de forma pivotului și natura suprafețelor în contact, avînd dimensiune de lungime (tabelul 4.*b*).

Tabelul 4.b

Formule ale coeficientului frecării pe pivotare

Suprafața de pivotare	k	Suprafața de pivotare	k
 circulară	$\frac{2}{3}\mu R$	 inelară	$\frac{2}{3}\mu\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}$
 conică	$\frac{2}{3}\mu\frac{R}{\sin\alpha}$	 tronconică	$\frac{2}{3}\mu\frac{R^3-r^3}{(R^2-r^2)\sin\alpha}$
 semisferică	$\frac{1}{3}\mu R$	 zonă sferică	$\frac{1}{3}\mu\frac{R(R^3-r^3)}{\sqrt{(R^2-r^2)^3}}$

4.5. FRECAREA DIN ARTICULAȚII ȘI LAGĂRE

Acest fenomen complex se întîlnește la mișcarea fusurilor mobile în lagărele radiale fixe sau a rolelor mobile pe fusuri fixe.

Articulația cu joc. În figura 4.*g*, 1 se prezintă un fus, avînd raza r, introdus într-un lagăr cu joc astfel încît contactul dintre fus și lagăr are loc teoretic după generatoarea ce trece prin C (fig. 4. *f*, 4) iar practic după suprafața calotei cilindrice $C'C''$ (fig. 4.*g*, 1) pe toată lungimea lagărului.

În vederea simplificării calculelor, se consideră cazul unei articulații cilindrice plane, cînd sistemul forțelor exterioare date se reduce, în raport cu axa articulației, la un torsor format din forța rezultantă $\bar{R}$, conținută în planul normal pe axa articulației, și momentul rezultant $\bar{M}_0$ dirijat pe direcția axei articulației. Mai acționează, de asemenea, sistemul forțelor de legătură $\bar{N}_i$ și $\bar{T}_i$ distribuite continuu în fiecare punct C_i de pe suprafața cilindrică de contact.

Scanned with OKEN Scanner

Forțele de legătură pot fi înlocuite cu elemente mecanice echivalente față de un punct oarecare al zonei de contact C_0 (fig. 4. *f*, 2) față de O (fig. 4.*f*, 3) și față de punctul teoretic de contact C (fig. 4. *f*, *a*).

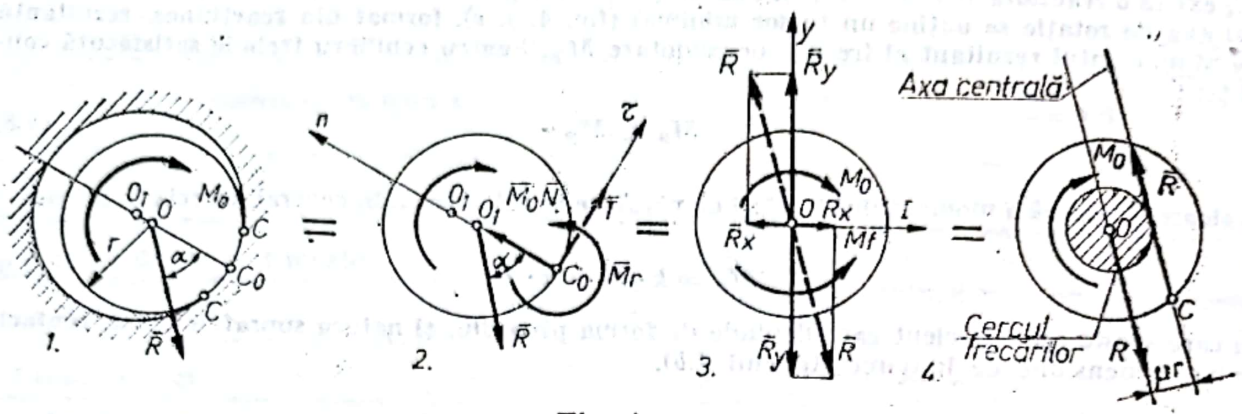


Fig. 4.g

Pentru echilibrul fusului trebuie satisfăcute relațiile :

$$T \leqslant \mu N\,;\; M_r \leqslant sN$$

și ecuațiile :

$$N - R \cdot \cos\,\alpha = 0\,;$$

$$T - R \cdot \sin\,\alpha = 0\,;$$

$$-M_0 + R \cdot r \cdot \sin\alpha = 0,$$

din care se deduc condițiile :

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu\,; \tag{4.10}$$

$$M_0 \leqslant R \cdot r\left(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha\right). \tag{4.11}$$

Pe baza relației (4.10), rezultă :

$$\sin\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \text{ și } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\,. \tag{4.12}$$

Substituind (4.12) în (4.11) și notînd :

$$\mu' = \frac{\mu + \dfrac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}} \tag{4.13}$$

se obține :

$$M_0 \leqslant M_f = \mu' R r\,. \tag{4.14}$$

Ultimul termen al relației (4.14) reprezintă valoarea maximă a momentului frecării din articulație, iar μ' se numește coeficient complex al frecării din articulație.

Dacă reacțiunea articulației cilindrice plane se reprezintă prin componentele sale $\bar{R}_x$ și $\bar{R}_y$ (fig. 4.7, *c*) și se ține seama că la limita-poziției de echilibru $\bar{R} = -\bar{R}$ și $R = \mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{R}_x^2 + \mathrm{R}_y^2}$, relația (4.14) devine :

$$M_0 \leqslant \mu \sqrt{r\, R_x^2 + R_y^2}\,. \tag{4.15}$$

Analog pentru articulația sferică se obține :

$$M_0 \leqslant \mu\, r \sqrt{\mathrm{R}_x^2 + \mathrm{R}_y^2 + \mathrm{R}_z^2}\,. \tag{4.16}$$

Articulația fără joc se caracterizează prin aceea că, între fus și lagăr contactul are loc pe toată suprafața cilindrică (fig. 4.*h*). Fusul este supus acțiunii sistemului de forțe exterioare date care se reduce la torsorul $(\bar{R},\ \bar{M}_0)$ iar în fiecare punct al suprafeței cilindrice de contact apare o reacțiune normală $\bar{N}_i$ și o forță de frecare $\bar{T}_i$.

Momentul rezistent al frecării dintre fus și lagăr are valoarea :

$$M_f = \sum_{i=1}^{n} T_i r = \sum_{i=1}^{n} \mu N_i r = \mu r \sum_{i=1}^{n} N_i =$$

$$= r\mu \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{R} R \cdot r\,.$$

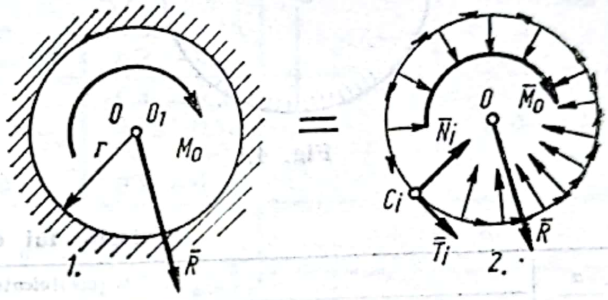


Fig. 4.h

Notînd

$$\mu' = \mu \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{R},$$

se obține condiția de echilibru

$$M_0 \leqslant \mu' R r, \tag{4.17}$$

analogă cu (4.14).

4.6. FRECAREA FUNICULARĂ (DE ÎNFĂȘURARE)

O frînare simplă și eficientă se poate realiza prin înfășurarea unui cablu acționat de forțe pe un tambur fix (fig. 4.*i*). Presupunînd tendința de mișcare a cablului în sensul forței $\bar{P}$ și luînd în considerație și frecarea dintre cablu și tambur, legătura dintre forța motoare $\bar{P}$ și forța rezistentă $\bar{Q}$ este dată de formula lui Euler :

$$P = Q\, e^{\mu\alpha}, \tag{4.18}$$

e fiind baza logaritmilor naturali, α unghiul de înfășurare a cablului pe tambur, iar μ — coeficientul de frecare de alunecare dintre cablu și tambur.

Admițînd că, $Q > P$, formula lui Euler se scrie :

$$P = Q\, e^{-\mu\alpha}. \tag{4.19}$$

Echilibrul este posibil atunci cînd este îndeplinită condiția :

$$e^{-\alpha\mu} \leqslant \frac{P}{Q} \leqslant e^{\mu\alpha}, \tag{4.20}$$

În tabelul 4.c se dau unele valori ale termenului $e^{\mu\alpha}$, în funcție de raportul $\alpha/2\pi$ și coeficientul de frecare de alunecare μ.

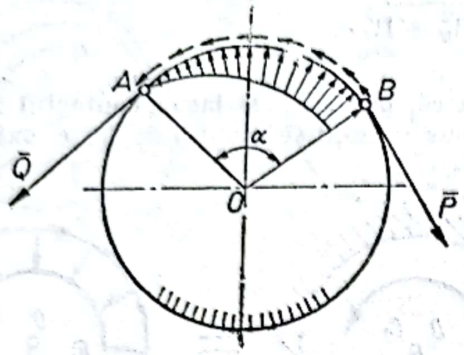


Fig. 4.i

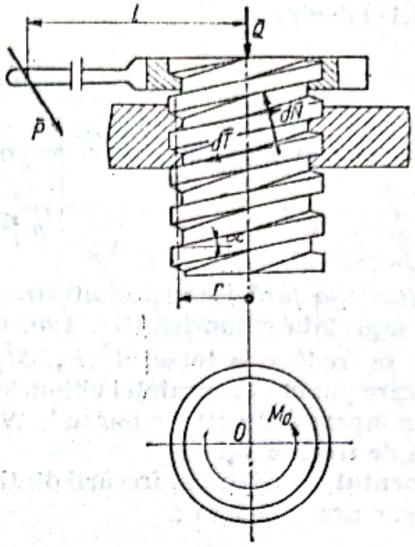


Fig. 4.j

Tabelul 4.c

Valorile lui $e^{\mu\alpha}$

$\frac{\alpha}{2\pi}$	μ (coeficientul de frecare)								
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,1	1,00	1,1	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33	1,37
0,2	1,13	1,21	1,29	1,37	1,46	1,55	1,65	1,76	1,87
0,3	1,21	1,32	1,45	1,60	1,76	1,93	2.13	2,34	2,57
0,4	1,29	1,46	1,65	1,87	2,12	2,41	2,73	3,10	3,51
0,425	1,31	1,49	1,70	1,95	2,23	2,55	2,91	3,33	3,80
0,45	1,33	1,53	1,76	2,03	2,34	2,69	3,10	3,57	4,11
0,475	1,35	1,56	1,82	2,11	2,45	2,84	3,30	3,83	4,45
0,5	1,37	1,60	1,87	2,19	2,57	3,00	3,51	4,11	4,81
0,525	1,39	1,64	1,93	2,28	2,69	3,17	3,74	4,41	5,20
0,55	1,41	1,68	2,00	2,37	2,82	3,35	3,98	4,74	5,63
0,6	1.46	1,76	2,13	2,57	3,10	3,74	4,52	5,45	6,59
0,7	1,55	1,93	2,41	3,00	3,74	4,66	5,81	7,24	9,02
0,8	1,65	2,13	2,73	3,51	4,52	5,81	7,47	6,60	12,35
0,9	1,76	2,34	3,10	4,11	5,45	7,24	9,60	12,74	16,90
1,0	1,86	2,57	3,51	4,81	6,59	9,02	12,35	16,90	23,14
1,5	2,57	4,11	6,59	10,55	16,90	27,08	43,38	69,49	111,32
2,0	3,51	6,59	12,35	23,14	43,38	81,31	152,40	285,68	535,49
2,5	4,81	10,55	23,14	50,75	111,15	244,15	535,49	1174,5	2575,9
3,0	6,59	16,90	43,38	111,32	285,69	733,14	1881,5	4828,5	12391,0
3,5	9,02	27,08	81,31	244,15	733,14	2199,90	6610,7	19851,0	59608,0
4,0	12,35	43,38	152,40	535,40	1881,5	6610,7	23227,0	81610,0	286744,0

4.7. FRECAREA ÎN ȘURUB

Șurubul este format dintr-un cilindru circular drept, pe a cărui suprafață laterală este săpat un șanț numit filet, de forma unei elice cilindrică dreaptă (fig. 4. *j*). Șurubul se fixează într-o piesă denumită piuliță, care are un gol cilindric, pe suprafața căruia este săpat un filet, de asemenea, elicoidal, având aceleași elemente ca și filetul șurubului.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.d

Valori ale coeficientului de frecare

Natura corpului	Starea suprafeţelor în contact	Valoarea coeficientului		Temperatura admisă °C
		aderenţă	alunecare cu viteze obişnuite	
Oţel pe oţel	— uscate — unse cu ulei — unse cu seu sau unsoare	0,25—0,15 0,15—0,08 0,08—0,07	0,15—0,09 0,08—0,03 —	
Bandă de oţel pe fontă	— uscate — unse uşor	0,2 —0,15 0,15—0,10	—	
Oţel sau fontă pe ţesătură de azbest cu bachelită	— uscate — unse uşor cu unsoare unse cu ulei	0,5 —0,3 — 0,35—0,15 0,2 —0,1		300—200
Oţel sau fontă pe azbest cu bachelită, presat hidraulic	— uscate — unse cu unsoare — unse cu ulei	0,4 —0,2 0,35—0,15 0,15—0,10	—	500—250
Oţel pe textolit	— unse uşor — unse cu ulei	0,1 0,12		
Oţel pe gheaţă	—	0,027—0,014	0,01	
Fontă pe fontă (sau bronz)	— uscate — unse uşor — unse cu ulei — umede	0,25—0,15 0,16—0,15 0,1 —0,02 0,31—0,25	0,15	
Bronz pe bronz	— uscate sau puţin unse	—	0,2	
Bronz pe fontă	— puţin unse	—	0,21	
Fier forjat pe fier forjat	— uscate	—	0,44	
Fier pe stejar (în lungul fibrelor)	— umede	0,65	—	160—100
Stejar pe stejar : — în lungul fibrelor — normal pe fibre	— uscate	0,62 0,43	0,48 0,34—0,19	160—100
Curea de piele pe fontă	— uscate — puţin unse — umede	0,50—0,30 — —	0,56 0,28 0,36	
Curea de piele pe stejar	— uscate — puţin unse — umede	0,60—0,50 — 0,79	0,33—0,27 0,47 0,29	
Fringhie de cînepă pe lemn aspru	— uscate	0,80—0,50	0,50	
Fringhie de cînepă pe lemn neted	— uscate	0,33	—	
Roată de cauciuc netedă pe asfalt	— uscate	0,49	0,28	
Roată de cauciuc crestată pe asfalt	— uscate	0,76	0,55	
Plută pe metal	— uscate sau uşor unse	0,35	0,3	

Scanned with OKEN Scanner

Dacă asupra şurubului acţionează o forţă rezistentă $\bar{Q}$ şi un moment motor M_0, care poate fi aplicat cu forţa P la distanţa l, ecuaţia care dă legătura dintre momentul M_0 şi forţa $\bar{Q}$ este :

$$M_0 = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi), \tag{4.21}$$

în care r este raza medie a şurubului, α panta şurubului, iar φ unghiul de frecare dintre şurub şi piuliţă.

La deşurubare sensul forţei de frecare se schimbă, iar expresia momentului M_0 devine :

$$M_0 = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi), \tag{4.22}$$

4.8. SCRIPETELE

Scripetele este un disc circular pe periferia căruia este executat un canal pe care trece un cablu sau lanţ. Axul scripetelui este fixat printr-o furcă terminată cu un cîrlig (fig. 4. *k*). Dacă se ţine seama de frecările din axul O, precum şi de rigiditatea cablului, relaţia dintre forţa motoare $\bar{P}$ şi sarcina $\bar{Q}$ este :

$$P = \lambda Q, \tag{4.23}$$

unde s-a notat prin λ coeficientul de rigiditate funiculară şi care are expresia :

$$\lambda = 1 + k + \frac{2\mu_1 r}{R}\ ; \tag{4.24}$$

în relaţia (4.24) k reprezintă valoarea :

$$k = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\ . \tag{4.25}$$

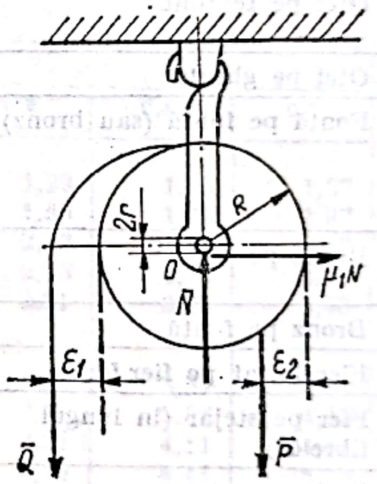


Fig. 4.k

Coeficientul k depinde şi de diametrul d al cablului. Astfel pentru :

— funii de cînepă, $k = 0{,}02\ d^2 \ldots 0{,}06\ d^2$;

— cabluri de oţel, $k = 0{,}06\ d^2 \ldots 0{,}09\ d^2$.

În tabelul 4. *d* se dau valorile coeficienţilor de frecare μ pentru diferite materiale, funcţie de natura şi starea suprafeţelor.

II. APLICAŢII

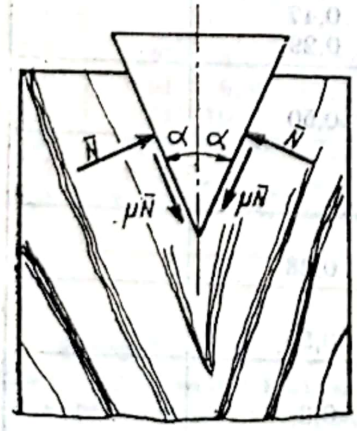


Fig. 4.1

4.1. Ce valoare are unghiul α al unei pene (fig. 4.1) utilizate la despicarea lemnului, astfel ca pana să nu iasă din material între două lovituri consecutive ?

Rezolvare. Se face echilibrul panei :

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\sum X_i = 0\ ;\ N\cos\alpha - N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha - \\ &\mu N\sin\alpha = 0\ ; \\ &\textstyle\sum Y_i = 0\ ;\ 2N\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Din ecuaţia a doua rezultă :

$$\sin\alpha = \mu\cos\alpha\ ;$$

deci

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu \text{ dar } \mu = \operatorname{tg} \psi$$

și atunci se impune condiția $\alpha \leqslant \psi$ în care ψ este unghiul de frecare; deci semiunghiul penei trebuie să fie mai mic sau egal cu unghiul de frecare dintre pană și lemn.

4.2. Să se determine forța de avans necesară la un ferăstrău circular de spintecat (fig. 4.2) știind că forța de tăiere este $P = 8{,}4$ daN iar forța de respingere $P_0 = 0{,}4\ P$. Se mai cunosc $\mu = 0{,}4$ și $\alpha = \pi/6$ [rad.].

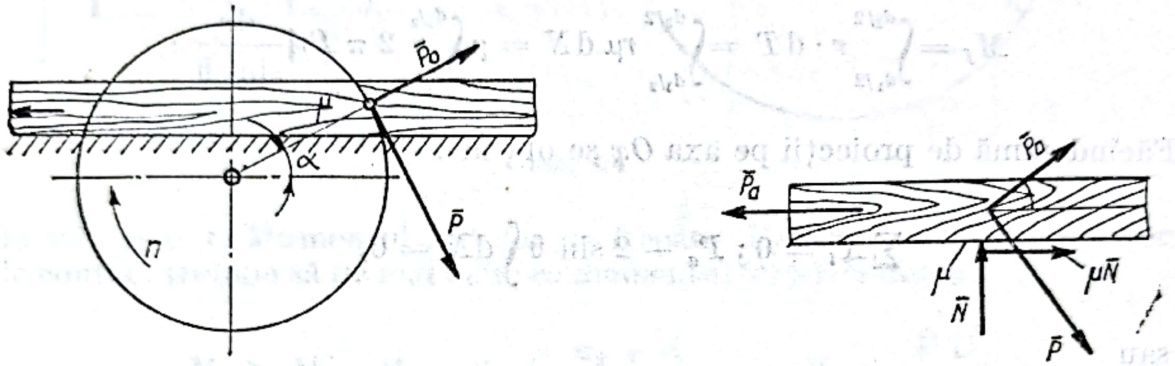


Fig. 4.2

Rezolvare. Asupra materialului prelucrat acționează forțele figurate, în care $\bar{P}_a$ este forța de avans și $\bar{N}$ este reacțiunea normală. Se scriu ecuațiile de echilibru pentru sistemul forțelor $\bar{P}$, $\bar{P}_0$, $\bar{N}$, $\bar{P}_a$ și $\mu\bar{N}$: respectiv:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0: \ P \sin\alpha + P_0 \cos\alpha + \mu N - P_a = 0; \\ \sum Y_i = 0; \ N + P_0 \sin\alpha - P \cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$N = P \cos\alpha - P_0 \sin\alpha = 5{,}62 \text{ daN};$$

$$P_a = P \text{ si } \alpha + P_0 \cos\alpha + \mu N = 9{,}38 \text{ daN}.$$

4.3. Să se determine momentul de frecare ce apare între conul unui burghiu pentru lemn și locașul de fixare (fig. 4.3) știind că forța de avans este $P_a = 20$ daN. Aplicație numerică pentru: $\mu = 0{,}096$, $\theta = 1°30'$, $d_1 = 11$ mm și $d_2 = 14$ mm.

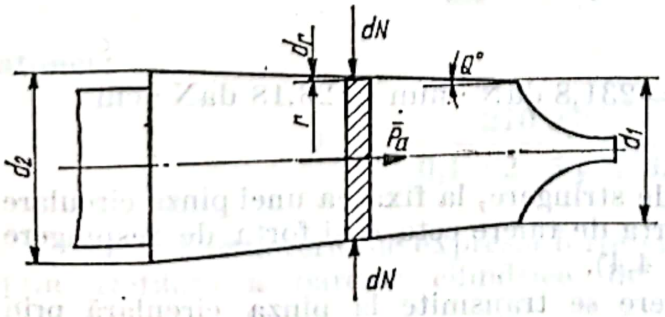


Fig. 4.3

Rezolvare. Se consideră suprafața elementară hașurată, a cărei arie este:

$$dA = 2\pi r \cdot \frac{dr}{\sin\theta},$$

deci :

$$dN = p \cdot dA = 2\pi p \cdot \frac{r\,dr}{\sin\theta}.$$

Forța de frecare elementară :

$$dT = \mu\, dN.$$

Deci momentul de frecare va fi :

$$M_f = \int_{d_1/2}^{d_2/2} r \cdot dT = \int_{d_1/2}^{d_2/2} r\mu\, dN = \mu \int_{d_1/2}^{d_2/2} 2\pi Pr \frac{dr}{\sin\theta}.$$

Făcînd sumă de proiecții pe axa Ox se obține :

$$\sum X_i = 0\,;\; P_a - 2\sin\theta \int dN = 0,$$

sau

$$P_a - 2\sin\theta \cdot \frac{2\pi p}{\sin\theta} \int_{d_1/2}^{d_2/2} r \cdot dr = 0\,;$$

rezultă :

$$p = \frac{P_a}{\pi \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{2}}\,;$$

deci

$$M_f = \frac{2\pi\mu}{\sin\theta} \cdot \frac{P_a}{\pi \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{2}} \int_{d_1/2}^{d_2/2} r^2\, dr = \frac{\mu P_a}{\sin\theta} \cdot \frac{d_2^3 - d_1^3}{6(d_2^2 - d_1^2)}.$$

Aplicație numerică :

$$M_f = 0{,}096 \cdot \frac{20}{0{,}0261}\, 3{,}15 = 231{,}8\ \text{daN} \cdot \text{mm} = 23{,}18\ \text{daN} \cdot \text{cm}.$$

4.4. Să se determine forța de strîngere, la fixarea unei pînze circulare prin șurub și flanșe, știind că forța de tăiere este $\bar{F}$ și forța de respingere $\bar{F}_0$. Se cunosc, d_1, d_n și D (fig. 4.4).

Rezolvare. Forța de strîngere se transmite la pînza circulară prin intermediul a două suprafețe în formă de coroană circulară, ale flanșelor

Scanned with OKEN Scanner

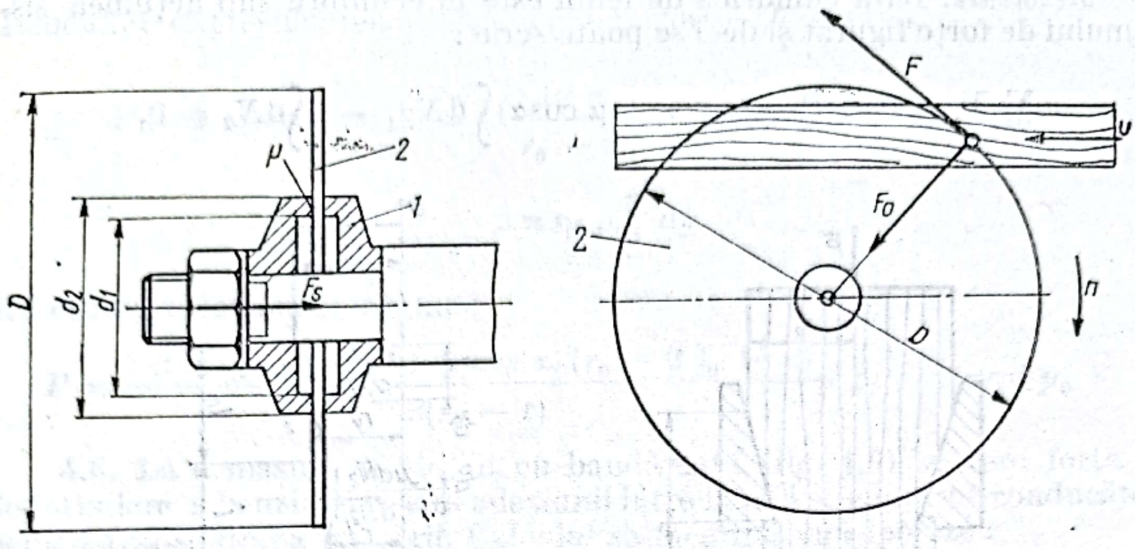


Fig. 4.4

de strîngere *1*. Momentul forţelor de frecare M_f la nivelul suprafeţelor de contact trebuie să fie mai mare ca momentul forţei de tăiere :

$$M_f \geqslant M_t\,;\quad M_f = 2\,\mu F_s \frac{d_2 + d_1}{4}\,,\quad \text{iar}\quad M_t = \frac{F.D}{2}$$

deci

$$\mu F_s \frac{d_2 + d_1}{2} \geqslant \frac{F \cdot D}{2}\,;$$

rezultă

$$F_s \geqslant \frac{F \cdot D}{\mu(d_2 + d_1)}\,.$$

Aplicaţie numerică pentru : $D = 0{,}35$ m, $F = 210$ N şi $\mu = 0{,}1$. Constructiv se ia $d_{med} = \dfrac{d_2 + d_1}{2} = 5\sqrt{D}$; în cazul considerat va fi :

$$d_{med} = 5 \cdot \sqrt{0{,}35}\ \text{m}\,;$$

atunci :

$$F_s = \frac{210\ 0{,}35}{0{,}1 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{0\ ,35}} = 124\ N.$$

4.5. Să se determine expresia forţei P, necesare la presarea circulară prin trefilare a barelor cilindrice de lemn (fig. 4.5). Se cunosc :

$$\alpha, \mu, P_0, r_0, r_0, l_0 \text{ şi } l.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Bara cilindrică de lemn este în echilibru sub acțiunea sistemului de forțe figurat și deci se poate scrie :

$$\sum Y_i = 0\,; \quad P - (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int dN\mu_1 - \mu\int dN_2 = 0,$$

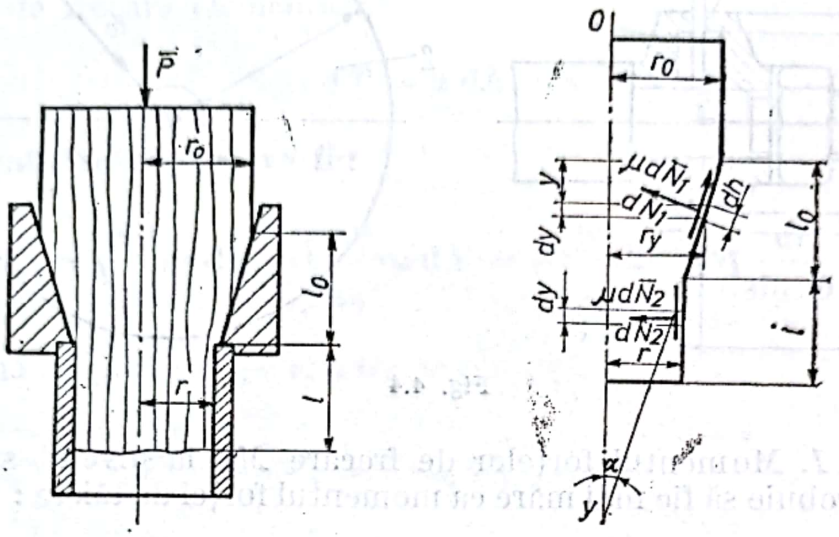


Fig. 4.5

în care dN_1 este reacțiunea normală elementară în zona conică și dN_2 este reacțiunea normală elementară în zona cilindrică a barei de lemn, deci :

$$dN_1 = 2\pi r_y \cdot dh \cdot p_n = 2\pi r_y \cdot \frac{dy}{\cos\alpha} p_n,$$

în care p_n este presiunea normală pe suprafața laterală a trunchiului de con elementar considerat și este egală cu $p_n = p_0 \frac{\sin\alpha}{r_0 - r} y$ (relație dată în literatura de specialitate), p_0 fiind presiunea maximă de trefilare și

$$r_y = r_0 - y\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Înlocuind valorile lui p_n și r_y în expresia lui dN_1 se obține :

$$dN_1 = 2\pi \frac{\mathrm{tg}}{r_0 - r} p_0 \cdot y(r_0 - y\,\mathrm{tg}\,\alpha)\,dy \cdot$$

Similar se determină dN_2 și anume

$$dN_2 = 2\pi r\ p_0\ dy \cdot 0$$

Atunci

$$P = (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int dN_1 + \mu\int dN_2 \cdot$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind expresiile reacţiilor, expresia forţei P devine :

$$P = 2\pi(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{r_0 - r}\,p_0 \cdot \int_0^{l_0} y\,(r_0 - y\cdot\operatorname{tg}\alpha)\,dy +$$

$$+ 2\pi r\mu\,p_0 \int_0^{l} dy$$

Efectuînd calculele se obţine :

$$P = \frac{\pi l_0^2 \operatorname{tg}\alpha\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,(r_0 - 2\,l_0\,\operatorname{tg}\alpha)}{3(r_0 - r)}\,p_0 + 2\pi r\mu l\,p_0 \cdot$$

4.6. La o maşină de şlefuit cu bandă lată (fig. 4.6) se cere forţa Q de întindere a benzii, necesară adeziunii între bandă şi cilindrul conducător pentru transmiterea mişcării. Calculul se face în două ipoteze :

a) cilindrul de contact este cilindrul condus ;

b) cilindrul de contact este cilindrul conducător.

Se cunoaşte forţa de tăiere P.

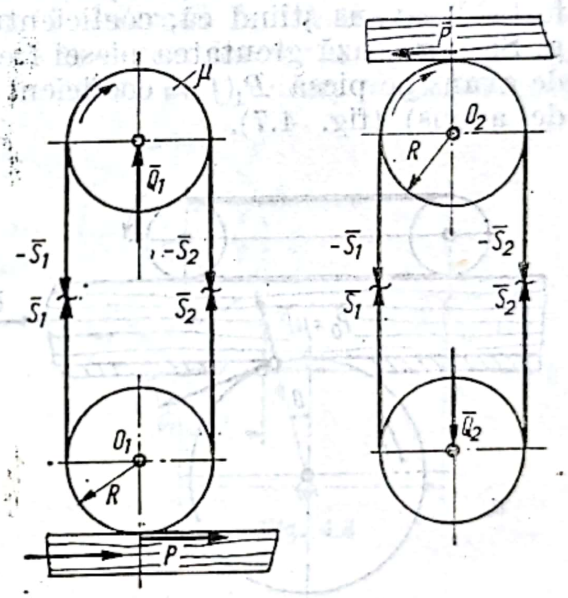


Fig. 4.6

Rezolvare. Banda de şlefuit se consideră ca o curea de transmisie ; la mersul în sarcină tensiunile din fir se determină cu formula lui Euler :

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}$$

a) În cazul primei ipoteze ecuaţiile de echilibru sînt :

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\sum M_{(0)} = 0\,;\ S_1 R - PR - S_2 R = 0\,;\\ &\textstyle\sum Y_i = 0\,;\ Q_1 - S_1 - S_2 = 0\,;\\ &S_1 = S_2\,e^{\mu\pi}\,. \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Din prima ecuaţie rezultă :

$$S_1 - S_2 = P,\ S_2 e^{\mu\pi} - S_2 = P\,;\ S_2 = \frac{P}{e^{\mu\pi} - 1}\,;\ S_1 = \frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1}P\,;$$

$$Q_1 = S_2 + S_2 = \frac{1 + e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1}P\,;\ Q_1 = \frac{1 + e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1}P.$$

b) În ipoteza doua de calcul ecuaţiile de echilibru sînt :

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\sum M_{(O_2)} = 0\,; \quad S_2 R - PR - S_1 R = 0\,;\\ &\textstyle\sum Y_i = 0\,; \quad S_1 + S_2 - Q_2 = 0\,;\\ &S_1 = S_2 e^{\mu\pi}. \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

Din prima ecuație rezultă:

$$S_2 - S_1 = P;$$

deci

$$S_2 - S_2 e^{\mu\pi} = P;\ S_2 = \frac{P}{1 - e^{\mu\pi}};\ S_1 = \frac{e^{\mu\pi}}{1 - e^{\mu\pi}} P.$$

În final se obține

$$Q_2 = S_1 + S_2;\ Q_2 = \frac{1 + e^{\mu\pi}}{1 - e^{\mu\pi}} P.$$

4.7. În procesul frezării se dezvoltă o forță de tăiere $\bar{P}$ și o forță de frecare între așchii și fața de degajare a sculei P_0. Să se determine forța de avans știind că, coeficientul de frecare între lemn și sculă este μ. Se neglijează greutatea piesei frezate și forța de apăsare a sistemului de avans pe piesă P_1 (f = coeficient de aderență între piesă și sistemul de avans) (fig. 4.7).

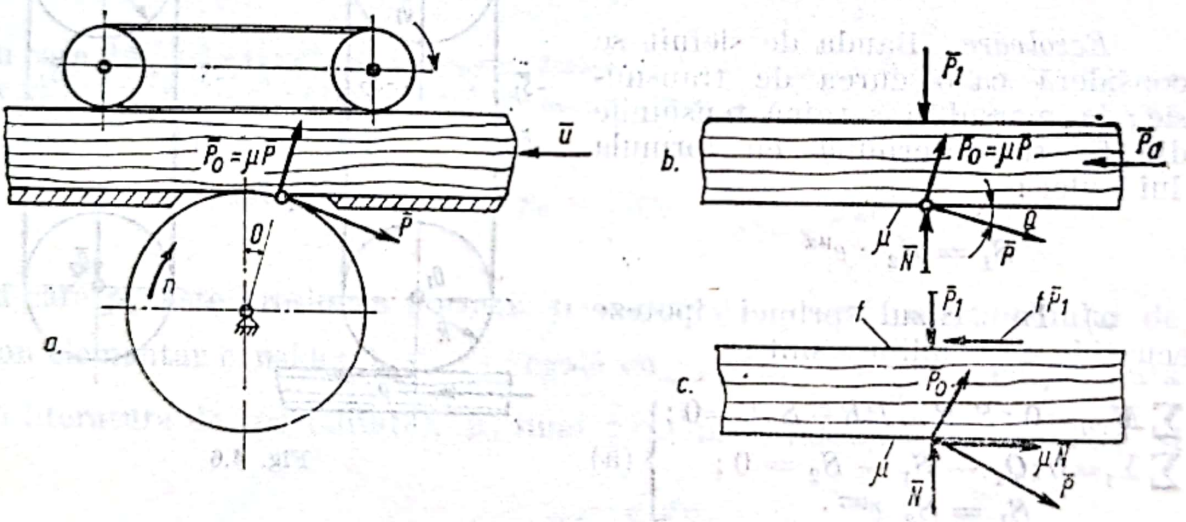


Fig. 4.7

Rezolvare. Forța de avans (fig. 4.7, *a*) se determină din ecuațiile de echilibru:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0: P\cos\theta + P_0\sin\theta + \mu N - P_a = 0; \\ \sum Y_i = 0: N + P_0\cos\theta = P\sin\theta - P_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Rezultă:

$$N = P\sin\theta - P_0\cos\theta + P_1;$$

$$P_a = P\cos\theta + P_0\sin\theta + \mu(P\sin\theta - P_0\cos\theta + P_1) =$$

$$= P(\cos\theta + \mu\sin\theta) + P_0(\sin\theta - \mu\cos\theta) + \mu P_1.$$

Forța de apăsare P_1 se determină (fig. 4.7, *b*) din :

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0;\ & N + P\cos\theta\, P_0 \sin\theta - f P_1 - 0; \\ \sum Y_i = 0;\ & N = P\sin\theta - P_0\cos\theta + P_1 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Rezultă :

$$P\sin\theta - P_0\cos\theta + P_1 + P\cos\theta + P_0\sin\theta - fP_1 = 0;$$

sau

$$P(\cos\theta + \mu\sin\theta) + P_0(\sin\theta - \mu\cos\theta) = P_1(f - \mu).$$

Deci :

$$P_1 = \frac{P(\cos\theta + \mu\sin\theta) + P_0(\sin\theta - \cos\theta)}{f - \mu}.$$

4.8. Se consideră o frînă cu bandă utilizată la frînarea roților de transmisie la gatere (fig. 4.8). Se cere să se determine forța de frînare Q. Se cunosc α unghiul de înfășurare a benzii pe tambur, μ coeficientul de frecare între bandă și tambur, diametrul D, distanțele a și l și momentul M.

Rezolvare. Se face separat echilibrul șaibei, benzii și pîrghiei OB Echilibrul șaibei :

$$\sum M_i = 0;\ (S_1 - S_2)\frac{D}{2} - M = 0.$$

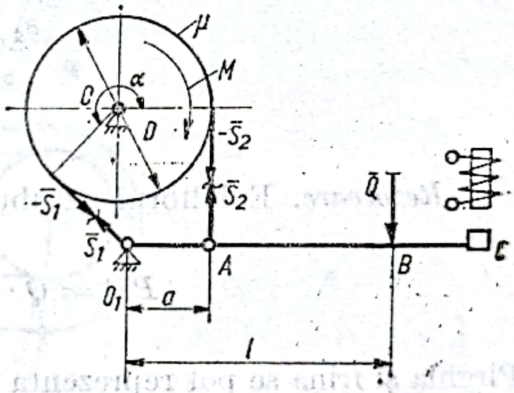


Fig. 4.8

Echilibrul benzii :

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}.$$

Echilibrul pîrghiei O_1B :

$$\sum M_{(O)} = 0;\ S_2 \cdot a - Q \cdot l = 0.$$

Din ultima ecuație se deduce :

$$Q = S_2 \cdot \frac{a}{l},$$

iar din prima și a doua ecuație

$$\frac{D}{2}(S_2 \cdot e^{\mu\mu} - S_2) - M = 0;$$

rezultă :

$$S_2 = \frac{2M}{(e^{\mu\alpha} - 1)D} \text{ și } Q = S_2\frac{a}{l} = \frac{2 \cdot M \cdot a}{(e^{\mu\alpha} - 1) \cdot l \cdot D}$$

Scanned with OKEN Scanner

4.9. Frîna troliului de acţionare a cablului trăgător al funicularului semipermanent MÎNECIU este acţionată prin şurub rotit manual. Se cere forţa de frînare (fig. 4.9, *a*).

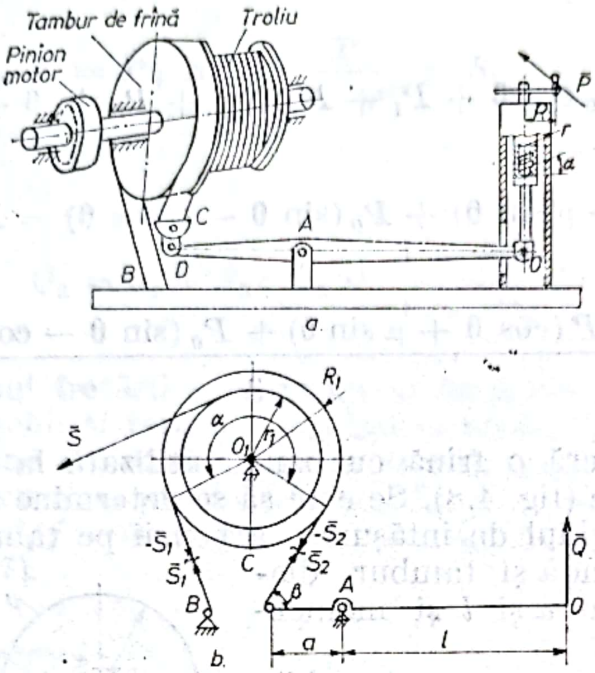


Fig. 4.9

Rezolvare. Echilibrul şurubului este exprimat de relaţia :

$$PR = Q \cdot l \cdot \operatorname{tg}\,(\alpha + \varphi).$$

Pîrghia şi frîna se pot reprezenta schematic (fig. 4.9, *b*). Se scriu ecuaţiile necesare, care corespund mişcărilor posibile :

$$\left.\begin{aligned} &\sum M_A = 0; \quad S_1\, a \sin/\beta - Q \cdot l = 0; \\ &\sum M_0 = 0; \quad S \cdot r_1 + S_1 \cdot R_1 - S_2 R_1 = 0; \\ &\qquad\qquad S_2 = S_1\, e^{\mu\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Din aceste ecuaţii se deduce forţa de frînare :

$$P = \frac{r}{R} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot S\, \frac{\operatorname{tg}\,(\alpha + \varphi)}{e_{\mu\alpha} - 1}\, e^{\mu\alpha} \sin \beta,$$

S fiind efortul din cablul întins al troliului.

4.10. Să se studieze frecarea la elementele cinematice flexibile utilizate în industria lemnului (fig. 4.10) (cabluri, benzi elastice, curele etc.).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare : Se consideră transmisia prin curea din figura 4.10. *a*, la care roata condusă *2* este acţionată de roata *1* cu ajutorul curelei *3*. Roata condusă este acţionată de ramura inferioară a curelei (ramura de ieşire *CD*), ramura superioară (ramura de intrare *AB*) fiind porţiunea descărcată a curelei.

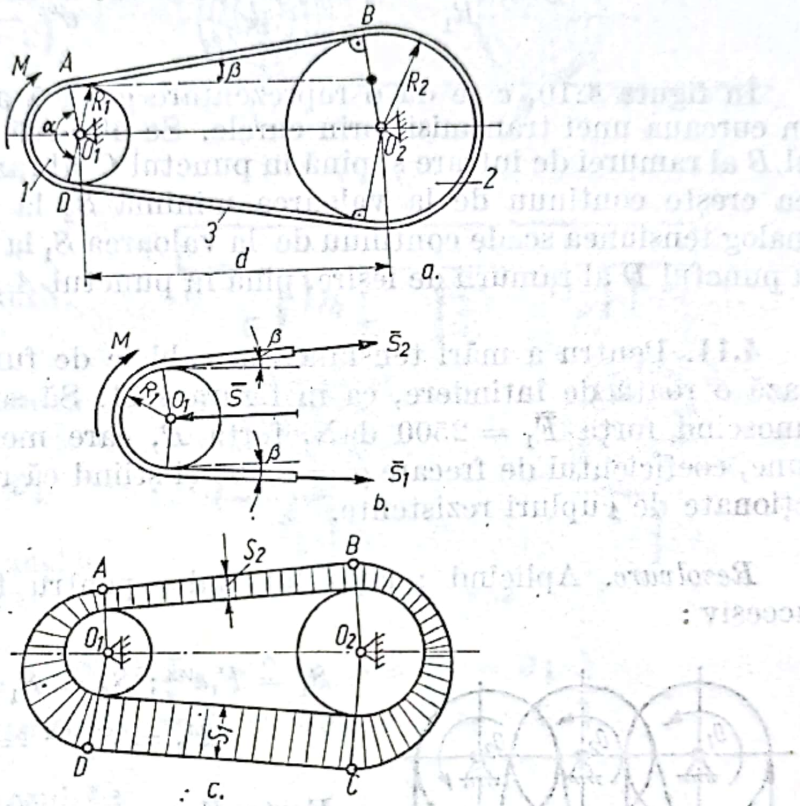


Fig. 4.10

Fie S_1 şi S_2 tensiunile din cele două ramuri ale curelei şi S forţa care întinde cureaua pe cele două roţi ; notînd cu β unghiul cu orizontala a uneia din ramuri şi scriind ecuaţiile de echilibru ale roţii motoare, se obţine :

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0 &: -S + (S_1 + S_2)\cos\beta = 0; \\ \sum M_{(O_1)} = 0 &: -M + (S_1 - S_2)R_1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Asociind acestor ecuaţii formula lui Euler :

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha},$$

şi observînd că :

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{d^2 - (R_2 - R_1)^2}}{d},$$

unde d este distanța dintre axele roților rezultă :

$$S_1 = \frac{M}{R_1} \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha}-1}\ ;\ S_2 = \frac{M}{R_1} \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha}-1}\ ;$$

$$S = \frac{M}{R_1} \cdot \frac{\sqrt{d^2-(R_2-R_1)^2}}{d} \cdot \frac{e^{\mu\alpha}+1}{e^{\mu\alpha}-1}\ .$$

În figura 4.10, c se dă o reprezentare grafică a variației tensiunilor din cureaua unei transmisii prin curele. Se observă că începînd cu punctul B al ramurei de intrare și pînă în punctul C al ramurii de ieșire tensiunea crește continuu de la valoarea minimă S_2 la valoarea maximă S_1. Analog tensiunea scade continuu de la valoarea S_1 la valoarea S_2 începînd cu punctul D al ramurii de ieșire, pînă în punctul A al ramurii de intrare.

4.11. Pentru a mări tensiunea la cablele de funiculare se întrebuințează o roată de întindere, ca în figura 4.11. Să se determina forța F_2, cunoscînd forța $\bar{F}_1 = 2500$ daN, forța $\bar{F}$, care menține cablul sub tensiune, coeficientul de frecare $\mu = 0{,}165$ și știind că roțile O_1, O_2 și O_3 sînt acționate de cupluri rezistente.

Rezolvare. Aplicînd relația lui Euler pentru fiecare roată, rezultă succesiv :

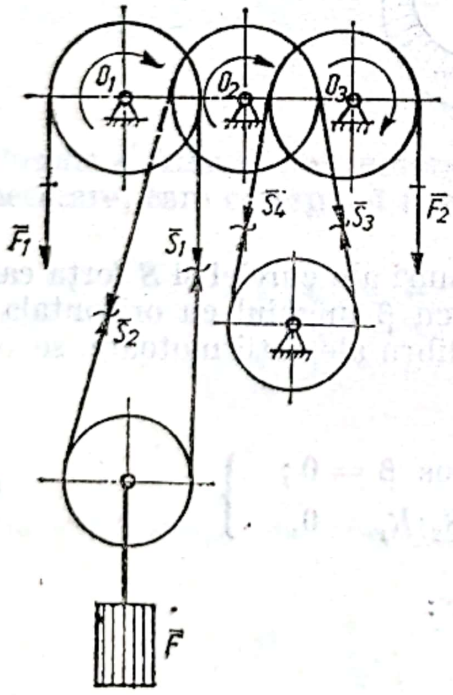


Fig. 4.11

$$S_1 = F_1 e^{\mu\alpha};\ S_2 = S_1;\ S_3 = S_2 e^{\mu\alpha};\ S_3 = S_4;$$
$$F_2 = S_4 e^{\mu\alpha} = S_2 e^{\mu\alpha} = F_1 e^{3\mu\alpha}$$

Forța $\bar{F}$, care menține cablul sub tensiune, are expresia :

$$F = S_1 + S_2 = 2F_1 e^{\mu\alpha}.$$

Ținînd seama că :

$$e^{\mu\alpha} = e^{0.165 \cdot 3{,}14} = 1{,}68,$$

rezultă

$$F = 2.2500.1{,}68 = 8\,400 \text{ daN}.$$

Prin urmare forța F_2 va fi :

$$F_2 = F_1 e^{3\mu\alpha} = 2500 \cdot e^{1{,}6} = 12.370 \text{ daN}.$$

4.12. Pe un pavaj de piatră se deplasează cu ajutorul unor role de stejar, cu diametrul $d = 20$ cm, o platformă pe care se găsește o greutate $G = 500$ daN (fig. 4.12).

Să se determine forța $\bar{F}$ necesară pentru mișcare, cu următoarele date : greutatea platformei G_p este de 150 daN, greutatea rolelor 50 daN, coefi-

cientul de frecare de rostogolire dintre platformă și rolă $s_1 = 0{,}2$ cm iar dintre role și pavaj $s_2 = 0{,}8$ cm.

Rezolvare. Se izolează corpurile și se introduc forțele care acționează asupra lor, arătate în figură.

Ecuațiile de proiecții pentru platformă sînt:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0;\ F - 2\,T_1 = 0;\\ \sum_i Y = 0;\ 2N_1 - 2\,G_1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

unde

$$G_1 = \frac{G + G_p}{2} =$$

$$\frac{500 + 150}{2} = 325 \text{ daN}.$$

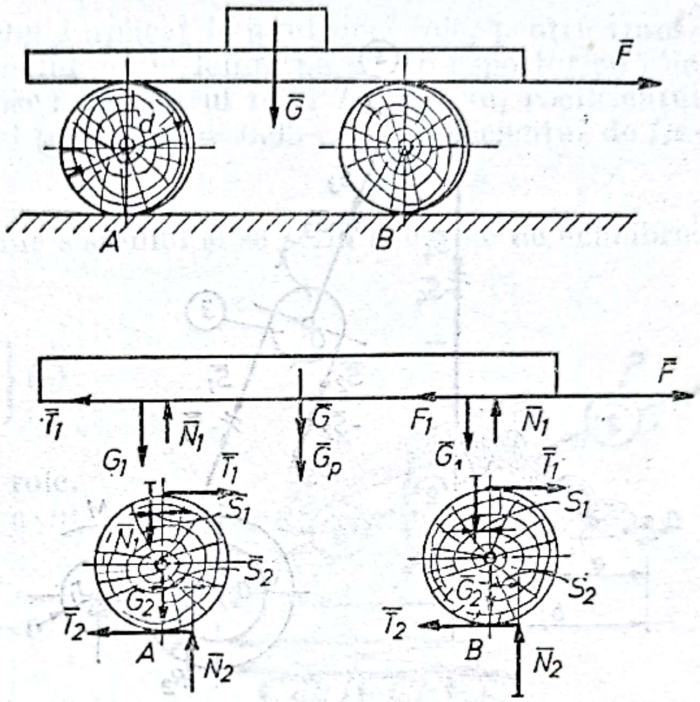


Fig. 4.12

Din aceste ecuații rezultă:

$$F = 2\,T_1;\ N_1 = G_1.$$

Pentru tăvălugi, ecuațiile de echilibru se scriu:

$$\left.\begin{aligned} \sum Y_i = 0;\ 2\,N_2 - 2\,G_2 - 2\,N_1 = 0;\\ \sum M_{(A)} = 0;\ -F_1 + N_1 s_1 + N_2 s_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Din aceste ecuații rezultă:

$$N_2 = G_2 + N_1 = 50 + 325 = 375 \text{ daN și } N_1 = \frac{N_1 s_1 + N_2 s_2}{d}.$$

Forța F necesară pentru mișcare este:

$$F = 2\,T_1 = 2\,\frac{325.0.2 + 375.0{,}8}{20} = 2\,\frac{65 + 300}{20} = 36{,}5 \text{ daN}$$

4.13. În figura 4.13 este reprezentat un troliu pentru descărcarea bușteni-lor din vagoane. Se cere să se stabilească dependența între momentul-motor M, aplicat la axul O_1 și sarcina de ridicat G; se va lua în considerare coeficientul pentru scripeți λ și se va neglija greutatea scripetelui mobil.

Rezolvare. Se descompune sistemul și se face echilibrul fiecărui element; pentru corpul *1*:

$$\sum M_{O1} = 0;\ M - Tr_1 = 0.$$

Condiția de echilibru a corpului *2* :

$$\sum M_{02} = 0\,;\; S_1 \cdot r_2 - T \cdot R_2 = 0.$$

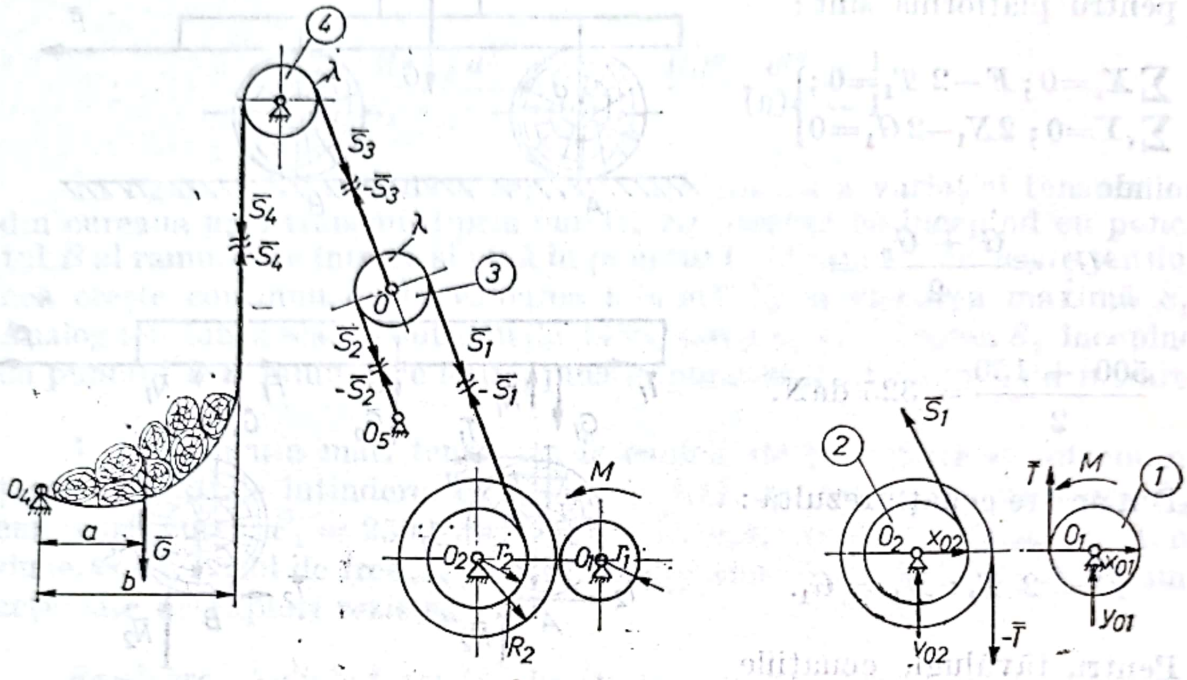


Fig. 4.13

Echilibrul scripetelui *3* se realizează pentru :

$$S_1 = \lambda S_2\,;\; \sum_{i=1}^{3} S_i = 0\,;\; S_1 \nparallel S_2 = S_3$$

Relația dintre tensiunile și firele, ce înfășoară scripetele *4* este

$$S_3 = \lambda S_4.$$

Condiția de echilibru pentru greutatea G este :

$$\sum M_{04} = 0\,;\; S_4 \cdot b - G \cdot a = 0.$$

Din ultima ecuație se determină $S_4 = G.a/b$ iar în continuare :

$$S_2 = \frac{S_1}{\lambda} \text{ și deci } S_1 + S_2 = S_1 + \frac{S_1}{\lambda} = \lambda G \frac{a}{b}\,;\; S_1 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda} G \frac{a}{b}$$

În continuare din ecuația :

$$M_{(O_2)} = 0\,;\; T = S_1 \frac{r_2}{R_2} = \frac{\lambda^2}{1+\lambda} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{r_2}{R_2} G,$$

se deduce :

$$M = Tr_1 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda} \cdot \frac{a}{b} \frac{r_1 r_2}{R_2} G.$$

4.14. Ce moment M, trebuie aplicat la axul unei role, pentru transportul pe plan înclinat a unor dulapi de lemn, pe un transportor cu role acționate (fig. 4.14). Se cunosc : diametrul rolei $D = 8$ cm, coeficientul de frecare la rostogolire, metal pe lemn $s = 0{,}03$ cm și coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0{,}6$.

Rezolvare. Se descompune sistemul și se scriu ecuațiile de echilibru. Pentru greutatea $\bar{Q}$:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0 &: 3\mu N - Q \sin \alpha = 0 ; \\ \sum Y_i = 0 &: 3\ N - Q \cos \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Se face echilibrul unei role. Ecuația de momente față de axul rolei va fi :

$$\sum M_{(O)} = 0 : M - \mu N R - N s = 0.$$

Din primele două ecuații se determină condiția constructivă a transportorului astfel ca piesa să nu alunece și anume :

$$N = \frac{Q \cos \alpha}{3} \text{ și } \mu = \frac{Q \sin \alpha}{3N} =$$

$$\operatorname{tg} \alpha \text{ deci } \operatorname{tg} \alpha \leqslant \mu.$$

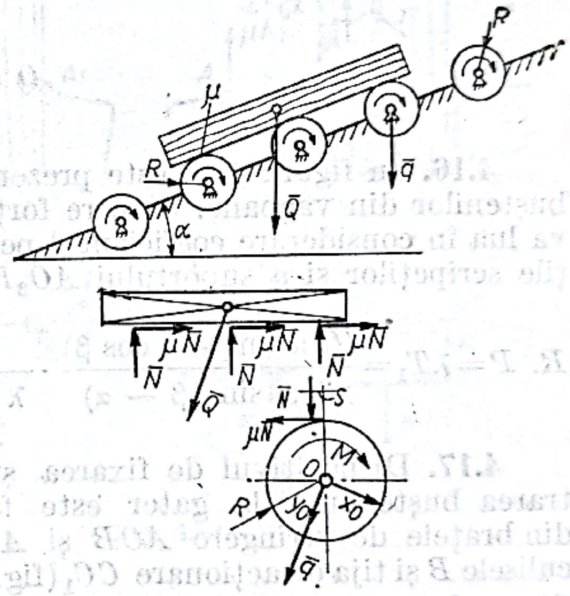


Fig. 4.14

Din ecuația treia se determină momentul minim necesar a se aplica la axul, rolei pentru ridicarea greutății $\bar{Q}$:

$$M = \mu N R + N s = \frac{Q}{3} \cos \alpha (\mu R + s) = \frac{Q}{3\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} (\mu R + s) = \frac{Q}{3} \frac{\mu R + s}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Pentru $\mu = 0{,}6$, $s = 0{,}03$ cm și $R = 4$ cm rezultă :

$$M = \frac{Q}{3} \cdot \frac{0{,}6 \cdot 4 + 0{,}03}{\sqrt{1 + 0{,}6^2}} = Q \cdot \frac{2{,}43}{3\sqrt{1{,}36}} = 0{,}7\ Q ;$$ unde M se ia în [daNcm] și Q în [daN].

4.15. Ce forță orizontală de împingere $\bar{Q}$, este necesară pentru a deplasa o scîndură, de greutate G, pe calea cu role a unui ferăstrău circular pendular (fig. 4.15). Se cunosc : raza rolei $r = 4$ cm și coeficientul frecării de rostogolire, lemn pe metal $s = 0{,}03$ cm.

Rezolvare. Se descompune sistemul și se scriu ecuațiile de echilibru pentru scîndură și pentru o rolă:

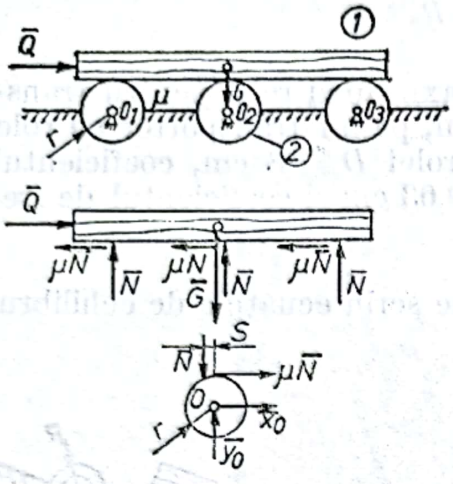


Fig. 4.15

$$\sum X_i = 0;\ Q - 3\mu N = 0; \qquad \text{(b)}$$

$$\sum Y_i = 0;\ 3N - G = 0 \qquad \text{(a)}$$

Ecuația de momente față de axul rolei este:

$$\sum M_{(O)} = 0;\ \mu N r - N s = 0. \qquad \text{(c)}$$

Din ecuația (b) rezultă $N = G/3$.

Din ecuația (c) rezultă $\mu N = \frac{Ns}{r} = \frac{G}{3}\frac{s}{r}$ și din ecuația (a) se obține

$$Q = 3\ N = \frac{Gs}{r} = G\frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075\ G.$$

4.16. În figura 4.16 este prezentat un dispozitiv pentru descărcarea bușteni lor din vagoane. Se cere forța $\bar{P}$, necesară ridicării sarcinii $\bar{G}$. Se va lua în considerare coeficientul pentru scripeți și se vor neglija greutățile scripeților și a suportului AO_3B.

R. $P = \lambda T_1 = \dfrac{(G\ a \sin\beta - b\cos\beta)}{3\ a\ \sin(\beta - \alpha)} \cdot \dfrac{\lambda^2}{\lambda + 1}$.

4.17. Dispozitivul de fixarea și centrarea bușteanului la gater este format din brațele de strîngere AOB și $A_1O_1B_1$, culisele B și tija de acționare CC_1 (fig.4.17). Să se determine forța de strîngere P în condiția de echilibru a sistemului. Se cunosc: forța Q de avans a bușteanului *1*, coeficientul de frecare μ între braț și buștean și dimensiunile a, b, c și d.

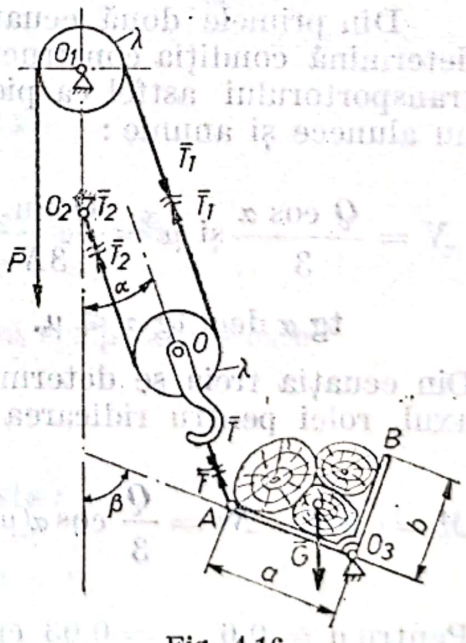


Fig. 4.16

Rezolvare. Se decompune sistemul și se face echilibrul fiecărui element.

Echilibrul elementului *1*:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i &= 0;\ N_1 - N_2 = 0; \\ \sum Y_i &= 0;\ Q - \mu N_1 - \mu N_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Rezultă $N_1 = N_2$, iar din ecuația a doua:

$$N_1 = \frac{Q}{2\mu}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Echilibrul elementului 2 :

$$\sum M_{(O)} = 0\,;\; N_1 \cdot a + \mu N_1 \cdot c - X_B \cdot d - Y_B \cdot b = 0.$$

Ecuaţiile de echilibru ale elementului *3*

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0\,;\; X_B = 0\,;\\ &\sum Y_i = 0\,;\; Y_B - N_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Rezultă

$$Y_B = N_3.$$

Ecuaţiile de echilibru ale elementului *4* :

$$\sum Y_i = 0\,;\; 2N_3 - P = 0.$$

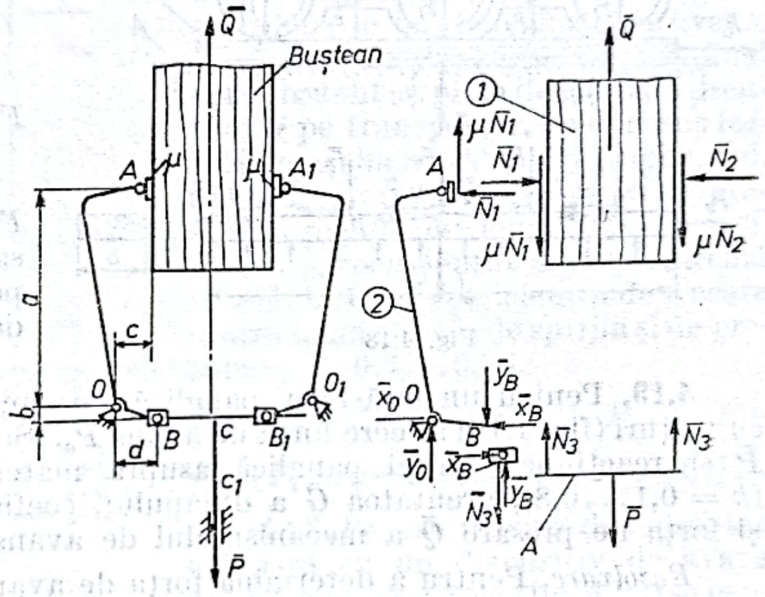
Rezultă $N_3 = P/2$; dar $Y_B = N_3$, deci, $Y_B = P/2$.

Se introduc valorile lui Y_B, X_B şi N_1 în ecuaţia de momente faţă de O şi rezultă :

$$\frac{Q}{2\mu} a + \mu \frac{Q}{2\mu} c - \frac{P}{2} d = 0,$$

de unde rezultă

$$P = Q \frac{a + \mu c}{\mu d}.$$



Figi 4.17

4.18. Să se determine forţa de avans şi forţa de presare în procesul şlefuirii lemnului la o maşină de şlefuit cu cilindri şi avans cu bandă (fig.4.18).

Rezolvare. Echilibrul materialului lemnos supus şlefuirii se scrie :

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0\,;\; 3P + 3\mu_1 F_1 + 2\mu_2 F_2 - P_a = 0\,;\\ &\Sigma Y_i = 0\,;\; pbl - 3F_1 - 2F_2 - G = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

în care P = forţa de tăiere ; F_1 = reacţiunea normală ; F_2 = forţa de presare ; G = greutatea elementului şlefuit ; p = presiunea dintre banda de avans şi lemn ; P_a = forţa de avans.

Din relaţia întîi rezultă :

$$P_a = 3P + 3\mu_1 F_1 + 2\mu_2 F_2. \qquad (b)$$

Forța de aderență între lemn și banda de avans este:

$$F_a = f(3F_1 + 2F_2 + G),$$

în care f este coeficient de aderență.

În condiția de echilibru static $P_a = F_a$ deci:

$$3P + 3\mu_1 F_1 + 2\mu_2 F_2 = f(3F_1 + 2F_2 + G).$$

$$2F_2(\mu_2 - f) = f(3F_1 + G) - 3P - 3\mu_1 F_1;$$

$$F_2 = \frac{f(3F_1+G) - 3P - 3\mu_1 F_1}{2(\mu_2 - f)}.$$

F_2 reprezintă forța de presare necesară și deci se poate dimensiona sistemul de presare.

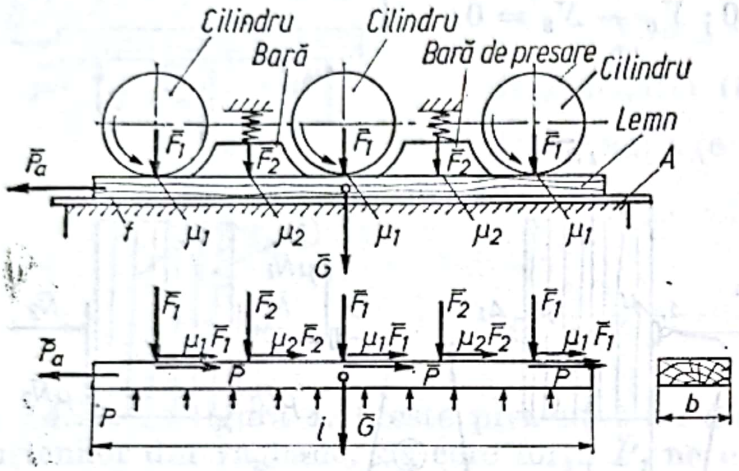


Fig. 4.18

4.19. Pentru un ferăstrău panglică de spintecat, dulapi, cu avans cu valțuri (fig. 4.19) se cere forța de avans $\bar{P}_a$. Se cunoaște forța de tăiere $\bar{P}$ și reacțiunea pînzei panglică asupra materialului lemnos $\bar{P}_0 = kP$ ($k = 0{,}1 \ldots 0{,}8$), greutatea $\bar{G}$ a dulapului, coeficienții de frecare μ și μ_1 și forța de presare $\bar{Q}$ a mecanismului de avans.

Rezolvare. Pentru a determina forța de avans a materialului lemnos, se izolează acesta și se scriu condițiile de echilibru.

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i = 0;\ P_a - P_0 - \mu_1 F N_1 - \mu N = 0; \\ \sum Y_i = 0;\ N - P - G = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Din ecuația a doua rezultă $N = P + G$; deci introducînd în prima relație rezultă:

$$P_a = P_0 + \mu_1 N_1 + \mu N = P_0 + \mu_1 N_1 + \mu(P + G).$$

Se observă că:

$$N_1 = Q.$$

Deci:

$$P_a = P_0 + \mu_1 Q + \mu(P + G).$$

4.20. Pentru un ferăstrău pendulă acționat hidraulic (fig. 4.20)

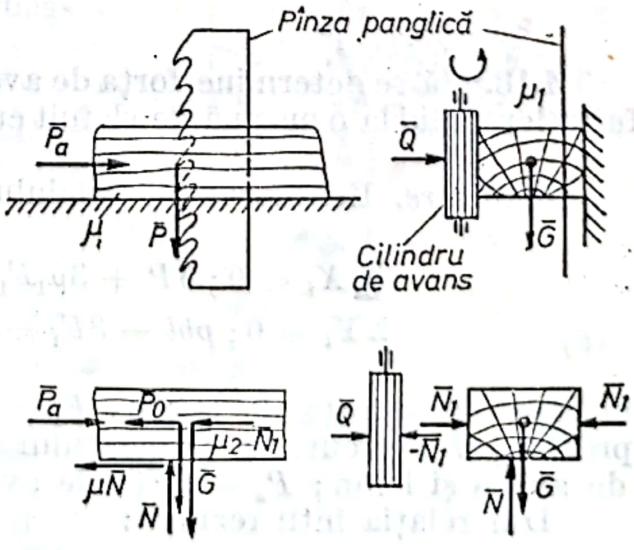


Fig. 4.19

se cere să se determine forța de avans F_a și forța din tija pistonului de acționare. Se cunosc forțele de așchiere P_t și P_r, unghiul φ și cotele a și b. În calcule se va considera un coeficient de suprasarcină $c_s = 1{,}2 \ldots 1{,}5$.

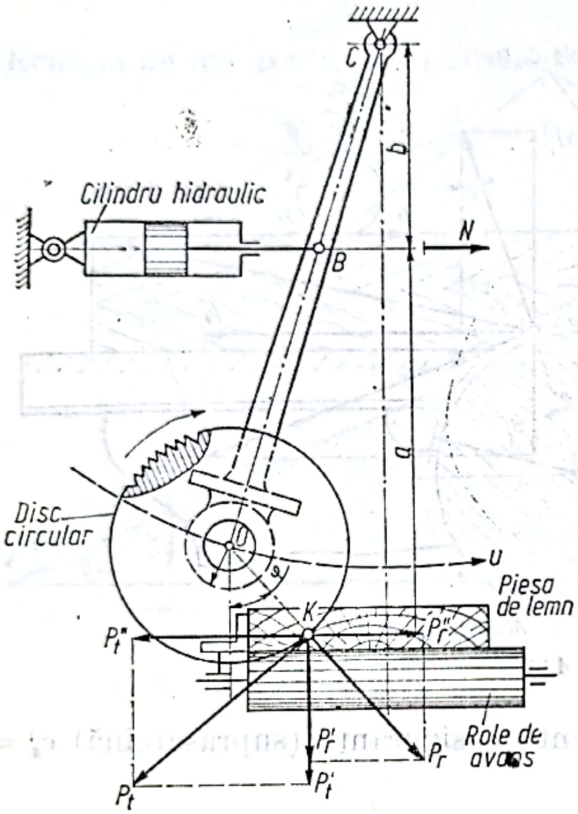


Fig. 4.20

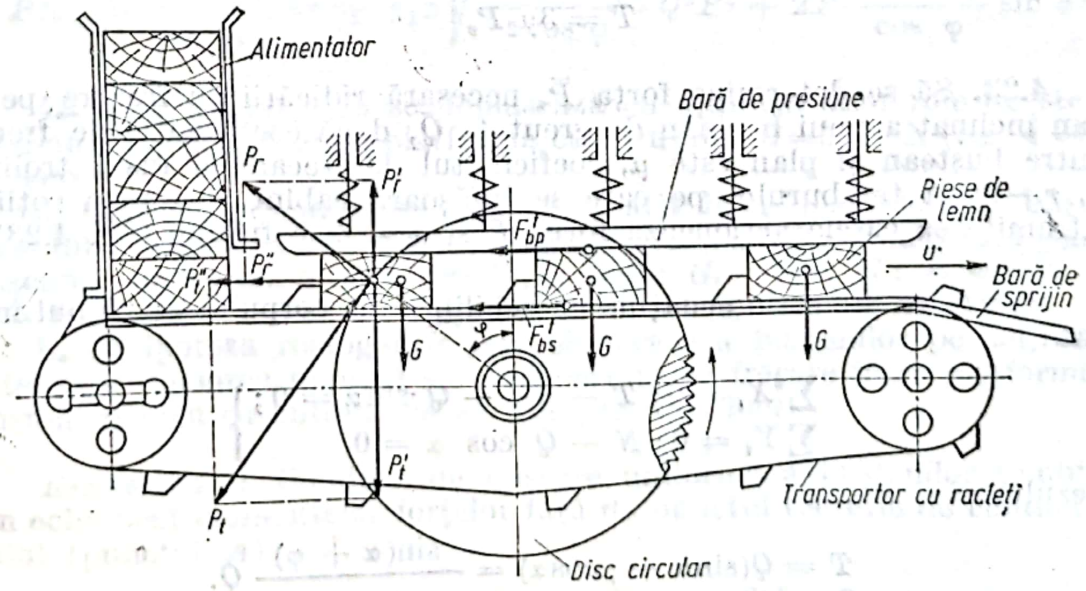
R. $F_a = c_s(P_r \sin \varphi - P_t \cos \varphi)$;

$$N = \frac{a+b}{b} F_a.$$

4.21. Pentru mecanismul de avans cu racleți al unui ferăstrău circular dublu de retezat (fig. 4.21) se cere să se calculeze mărimea forței de avans. În calcule se va considera ca fiind concomitent n piese de lemn de greutate G pe transportor. Se cunosc : forțele de așchiere P_t și P_r, unghiul φ, forța de presiune dintre bara de presare și piesele de lemn $P_p = (2-3)\, P_r \cos \varphi$, coeficientul de suprasarcină $c_s = 1{,}2 \ldots 1{,}5$ și coeficientul de frecare dintre lemn și bara de sprijin și de presiune $\mu = 0{,}3 \ldots 0{,}35$.

R. $F_a = c_s\{2(P_t \cos \varphi + P_r \sin \varphi) + [2(P_t \sin \varphi - P_r \cos \varphi) + n(2P_p + G)]\mu\}$.

4.22. Pentru mașina de îndreptat echipată cu un dispozitiv de avans mecanic cu trei role (fig. 4.22) se cere să se calculeze mărimea forței de presiune $P_p = P_1 = P_2 = P_3$ dintre rolă și lemn precum și mărimea forței de avans T. Se dau : forțele de așchiere P_r și P_t, unghiul φ de con-



Figl 4.21

tact între sculă și lemn, coeficientul de frecare de rostogolire $s = 0{,}02 \ldots 0{,}07$ cm între role și lemn; coeficientul de frecare $\mu_1 = 0{,}3 \ldots 0{,}5$ între lemn și masa mașinii precum și coeficientul de frecare de alunecare dintre lemn și role $\mu_2 = 0{,}3 \ldots 0{,}6$. Greutatea piesei de lemn este G iar raza rolelor R.

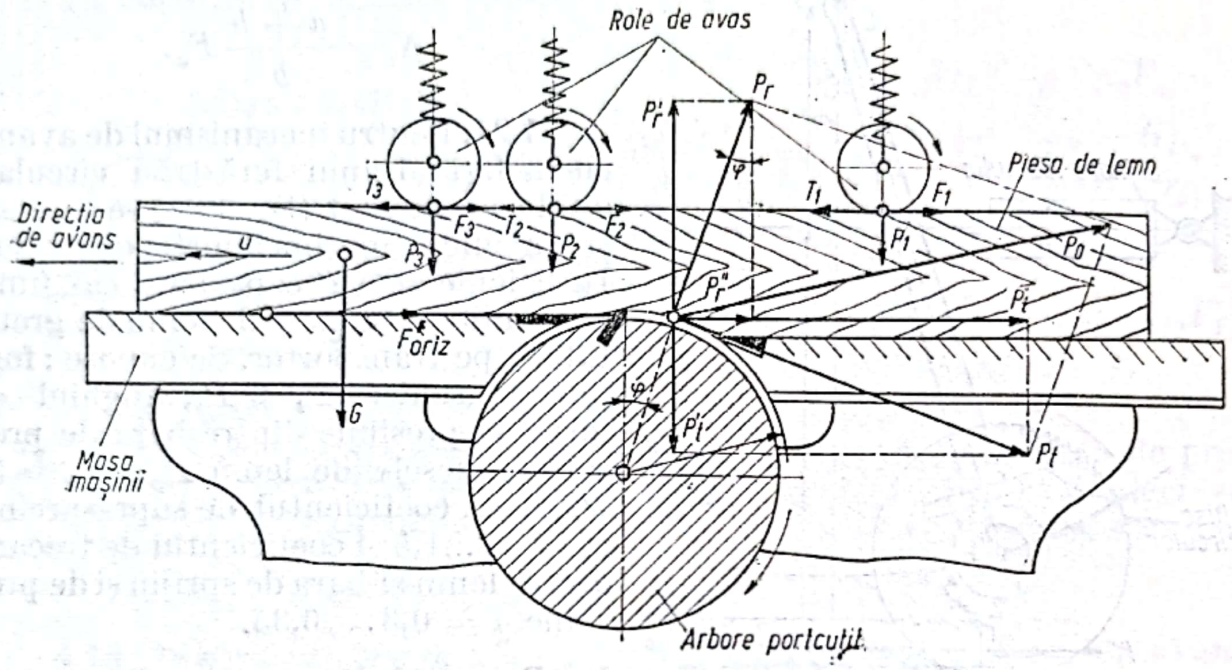


Fig. 4.22

În calcule se va lua un coeficient de siguranță (suprasarcină) $c_s = 1{,}3 \ldots 1{,}5$.

$$\text{R. } P_v = \frac{c_s[(P_t \cos \varphi + P_r \sin \varphi) + (P_t \sin\varphi - P_r \cos \varphi + G)\mu_1]}{3\left(\mu_2 - c_s \mu_1 - \dfrac{c_s s}{R}\right)}$$

$$T = 3\mu_2 P_v$$

4.23. Să se determine forța $\bar{P}$, necesară ridicării cu frecare pe un plan înclinat a unui buștean de greutate $\bar{Q}$, dacă coeficientul de frecare dintre buștean și plan este μ, coeficientul de frecare la fusul troliului μ_1, r — raza tamburului pe care se înfășoară cablul R — raza roții la extremitatea căreia acționează forța P și a — raza fusului (fig. 4.23).

Rezolvare. Se scriu ecuațiile de echilibru ale corpului pe planul înclinat:

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum X_i = 0;\ T - \mu N - Q \cdot \sin\alpha = 0; \\ \textstyle\sum Y_i = 0;\ N - Q \cos \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Rezultă:

$$T = Q(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} Q.$$

Se determină reacțiunile N_1 din axa troliului ; scriind teorema cosinusului (fig. 4.23, *b*) se obține :

$$N_1 = \sqrt{T^2 + P^2 + 2PT \cos (90^\circ - \alpha)} = \sqrt{T^2 + P^2 + 2PT \sin \alpha}.$$

Ecuația de momente față de punctul O se scrie :

$$\sum M_{(O)} = 0 ; \; - PR + T.r + \mu N_1 a = 0.$$

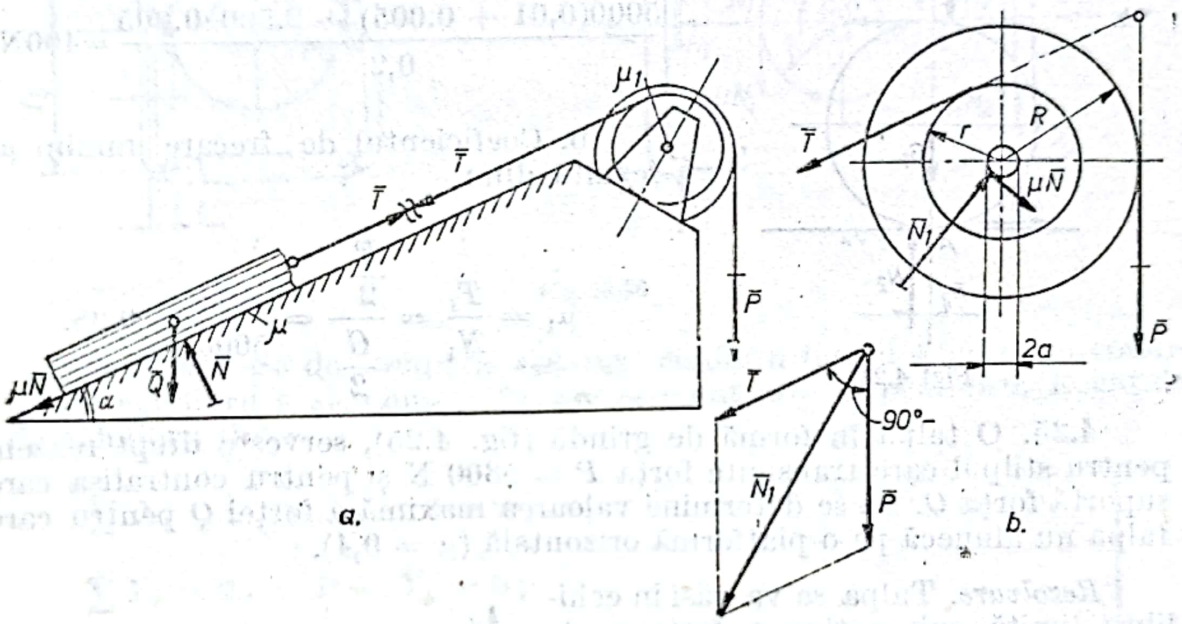


Fig. 4.23

Dacă se înlocuiesc T și T_1, rezultă ecuația care dă forța P :

$$- PR + \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} Qr + \mu_1 a \sqrt{\frac{\sin^2(\alpha+\varphi)}{\cos^2\varphi} Q^2 P^2 + 2P \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos \varphi} \sin \alpha} = 0.$$

4.24. Pe un sol plan se deplasează cu ajutorul unor role de stejar, cu diametrul $d=0{,}2$ m, o platformă cu greutatea $G=5000$ N (fig. 4.24,*a*). Se cere :

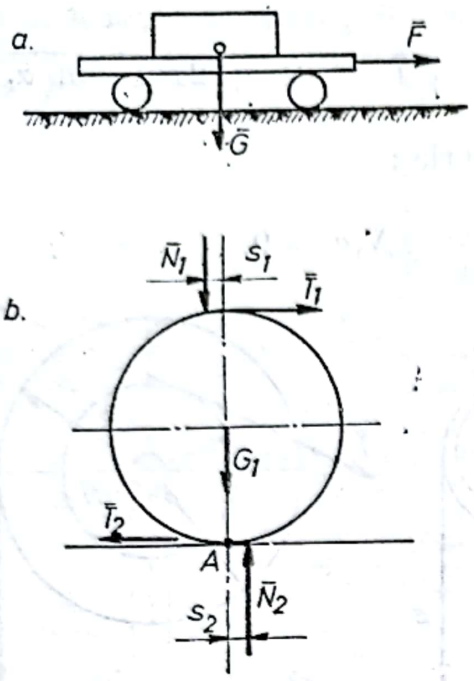
a. Considerînd aderența suficientă atît între platformă și bușteni cît și între bușteni și sol, să se determine valoarea forței F necesară pentru mișcarea uniformă a platformei (se dau : $G_1 = 500$ N : $s_1 = 0{,}01$ m ; $s_2 = 0{,}005$ m) ;

b. În ipoteza rostogolirii fără alunecare a bușteniilor pe sol, să se determine valoarea minimă a coeficientului de frecare între platformă și bușteni pentru ca antrenarea acestora să aibă loc.

Rezolvarea. a. Condiția de mișcare uniformă a bușteniilor se obține din echilibrul momentelor forțelor față de punctul teoretic de contact cu solul (punctul A) :

$$\sum (M_{(A)}) = 0 ; \; N_1 s_1 + N_2 s_2 - T_1 d = 0 ;$$

sau



Figl 4.24

$$\frac{G}{2}s_1 + \left(\frac{G}{2} + G_1\right)s_2 - \frac{F}{2}d = 0.$$

Rezultă:

$$F = \frac{Gs_1 + Gs_2 + 2G_1s_2}{d} =$$

$$\frac{5000(0{,}01 + 0{,}005) + 2.500 \cdot 0{,}005}{0{,}2} = 400\text{N}.$$

b. Coeficientul de frecare minim μ_1 rezultă din:

$$\mu_1 = \frac{T_1}{N_1} = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{G}{2}} = \frac{400}{5000} = 0{,}08.$$

4.25. O talpă în formă de grindă (fig. 4.25), servește drept reazem pentru stîlpul care transmite forța $P = 5300$ N și pentru contrafișa care suportă forța Q. Să se determine valoarea maximă a forței Q pentru care talpa nu alunecă pe o platformă orizontală ($\mu = 0{,}4$).

Rezolvare. Talpa se va găsi în echilibru limită sub acțiunea forțelor de acțiune P și Q, pe de o parte și a forțelor de reacțiune N și T, pe de altă parte. Forțele de acțiune P și Q fiind concurente, ele se reduc la o rezultantă unică care va trebui să fie echilibrată de rezultanta reacțiunilor N și T.
Decurge de aici că sînt necesare și suficiente următoarele ecuații de echilibru:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0;\ T - Q\cos\alpha = 0;\\ &\sum Y_i = 0;\ N - P - \sin\alpha = 0;\\ &T = \mu N. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

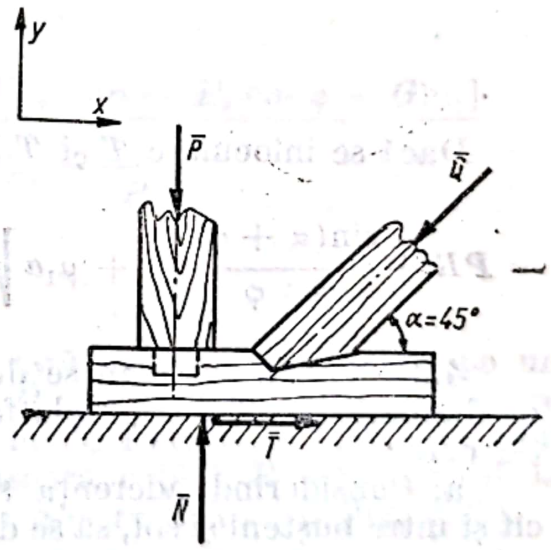


Fig. 4.25

Rezultă:

$$Q = \frac{\mu P}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{0{,}4 \cdot 5300}{0{,}707 - 0{,}4 \cdot 0{,}707} = 5000\text{ N}.$$

4.26. În figura 4.26 este reprezentată schema unei frîne cu saboți pentru podurile rulante din depozitul de bușteni. Să se determine forța necesară P aplicată sistemului de acționare în condiția frînării. Se consideră cunoscute distanțele l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l și momentul motor M_0.

Scanned with OKEN Scanner

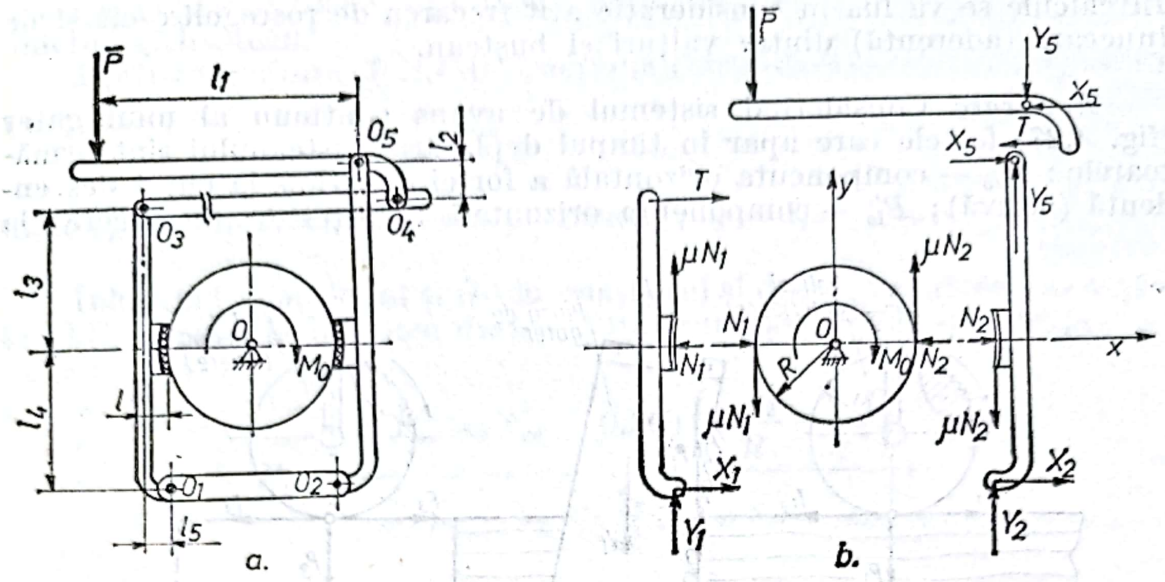


Fig. 4.26

Rezolvare. Se descompune sistemul conform figurii 4.26, *b*. În condiția de echilibru a sistemului, fiecare element este în echilibru. Ecuațiile de echilibru sînt :

$$\left.\begin{aligned}
&\sum X_i = 0\,;\ -X_5 - T = 0\,;\\
&\sum Y_i = 0\,;\ -P - Y_5 = 0\,;\\
&\sum M_{zi(O_5)} = 0\,;\ Pl_1 - Tl_2 = 0\,;\\
&\sum M_{zi(O_1)} = 0\,;\ N_1 l_4 - \mu N_1(l_5 - l) - T(l_3 + l_4) = 0\,;\\
&\sum M_{zi(O_2)} = 0\,;\ N_2 l_4 + \mu N_2(l_5 - l) - Y_5 l_5 + X_5(l_2 + l_3 + l_4) = 0\,;\\
&\sum M_{zi(O)} = 0\,;\ M_0 - \mu\,N_1 + N_2)R = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Soluțiile sistemului de ecuații sînt :

$$Y_5 = -P\,;\ T = \frac{Pl_1}{l_2}\,;\ X_5 = -\frac{Pl_1}{l_2}\,;\ N_1 = \frac{Pl_1(l_3 + l_4)}{l_2(l_4 - \mu l_5 + \mu l)}\,;$$

$$N_2 = \frac{M_0}{\mu R} - \frac{Pl_1(l_3 + l_4)}{l_2(l_4 - l_5 + \mu l)}\,;$$

$$P = \left(\frac{M_0}{\mu R}\right)\frac{l_2[l_4^2 - \mu^2(l_5 - l)^2]}{2l_1l_4(l_3 + l_4) + l_2l_4(l_1 - l_5) + \mu l_2(l_5 - l)(l_5 - l_1)}\,.$$

4.27. Pentru mecanismul de avans cu valțuri al unui gater vertical se cere să se calculeze forța de presiune dintre valțuri și buștean (fig. 4.27).

Scanned with OKEN Scanner

În calcule se va lua în considerație atît frecarea de rostogolire cît și de lunecare (aderentă) dintre valțuri și buștean.

Rezolvare. Considerînd sistemul de avans continuu al unui gater (fig. 4.27) forțele care apar în timpul deplasării bușteanului sînt următoarele : P_{to} — componenta orizontală a forței de avans la cursa descendentă (activă); P'_{to} — componenta orizontală a forței de respingere la

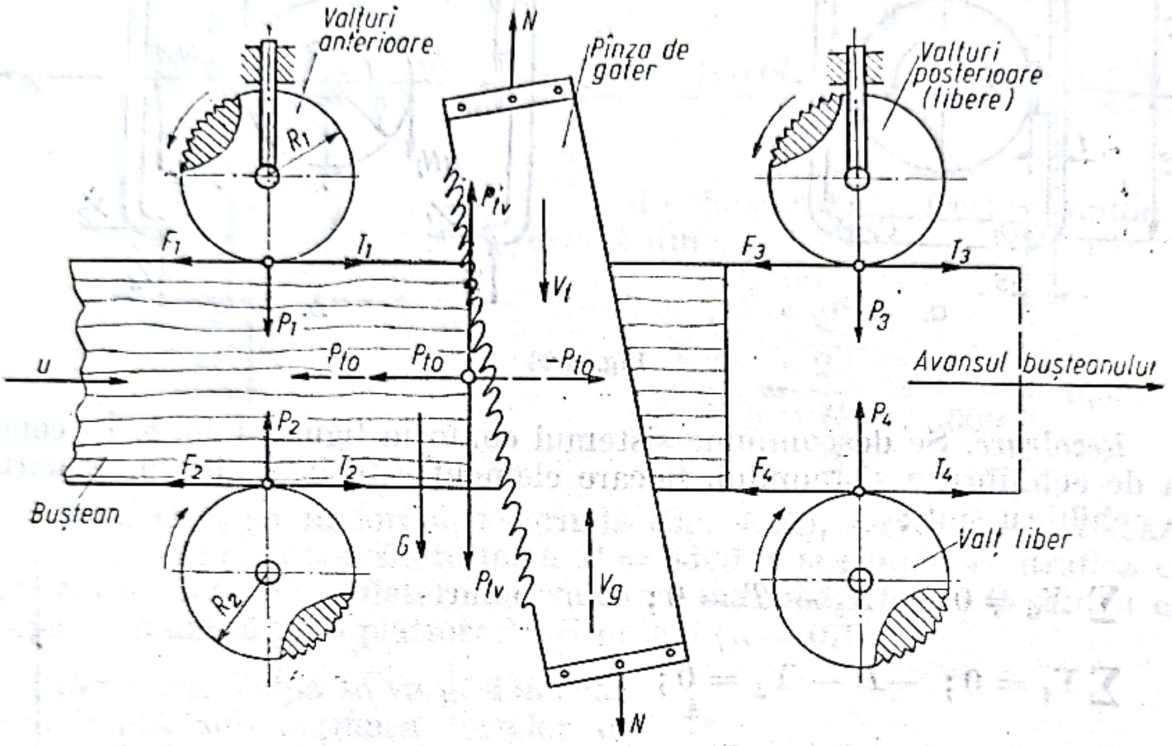


Fig. 4.27

cursa ascendentă (pasivă sau mersul în gol); G — greutatea bușteanului; P_{tv} și P'_{tv} — componentele verticale ale forței de tăiere la cursa activă și respectiv cea pasivă; P_1 și P_2 — forțele de presare dintre valțuri și buștean; F_1 și F_2 — forțele de frecare; T_1 și T_2 — forțele de tracțiune a bușteanului în direcția avansului.

Forța rezistentă care trebuie învinsă de valțurile motoare ale sistemului de avans (valțurile anterioare) este :

$$F_{rez} = P_{to} + F_2 + F_1 = P_{to} + (P_{tv} + 0{,}5G + P_1)\frac{s_2}{R_2} + P_1\frac{s_1}{R_1}, \qquad (a)$$

unde s-a înlocuit

$$F_1 = P_1\frac{s_1}{R_1} \text{ și } F_2(P_{tv} + 0{,}5\,G + P_1)\frac{s_2}{R_2},$$

iar s_1 și s_2 sînt coeficienții de frecare de rostogolire dintre valțuri și buștean. Pe de altă parte forța totală de tracțiune, care trebuie să învingă forța rezistentă a unui buștean este

$$T_{1;2} = T_1 + T_2 = (P_{to} + 0{,}5\,G + P_1)\mu_2 + P_1\mu_1, \qquad (b)$$

unde μ_1 și μ_2 sînt coeficienții de aderență (frecare) între valțul superior și inferior și buștean.

Pentru siguranță, forța de tracțiune (forța de avans) se ia egală cu

$$T_{1;2} = c_s F_{rez}, \qquad (c)$$

unde c_s este un coeficient de suprasarcină; $c_s = 1{,}3-1{,}5$.

Înlocuind relațiile (a) și (b) în relația (c) și după efectuarea calculelor se obține forța de presiune dintre valțul superior și buștean, respectiv:

$$P_1 = \frac{c_s P_{to} + (P_{tv} + 0{,}5G)\left(\frac{c_s s_2}{R} - \mu_2\right)}{\mu_1 + \mu_2 - \frac{c_s}{R}(s_1 + s_2)}, \qquad (d)$$

căci $R_1 \cong R_2 = R$.

La mersul în gol (la cursa ascendentă a cadrului cu pînze) forța P_{to} devine $-P'_{to}$ (care apasă asupra fundului tăieturii) iar P_{tv} devine P'_{tv}. În acest caz relația (d) devine

$$P'_1 = \frac{c_s P'_{to} + (0{,}5G - P'_{tv})\left(\frac{c_s s_2}{R} - \mu_2\right)}{\mu_1 + \mu_2 - \frac{c_s}{R}(s_1 + s_2)}. \qquad (e)$$

Cercetările experimentale arată $P'_{tv} \cong 600...700$ daN iar $P'_{to} = 800...900$ daN iar valorile coeficienților de frecare de rostogolire pentru valțuri netede sînt prezentate în tabelul 4.27, *a* iar de frecare de lunecare pentru valțuri riflate (cu striațiuni) în tabelul 4.27, *b*.

Tabelul 4.27,

Specia	Umiditatea%	Coeficienții de frecare s[cm] pentru diametrul bușteniilor [mm]							
		60	80	100	120	140	160	180	200
Rășinoase	12	0,45	0,50	0,55	0,58	0,60	0,63	0,65	0,69
	65	0,58	0,63	0,67	0,71	0,76	0,80	0,84	0,84
Mesteacăn	12	0,52	0,56	0,64	0,68	0,70	0,73	0,75	0,77
	65	0,60	0,67	0,73	0,78	0,81	0,84	0,87	0,90
Stejar	12	0,23	0,25	0,26	0,27	0,29	0,31	0,34	0,37
	65	0,35	0,37	0,39	0,41	0,44	0,47	0,50	0,53

Cunoscînd forțele P_1 și P'_1 se poate determina cu relația (b) forța totală de avans (de tracțiune pe direcția avansului) și apoi puterea necesară realizării mișcării de avans.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.27, b

SPECIA	Umiditatea %	Coeficentul de frecare μ, pentru diametrul buștenilor (mm)							
		60	80	100	120	140	160	180	200
Răşinoase	12	0,48	0,46	0,44	0,42	0,40	0,38	0,36	0,34
	65	0,55	0,52	0,50	0,48	0,46	0,44	0,41	0,39
Mesteacăn	12	0,49	0,47	0,45	0,43	0,41	0,39	0,37	0,35
	65	0,56	0,54	0,52	0,49	0,47	0,45	0,42	0,40
Stejar	12	0,43	0,41	0,39	0,37	0,36	0,34	0,32	0,31
	65	0,49	0,47	0,45	0,43	0,41	0,39	0,37	0,35

4.28. Să se determine forţa de presiune dintre valţuri şi dulap la mecanismul de avans cu valţuri al ferăstrăului circular dublu de tivit cherestea (fig. 4.28).

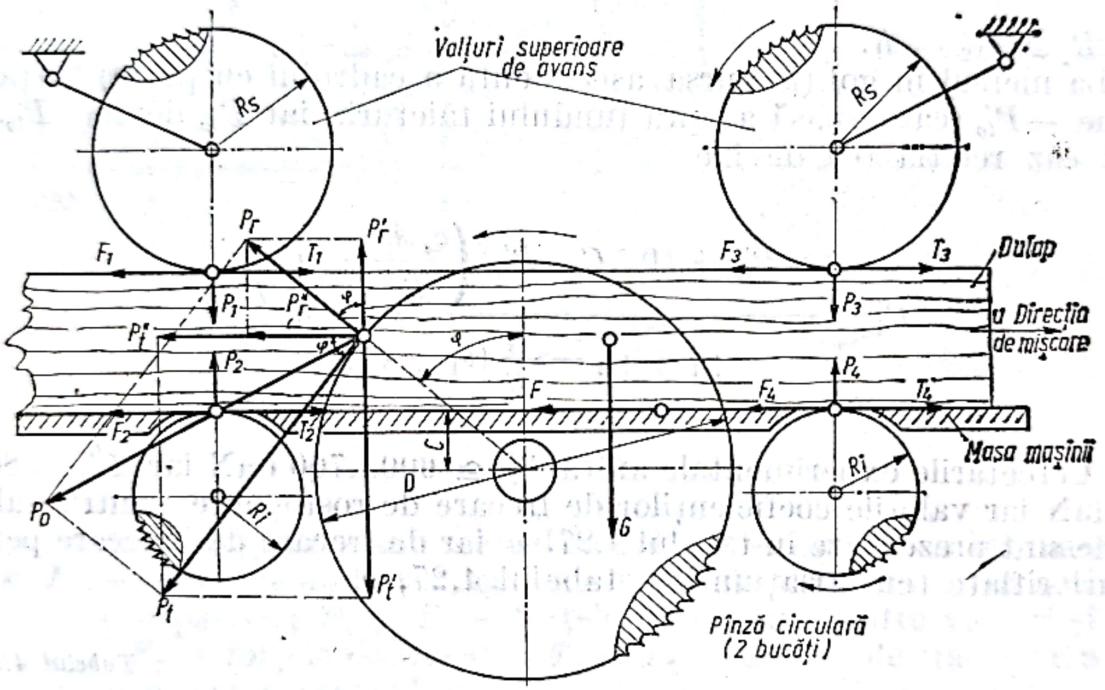


Fig. 4.28

Rezolvare. În direcţia de avans al dulapului în timpul tivirii canturilor, la ferăstrăul circular dublu acţionează următoarele forţe:

— componentele orizontale P_r'' şi P_t'' ale forţelor de tăiere în direcţie radială respectiv tangenţială (respectiv ale componentelor P_r şi P_t ale forţei P_0 de tăiere), egale cu

$$P_{ortiz}^{t} = 2(P_t'' + P_r'') = 2(P_t \cos \varphi + P_r \sin \varphi); \qquad (a)$$

— forţele de frecare produse de rostogolirea valţurilor de avans pe suprafaţa dulapului ce se prelucrează, respectiv

$$P_{ortiz}^{fr} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 2F_v + 2F_i = 2\left(P_{vs}\frac{s_s}{R_s} + P_{vi}\frac{s_i}{R_i}\right), \qquad (b)$$

unde F_1, F_2, F_3 și F_4 sînt forțele de frecare de la fiecare valț (două superioare și două inferioare);

P_{vs} și P_{vi} — forțele de presiune a valțurilor superioare, respectiv inferioare pe dulap; $P_{vs} = P_1 = P_2$ și $P_{vi} = P_3 = P_4$;

s — coeficientul de frecare de rostogolire; s_s — pentru valțurile superioare și s_i — pentru valțurile inferioare;

R_s și R_i — razele valțurilor superioare respectiv inferioare.

F — forța de frecare a dulapului pe masa mașinii, respectiv

$$F = [2(P_t' - P_r') + G]\ \mu_1 = [2(P_t \sin \varphi - P_r \cos \varphi) + G]\mu_1, \qquad (c)$$

în care P_t' și P_r' sînt componentele verticale ale forțelor de tăiere;

μ_1 — coeficientul de frecare dintre dulap și masă; $\mu_1 = 0{,}3-0{,}5$;

G — greutatea dulapului (cherestelei).

Forța totală rezistentă, pe direcția avansului, este

$$F_{rez} = P_{oriz}^{t} + P_{oriz}^{fr} + F = 2(P_t \cos \varphi + P_r \sin \varphi) + 2\left(P_{vs}\frac{s_s}{R_s} + P_{vi}\frac{s_i}{R_i}\right) + [2(P_t \sin\varphi - P_r \cos \varphi) + G]\mu_1. \qquad (d)$$

Forța totală de tracțiune (de avans) a cherestelei este

$$T = c_s F_{rez} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 2T_{vs} + 2T_{vi}, \qquad (e)$$

în care T_1, T_2, T_3 și T_4 sînt forțele de tracțiune de la fiecare valț;

T_{vs} — forța de tracțiune de la valțul superior;

T_{vi} — forța de tracțiune de la valțul inferior;

c_s — coeficient de siguranță (de suprasarcină); $c_s = 1{,}3-1{,}5$;

Forța de tracțiune la suprafața valțurilor, în contactul cu dulapul ce se prelucrează, este, la limită, egală cu forța de frecare de alunecare, respectiv

$$T = 2\mu_2(P_{vs} + P_{vi}), \qquad (f)$$

unde μ_2 este coeficientul de frecare de alunecare între valț și cherestea; $\mu_2 = 0{,}3-0{,}6$.

Considerînd că $P_{vs} = P_{vi}$, din relațiile (d), (e) și (f), rezultă

$$P_{vs} = \frac{2(P_t \cos \varphi + P_r \sin \varphi) + [2(P_t \sin \varphi - P_r \cos \varphi) + G]\mu_1}{2\left(\frac{2\mu_2}{c_s} - \frac{s_s}{R_s} - \frac{s_i}{R_i}\right)} \qquad (g)$$

Situaţia dificilă la avansul cherestelei în ferăstrăul circular dublu de spintecat se produce în momentul antrenării acesteia numai de valţurile anterioare (la intrarea cherestelei) sau numai de valţurile posterioare (la ieşirea capătului din ferăstrău). În acest caz

$$P'_{vs} = 2P_{vs}.$$

Cunoscînd forţa P_{vs} sau P'_{vs} cu relaţia (f) se determină forţa totală de tracţiune pe direcţia avansului (forţa de avans) şi apoi puterea necesară pentru mişcarea de avans.

4.29. Pentru ferăstrăul circular multiplu de spintecat se cere să se calculeze expresia forţei de presiune dintre valţuri şi lemn precum şi mărimea forţei de avans. Avansul piesei de lemn se realizează cu ajutorul unui mecanism cu şenilă (fig. 4.29).

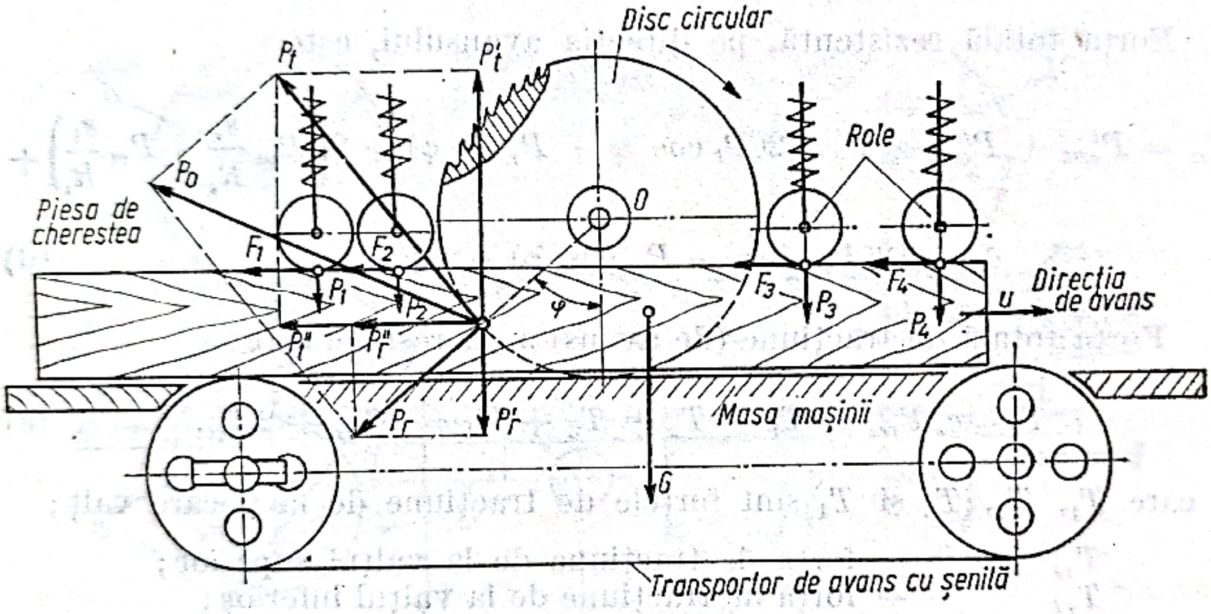


Fig. 4.29

Rezolvare. Forţa de avans T trebuie să învingă forţele rezistente pe direcţia de deplasare a piesei de cherestea.

Forţele rezistente pe direcţia avansului sînt:

— componentele orizontale ale forţelor de aşchiere (radială şi tangenţială)

$$P^{tr}_{ortz} = P''_t + P''_r = (P_t \cos \varphi + P_r \sin \varphi)n, \qquad \text{(a)}$$

în care n este numărul de ferăstraie circulare ce lucrează simultan;

— forţele de frecare generate de rostogolirea valţurilor de presiune pe suprafaţa cherestelei

$$F^{fr}_{ortz} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 4F = 4P_v \frac{s}{R}, \qquad \text{(b)}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care P_v este presiunea exercitată de valțuri asupra lemnului, respectiv

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_v;$$

s — coeficientul de frecare de rostogolire;
R — raza valțurilor.
Forța totală rezistentă pe direcția avansului este

$$F_{rez} = P^{t}_{oriz} + F^{fr}_{oriz} = (P_t \cos \varphi + P_r \sin\varphi)n + 4P_v \frac{s}{R}. \qquad (c)$$

Forța de avans (de tracțiune) a materialului este

$$T = c_s F_{rez},$$

unde coeficientul de suprasarcină este $c_s = 1{,}5-1{,}8$.
Pe de altă parte, expresia forței de avans determinată de mărimea forțelor de frecare, este

$$T = [(P_r \cos\varphi - P_t \sin\varphi)n + G + 4P_v]\mu, \qquad (e)$$

în care G este greutatea scîndurii,
μ — coeficientul de frecare între șenilă și lemn; $\mu = 0{,}26-0{,}46$.
Din relațiile (c), (d) și (e) rezultă expresia forței de presiune dintre valțuri și lemn

$$P_v = \frac{c_s\, n(P_t \cos\varphi + P_r \sin\varphi) - \mu\, n(P_r \cos\varphi - P_t \sin\varphi) - \mu G}{4\left(\mu - \frac{c_s\, s}{R}\right)}. \qquad (f)$$

Cu relația (e) se calculează forța de avans și apoi puterea de avans.
4.30. Să se studieze rezistențele la rulare ale mașinii de corhănit și transportat pe roți (fig. 4.30, *a*).

Rezolvare. Se consideră tractorul în mișcare uniformă pe un plan înclinat și drum rectiliniu. Asupra sa acționează următoarele forțe:

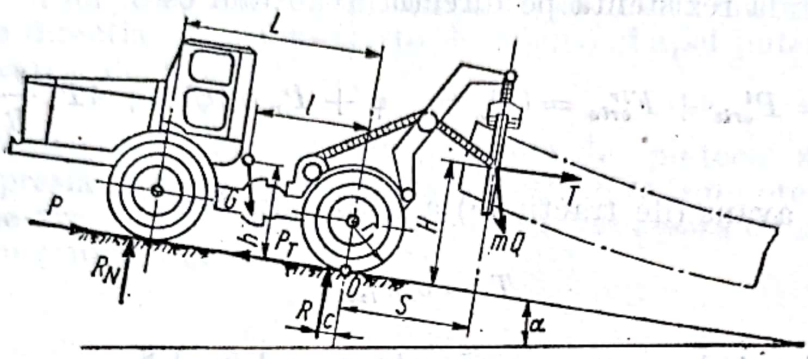
G — greutatea proprie a mașinii,
G_t — greutatea totală a mașinii cu încărcătură;
Q — greutatea încărcăturii;
T — forța de rezistență la tragerea pachetului de arbori;
P_t — forța de tracțiune la roata motoare;
P — forța de aderență la roata din față;
R_N — reacțiuni normale la roți.
Ecuația de momente față de punctul O are forma

$$Gl \cos \alpha = Gh \sin \alpha + G_t f \cos \alpha + nQ(S \cos \alpha + H \sin \alpha) + TH, \qquad (a)$$

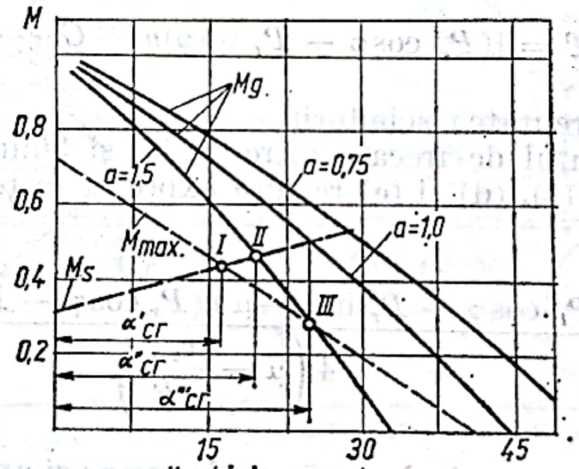
unde $G_t = G + mQ$; $T = (1 - m)Q\,(f_1 \cos \alpha + \sin \alpha)$.

Forța de tracțiune trebuie să satisfacă relațiile

$$\left.\begin{aligned} P_x &\leqslant \frac{M_e}{r}\eta\,; \\ P_x &\leqslant G_t\varphi\,\cos\,\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$



a.



b

Fig. 4. 30

În relațiile (a) și (b) apar mărimile :

l — distanța de la centrul de greutate al mașinii la puntea din spate ; h — înălțimea centrului de greutate al mașinii ; f — coeficientul rezistențelor la rulare ; r — raza dinamică a roții ; α — înclinarea drumului ; m — coeficientul de repartizare a greutății încărcăturii pe puntea din spate ; S — distanța de la puntea motoare la punctul de legare a sarcinii, măsurată pe pantă ; H — înălțimea punctului de legare a sarcinii ; φ — coeficientul de aderență ; f_1 — rezistența specifică la tracțiune ; M_e — momentul motor maxim de tracțiune al motorului ; η — randamentul mecanic al transmisiei ; i — raportul total de transmisie.

Momentul în punctul O, fără sarcină la cîrlig este

$$M_g = Gl\ (\cos\ \alpha - h\ \sin\ \alpha).$$

Scanned with OKEN Scanner

Notind $h = a$ se poate scrie

$$M_h = Gl(\cos\ \alpha - a\ \sin\ \alpha). \qquad (c)$$

Momentul motorului cu sarcină este

$$M_s = G_t fr\ \cos\ \alpha + mQS\ \cos\ \alpha + [(1-m)Q\ f_1 \cos\ \alpha + Q\ \sin\ \alpha]H \qquad (d)$$

Valoarea critică a înclinării drumului se obţine egalind aceste două momente ($M_g = M_s$), de unde rezultă

$$\text{tg}\ \alpha''_{cr} = \frac{l - (1+mq)fr - q[mS + f_1 H(1-m)]}{gH + al},$$

în care $q = Q/G$ este sarcina specifică.

Grafic această stare este reprezentată în figura 4.30, *b*, punctul II.

Din ecuaţia (b) se impune condiţia de patinare, respectiv

$$\varphi \geqslant f + \text{tg}\ \alpha + \frac{(1-m)Q}{G_t}(f_1 + \text{tg}\ \alpha) = f + \text{tg}\ \alpha + \frac{q - mq}{1 + mq}(f_1 + \text{tg}\ \alpha).$$

Valoarea maximă a sarcinii specifice q este

$$q = \frac{\varphi - f - \text{tg}\ \alpha}{(1-m)f_1 + \text{tg}\ \alpha - m(\varphi - f)},$$

iar valoarea maximă a sarcinii la cîrligul încărcăturii (efortul de tracţiune în cablu de remorcare) este

$$T = mQ\ \sin\ \alpha + (1-m)Q\ (f_1 \cos\ \alpha + \sin\ \alpha) =$$

$$= G_t(\varphi - f)\cos\ \alpha - G\ \sin\ \alpha.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţia (d) se obţine momentul motor maxim

$$M_{max} = G_t \cdot f \cdot r \cdot \cos\ \alpha + mQS\ \cos\ \alpha + [G_t\ \cos\ \alpha(\varphi - f) - G\ \sin\ \alpha]H. \qquad (e)$$

Punctul I din figura 4.30, *b* ($M_t = M_s$) reprezintă unghiul critic al drumului privind patinarea

$$\text{tg}\,\alpha'_{cr} = \frac{G_t(\varphi - f) - (1-m)Q \cdot f_1}{G + Q} = \frac{(1+mq)(\varphi - f) - q(1-m)f_E}{1+q}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pierderea stabilității mașinii conduce la $R_N = 0$ la roata din față și mișcarea mașinii este condiționată de egalitatea $M_{max} = M_g$. Acest lucru este posibil, dacă

$$\varphi \geqslant \frac{G[l-(al-H)\operatorname{tg}\alpha] + G_t f(H-r) - mQS}{G_t \cdot H} =$$

$$= \frac{l-(al-H)\operatorname{tg}\alpha + (1+mq)f(H-r) - mqS}{(1+mq)H}$$

respectiv

$$f_1 \leqslant \frac{q(1-m)}{H}[l-(al-H)\operatorname{tg}\alpha + (1+mq)f(H-r) - mqS] -$$

$$- \frac{1+mq}{q(1-m)}(f+tg\ \alpha) - \operatorname{tg}\alpha.$$

Punctul III din figura 4.30, *b* este determinat de relația

$$\operatorname{tg}\alpha'''_{cr} = \frac{Gl - G_t[f \cdot r + H(\varphi - f)] - mqS}{G(al-H)} =$$

$$= \frac{l-(1+mq)[f \cdot r + H(\varphi - f)] - mqS}{al-H}.$$

Valoarea pantei care nu este recomandată pentru deplasarea mașinii de corhănit și transportat pe roți este dată de relația

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{RL - G(L-l) - (1-m)Qf_1H - mQ(S+L)}{G\,al + QH},$$

unde R este valoarea maximă a reacțiunii la puntea din spate iar L este distanța între cele două punți.

Cercetările experimentale arată că valoarea optimă a coeficientului m este

$$m = 0{,}28 + 0{,}11\ H,$$

iar pachetul de bușteni trebuie prins la o distanță de cel puțin 50 cm de la bază.

CAPITOLUL V

ECHILIBRUL CABLURILOR

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

5.1. GENERALITAȚI

Cablurile sînt funii formate din sîrme de oțel răsucite laolaltă în jurul unei inimi centrale. Inima cablului poate să fie o sîrmă de oțel mai groasă decît celelalte, sau o împletitură din fibră vegetală (cînepă, sfoară de Manilla sau de sisal) sau din material plastic.

Cablurile din oțel se pot clasifica în baza mai multor criterii, ca de exemplu: forma, materialul sîrmelor, construcția lor, cablarea etc. În literatura de specialitate [28[sînt date clasificări ale cablurilor în funcție de construcția toronului, ca fiind elementul de bază în alcătuirea cablurilor.

Clasificarea cablurilor după modul de construcție este redată în schema din figura 5, *a*.

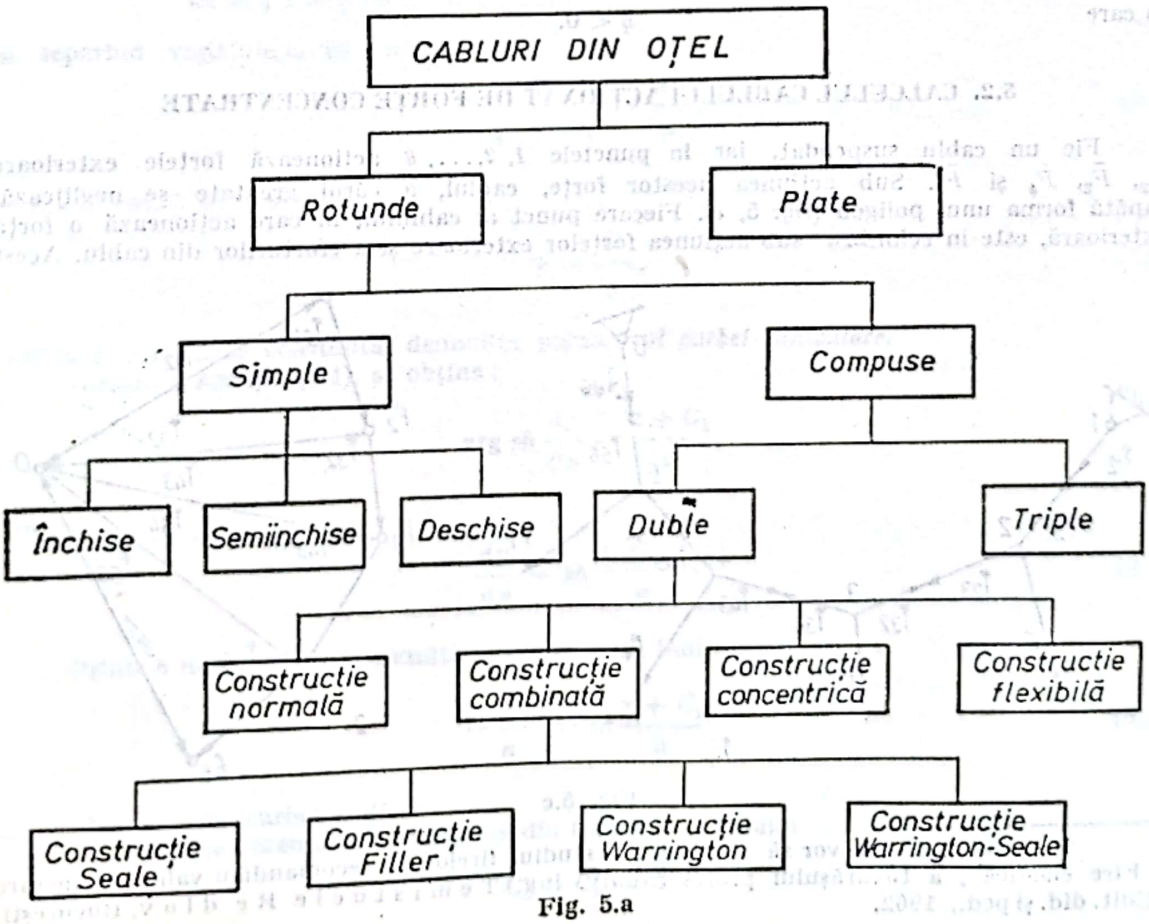


Fig. 5.a

Operaţia de înfăşurare a toroanelor în cablu în jurul unei inimi se numeşte cablare. La cablurile compuse se pot utiliza toroane, al căror sens de înfăşurare nu coincide cu sensul cablării. Acest mod de înfăşurare a toroanelor în cabluri se numeşte cablare în cruce. Cablurile la care înfăşurarea toroanelor şi a cablului are acelaşi sens se numesc cabluri cu cablare paralelă. În prezent se fabrică cabluri cu înfăşurare paralelă din sîrme preformate (tr — lay). Operaţia de preformare constă în trecerea prealabilă a sîrmelor printr-un dispozitiv pentru a se da sîrmelor forma pe care o iau în procesul de înfăşurare.

În mecanica tehnică, cablurile sînt încadrate în clasa corpurilor denumite *fire*. Prin *fir* înţelegîndu-se un corp solid perfect flexibil şi perfect torsionabil, care are două din dimensiuni mici comparativ cu cea de a treia, astfel încît cele două dimensiuni foarte mici ale firului sînt practic neglijabile. *) Spre deosebire de bare, firele opun o rezistenţă foarte mică la deformaţiile prin încovoiere sau răsucire. Rezultă, deci că, din punct de vedere geometric, un fir poate lua forma unei curbe arbitrară, plană sau strîmbă. De asemenea, se consideră că firul este lipsit de grosime, adică se admite că acesta poate fi asimilat cu o linie materială deformabilă.

Fig. 5.b

Considerînd firul perfect flexibil şi perfect torsionabil, rezultă că acesta nu poate opune nici un fel de rezistenţă la solicitările de încovoiere, răsucire şi compresiune, singurul efort pe care-l poate prelua fiind cel de întindere (tracţiune). Cu scopul de a simplifica studiul firelor, acestea mai sînt considerate inextensibile, cu alte cuvinte, lungimea unui fir rămîne constantă în timpul deformaţiei sub acţiunea forţelor active.

Pe baza proprietăţilor firelor menţionate mai sus, se poate considera că un fir este constituit dintr-o infinitate de bare elementare, perfect rigide, avînd o singură dimensiune şi fiind articulate între ele cap la cap (fig. 5, *b*). De remarcat faptul că, o mare parte din problemele staticii şi rezistenţei mecanice a firelor elastice cu săgeţi mici conduc la ecuaţii de gradul al treilea de forma :

$$z^3 + pz^2 + q = 0, \tag{5.1}$$

în care

$$q < 0.$$

5.2. CALCULUL CABLULUI ACŢIONAT DE FORŢE CONCENTRATE

Fie un cablu suspendat, iar în punctele *1, 2, ..., 6* acţionează forţele exterioare $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ şi $\bar{F}_5$. Sub acţiunea acestor forţe, cablul, a cărui greutate se neglijează, capătă forma unui poligon (fig. 5, *c*). Fiecare punct al cablului, în care acţionează o forţă exterioară, este în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare şi a eforturilor din cablu. Acest

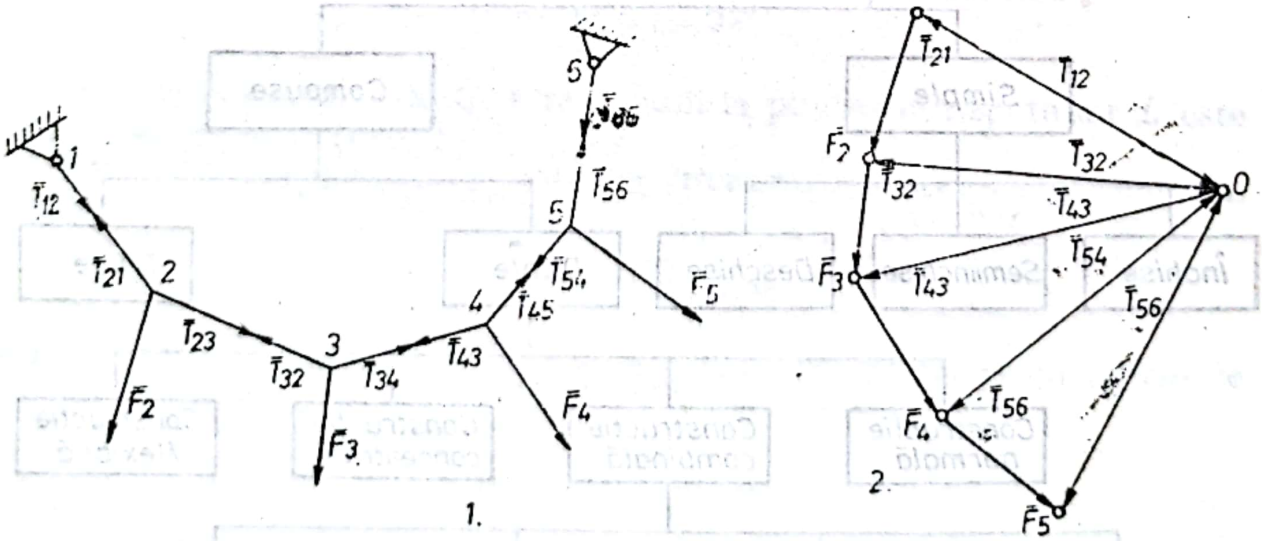


Fig. 5.c

*) Pentru cei care vor să aprofundeze studiul firelor, le recomandăm valoroasa lucrare „Fire elastice", a tovarăşului profesor univ. ing. Temistocle Redlov, Bucureşti, Edit. did. şi ped., 1962.

echilibru se exprimă grafic printr-un poligon de forțe închise pentru fiecare punct. Suprapunînd aceste poligoane de-a lungul laturilor lor comune, se obține însuși poligonul forțelor exterioare ale cărui raze polare reprezintă eforturile pe diferite porțiuni ale cablului. Se observă, de asemenea, că forma pe care o capătă cablul sub acțiunea forțelor concentrate, corespunde chiar cu poligonul funicular, construit prin punctul *1* și corespunzător poligonului forțelor exterioare $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ și $\bar{F}_5$, cu polul în O, a cărui lungime este egală cu lungimea cablului.

5.3. ECUAȚIA CURBEI FUNICULARE

Lănțișorul. Sub acțiunea greutății proprii de intensitate q, un cablu întins și suspendat între două reazeme la forma unui arc de catenoidă (lănțișor) (fig. 5, *d*). Considerînd un element de arc ds, se poate scrie relația :

$$q\,dx = p\,ds.$$

Ecuația diferențială a curbei funiculare va fi, în acest caz :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H} \cdot \frac{ds}{dx}. \qquad (5.2)$$

în care p este mărimea sarcinii ce revine unității de lungime de cablu, iar H — componenta orizontală a tensiunii din cablu.

Ecuația (5.2) se mai scrie :

$$dy' = \frac{p}{H}\,ds. \qquad (5.3)$$

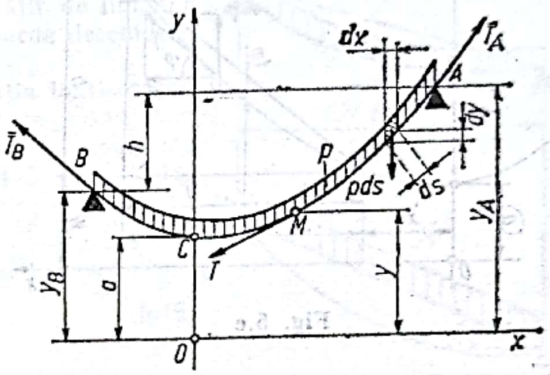


Fig. 5.d

Ținînd seama că :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

și separînd variabilele, se obține :

$$\frac{dy'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = \frac{dx}{a}, \qquad (5.4)$$

unde s-a notat prin a raportul

$$a = \frac{H}{p}, \qquad (5.5)$$

care este o lungime constantă, denumită *parametrul curbei funiculare.*

Integrînd ecuația (5.4), se obține :

$$\operatorname{arg\,sh}\frac{dy}{dx} = \frac{x + C_1}{a},$$

sau

$$\frac{dy}{dx} = sh\,\frac{x + C_1}{a}. \qquad (5.6)$$

Printr-o nouă integrare, rezultă ecuația curbei funiculare :

$$\frac{y + C_2}{a} = ch\,\frac{x + C_1}{a} \qquad (5.7)$$

A rezultat ecuația curbei *lănțișor.*

În condițiile sistemului de referință din figura 5, *c*, rezultă

$$C_1 = C_2 = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît ecuația lănțișorului se reduce la forma :

$$y = a\,ch\frac{x}{a}, \tag{5.8}$$

sau la forma :

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{5.9}$$

Proprietățile geometrice și mecanice ale lănțișorului. În multe probleme legate de echilibrul cablurilor, intervin frecvent unele proprietăți geometrice și mecanice ale lănțișorului, dintre care le prezentăm, în cele ce urmează, pe cele mai importante.

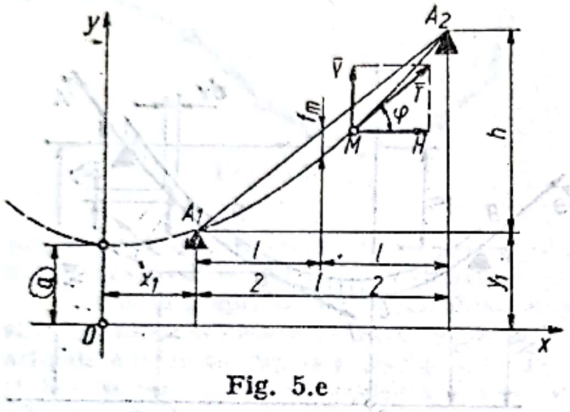


Fig. 5.e

Se observă, astfel, că substituind pe x cu $-x$, ecuația (5.8) nu se modifică ; rezultă, deci, că linia de echilibru a firului este simetrică în raport cu axa Oy. De asemenea, dacă se înlocuiește a și x respectiv prin ka și kx, y devine de k ori mai mare, ceea ce înseamnă că toate lănțișoarele sînt curbe geometric-asemenea între ele ; se poate conchide, deci, că nu există, de fapt, decît un singur lănțișor, susceptibil de reprezentare la diferite scări.

Săgeata f_m a curbei lănțișor la mijlocul deschiderii (fig. 5, *e*) se poate exprima prin relația

$$f_m = y_1 + \frac{h}{2} - y_m,$$

în care y_m este ordonata lănțișorului la mijlocul deschiderii, unde

$$x_m = x_1 + \frac{l}{2}.$$

Ținînd seama că ordonatele y_1 și y_m au expresiile :

$$y_1 = a\,ch\frac{x_1}{a}; \qquad y_m = a\,ch\frac{2x_1 + l}{2a},$$

rezultă

$$f_m = \frac{h}{2} + a\left(ch\frac{y_1}{a} - ch\frac{2x_1 + l}{2a}\right)$$

și încă

$$f_m = \frac{h}{2} - 2a\,sh\frac{4x_1 + l}{4a}\,sh\frac{l}{4a}. \tag{5.10}$$

Coeficienții unghiulari ai tangentelor la curbă în punctele de suspensie au valorile :

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = sh\frac{x_1}{a} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = sh\frac{x^2}{a}, \tag{5.11}$$

iar raza de curbură a curbei funiculare,

$$\rho = \frac{ds}{d} = \frac{a}{\cos^2\alpha}. \tag{5.12}$$

Componenta orizontală a tensiunii într-un punct oarecare M al cablului este :

$$H = p \cdot a = \text{constant}, \tag{5.13}$$

iar componenta verticală,

$$V = H \cdot \operatorname{tg} \alpha = H \cdot y' = H \operatorname{sh} \frac{x}{a} = p \cdot a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Tensiunea totală va fi, deci :

$$T = \sqrt{V^2 + H^2} = H \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = p \cdot a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} = p \cdot y. \qquad (5.14)$$

Prin urmare tensiunea într-o secțiune oarecare a cablului este proporțională cu ordonata secțiunii, factorul de proporționalitate fiind greutatea unității de lungime de cablu, p.

Parabola funiculară. În practica inginerească, curba funiculară a unui cablu întins și suspendat între două reazeme este considerată ca fiind un arc de parabolă. Sensul fizic al acestei aproximări constă în aceea că, greutatea q a unității de lungime de cablu, se consideră uniform distribuită pe coarda deschiderii (fig. 5, *f*).

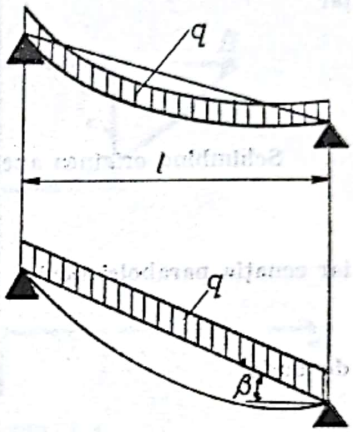


Fig. 5.f

Dezvoltînd în serie M a c L a u r i n ecuația lănțișorului, se obține :

$$y = \frac{a}{2}\left(2 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{12\,a^4} + \ldots\right); \qquad (5.15)$$

limitînd seria la primii doi termeni, rezultă

$$y = \frac{a}{2}\left(2 + \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{x^2}{2a} + a \qquad (5.16)$$

Alegînd sistemul de referință astfel încît

$$y_1 = y - a \quad \text{și} \quad x = x_1,$$

se obține ecuația parabolei :

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2a} \qquad (5.17)$$

Aceasta, însă, corespunde cu distribuirea uniformă a greutății cablului pe proiecția orizontală a deschiderii, și nu pe coardă. Considerînd greutatea cablului uniform distribuită pe coardă, parametrul a se va calcula cu relația :

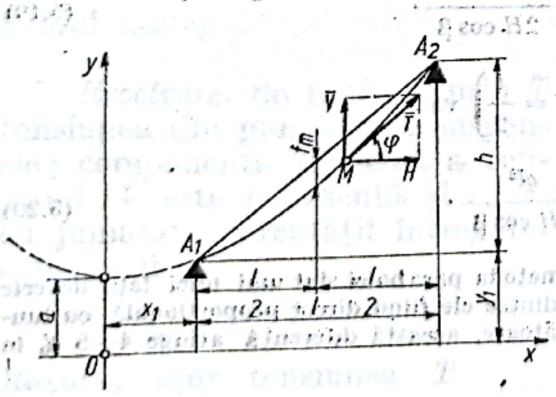


Fig. 5.g

$$a = \frac{H}{q} \cos \beta, \qquad (5.18)$$

β fiind unghiul coardei.

În cazul în care se cunosc coordonatele punctelor de reazem $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$ prin care trece o parabolă de parametru a (fig. 5, *g*) ecuația parabolei se deduce din condiția ca parabola să treacă prin cele două puncte de suspensie, rezultă :

$$x_1^2 = 2ay_1 ; \qquad x_2^2 = 2ay_2 ;$$

scăzînd cele două relații, se obține :

$$x_2^2 - x_1^2 = 2a\,(y_2 - y_1),$$

sau

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 2a\,(y_2 - y_1),$$

în care:

$$x_2 - x_1 = l \quad \text{și} \quad y_2 - y_1 = h.$$

Prin înlocuire se obține:

$$x_1 + x_2 = 2a\frac{h}{l},$$

de unde:

$$x_1 = a\frac{h}{l} - \frac{l}{2},$$

iar

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2a} = \frac{ah^2}{2l^2} + \frac{l^2}{8a} + \frac{h}{2}$$

Schimbînd originea axelor de coordonate din punctul O și A_1, se obține:

$$y' = y - y_1; \quad x' = x - x_1,$$

iar ecuația parabolei devine:

$$(x' - x_1)^2 = 2a(y' - y),$$

de unde

$$y = \frac{x'}{2a}(x' - l) + \frac{h}{l}x'.$$

Săgeata f într-un punct oarecare la distanța x este:

$$f_x = \frac{h}{l}x' - y'$$

sau:

$$f_x = \frac{x'(l - x)}{2a} = \frac{qx'(l - x')}{2H\cos\beta}. \tag{5.19}$$

Săgeata parabolei la mijlocul deschiderii $\left(x' = \frac{l}{2}\right)$ va fi:

$$f_m = \frac{l^2}{8a} = \frac{ql^2}{8H\cos\beta}. \tag{5.20}$$

Săgeţile curbei funiculare determinate după metoda parabolei sînt mai mici faţă de cele determinate după metoda lănţişorului, diferenţa dintre ele fiind direct proporţională cu lungimea şi panta deschiderii. Pentru cablurile purtătoare, această diferenţă atinge 4—5 % în condiţiile cele mai nefavorabile.

II. APLICAȚII

5.1. Cablul omogen al unui funicular, de lungime $2s$ și greutate Q este suspendat în două puncte situate pe aceeași orizontală. Cunoscînd săgeata cablului f, să se determine tensiunea la extremitățile cablului (fig. 5.1).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Determinăm parametrul lănţişorului cu relaţia :

$$a = \frac{s^2 - f^2}{2f}.$$

Greutatea unităţii de lungime de lanţ fiind

$$p = \frac{Q}{2s},$$

se poate determina componenta orizontală a tensiunii :

$$H = p \cdot a = \frac{Q}{4sf}(s^2 - f^2).$$

Componenta verticală în punctul de suspensie este $V = Q/2$ iar tensiunile la extremităţile cablului vor fi

$$T = \sqrt{H^2 + V^2}$$

$$= \sqrt{\frac{Q}{4sf}(s^2 - f^2)^2 + \frac{Q^2}{4}} = \frac{Q}{4sf}(s^2 + f^2).$$

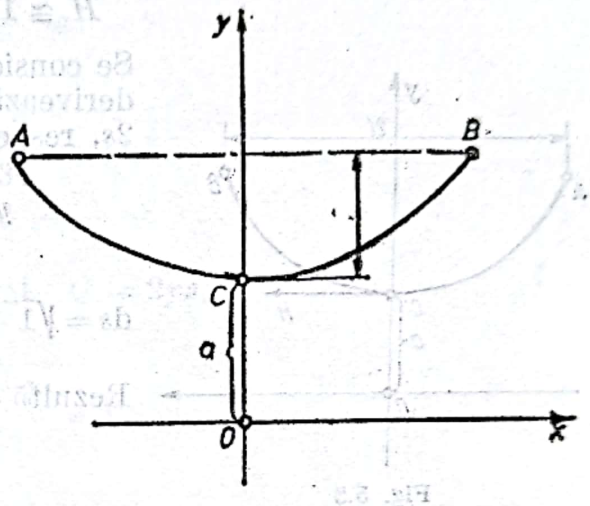


Fig. 5.1

5.2. Cablul omogen al unui funicular, avînd greutatea Q, este suspendat în două puncte A şi B, aşezate pe aceeaşi orizontală (fig. 5.2) Cunoscînd unghiul α, format de tangenta la cablu în punctul B cu orizontala, să se determine tensiunile din cablu în punctele de suspensie. Se va considera cablul lănţişor.

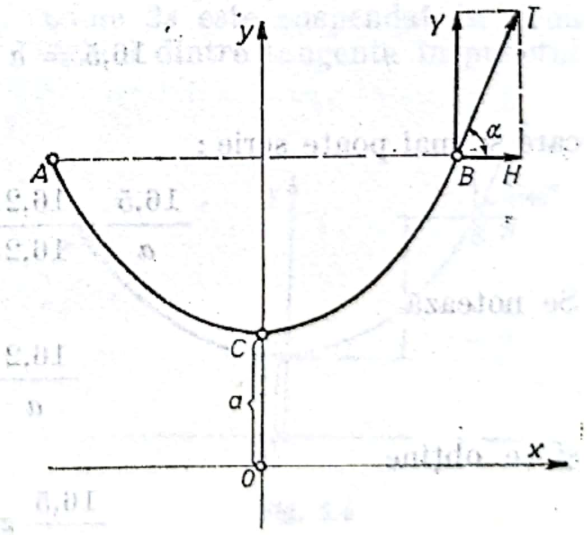


Fig. 5.2

Rezolvare. Se notează prin T tensiunea din punctele de suspensie ; componenta verticală a tensiunii V este cunoscută şi egală cu jumătatea greutăţii întregului cablu, adică

$$V = Q/2.$$

Rezultă uşor tensiunea T

$$T = \frac{V}{\sin \alpha} = \frac{Q}{2 \sin \alpha} = \frac{Q}{2} \operatorname{cosec} \alpha.$$

Se obţine, de asemenea, componenta orizontală a tensiunii H :

$$H = T \cos \alpha = \frac{Q}{2} \operatorname{ctg} \alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

5.3. Un cablu de funicular, avînd lungimea $2s = 33$ m este suspendat în două puncte situate pe aceeași orizontală (fig. 5.3).

Distanța între aceste puncte este $2l = 32{,}4$ m. Să se arate că tensiunea în punctul cel mai de jos al cablului este aproximativ de 1,5 ori mai mare decît greutatea întregului cablu.

Rezolvare. Tensiunea în punctul cel mai de jos al cablului este egală cu H. Va trebui să arătăm că:

$$H \cong 1{,}5\,Q.$$

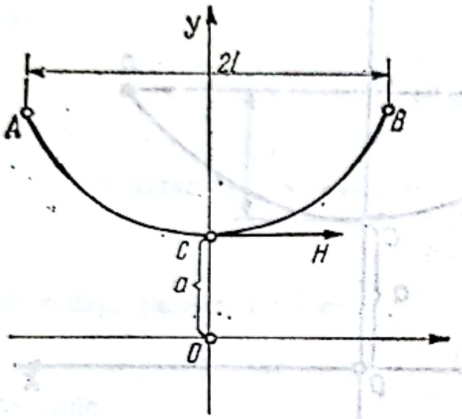


Fig. 5.3

Se consideră curba cablului lănțișor, care se derivează în scopul determinării lungimii sale $2s$, respectiv

$$y = a\,ch\,\frac{x}{a}; \qquad y' = sh\,\frac{x}{a};$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+sh^2\frac{x}{a}}\,dx = ch\,\frac{x}{a}\cdot dx.$$

Rezultă

$$s = \int_0^l ch\,\frac{x}{a}\,dx = a\,sh\,\frac{l}{a}.$$

Înlocuind valorile lui s și l, se obține relația

$$16{,}5 = a\,sh\,\frac{16{,}2}{a},$$

care se mai poate scrie:

$$\frac{16{,}5}{a}\cdot\frac{16{,}2}{16{,}2} = sh\,\frac{16{,}2}{a}.$$

Se notează

$$\frac{16{,}2}{a} = z$$

și se obține

$$\frac{16{,}5}{16{,}2}\,z = sh\,z$$

Dezvoltînd în serie $sh\,z$, se obține

$$sh\,z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

Considerînd numai primii doi termeni, rezultă ecuația:

$$1{,}019\,z = z + \frac{z^3}{6},$$

respectiv

$$z^3 - 0{,}114\ z = 0,$$

a cărei soluție, care ne interesează, este

$$z = 0{,}334.$$

Cunoscînd că:

$$z = \frac{16{,}2}{a}$$

se deduce

$$a = \frac{16{,}2}{0{,}334} = 48{,}5.$$

Ținînd seama că

$$H = pa \quad \text{și} \quad Q = 2ps,$$

se obține

$$\frac{H}{Q} = \frac{48{,}5}{33} \cong 1{,}5$$

și deci

$$H \cong 1{,}5\ Q.$$

5.4. Cablul unui funicular, de lungime $2s$ este suspendat în două puncte situate pe aceeași orizontală. Unghiul dintre tangenta în punctul de suspensie și orizontală este de 45° (fig. 5.4). Să se determine săgeata cablului.

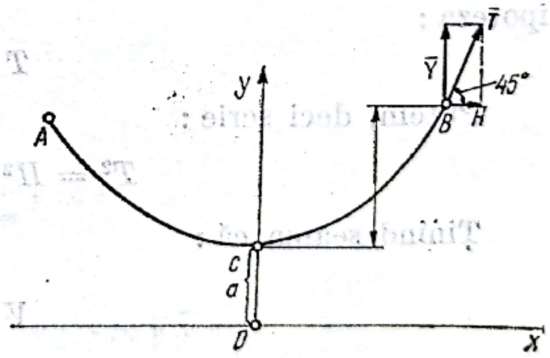


Fig. 5.4

Rezolvare. Unghiul dintre tangentă și orizontală fiind de 45°, rezultă că cele două componente ale tensiunii sînt egale, adică

$$H = V.$$

Însă,

$$V = \frac{Q}{2} = \frac{2ps}{2} = ps,$$

și

$$H = pa.$$

Egalînd V cu H, se obține:

$$ps = pa,$$

de unde

$$a = s.$$

Rezultă că, în acest caz, ordonata la origine a lănțișorului este egală cu jumătate din lungimea cablului.

Scanned with OKEN Scanner

Exprimînd pe a în funcţie de s şi f, se obţine :

$$a = \frac{s^2 - f^2}{sf} = s,$$

sau

$$s^2 - f^2 = 2fs.$$

Rezolvînd ecuaţia de gradul doi

$$f^2 + 2fs - s^2 = 0,$$

se obţine valoarea săgeţii cablului :

$$f = s(\sqrt{2} - 1).$$

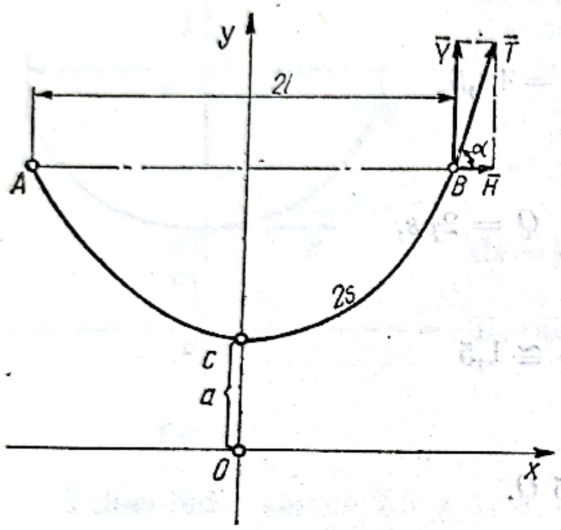


Fig. 5.5

5.5. La ce distanţă trebuie alese punctele de suspensie ale cablului unui funicular, de lungime $2s$, situate pe aceeaşi orizontală, pentru ca tensiunea cablului, în fiecare din aceste puncte să fie egală cu greutatea întregului cablu. Să se afle, de asemenea, unghiul dintre tangenta la cablu şi orizontală, în punctele de suspensie (fig. 5.5).

Rezolvare. Trebuie determinată distanţa dintre punctele A şi B în ipoteza :

$$T = Q.$$

Putem, deci scrie :

$$T^2 = H^2 + V^2 = Q^2.$$

Ţinînd seama că :

$$V = \frac{Q}{2}$$

şi

$$H = pa = \frac{Qa}{2s},$$

rezultă :

$$\frac{Q^2a^2}{ab^2} + \frac{Q^2}{4} = Q^2,$$

de unde :

$$a = s\sqrt{3}.$$

Lungimea jumătății de cablu fiind :

$$s = a\,sh\,\frac{l}{a},$$

se poate scrie că

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}\right);$$

sau

$$s = \frac{s\sqrt{3}}{2}\left(e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}\right).$$

Notînd

$$\frac{l}{a} = z,$$

se obține :

$$2 = \sqrt{3}\,e^{z} - \sqrt{3}\,e^{-z},$$

și respectiv

$$e^{2z} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,e^{z} - 1 = 0.$$

Rezolvînd această ecuație de gradul doi, se obține :

$$e^{z} = \sqrt{3},$$

sau

$$z = ln\sqrt{3}.$$

Revenind la substituția

$$z = \frac{l}{a},$$

deducem :

$$l = az = aln\sqrt{3} = s\sqrt{3}\,ln\sqrt{3}.$$

Prin urmare

$$2l = 2s\sqrt{3}\,ln\sqrt{3}.$$

Rezultă unghiul tangentei la cablu în punctul de suspensie cu orizontala

$$tg\alpha = \frac{V}{H} = \frac{ps}{pa} = \frac{s}{s\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

și deci

$$\alpha = \frac{\pi}{6}.$$

5.6. Cablul unui funicular, omogen şi de lungime $2s$ este suspendat în două puncte A şi B, care nu se află pe aceeaşi orizontală. Unghiurile dintre tangentele la fir, duse în aceste puncte şi verticală sînt egale cu α şi β. Să se afle diferenţa de înălţime a punctelor A şi B (fig. 5.6).

Rezolvare. Tensiunile din cablu în punctele de suspensie A şi B se pot exprima în funcţie de ordonatele punctelor:

$$T_A = py_A; \qquad T_B = py_B.$$

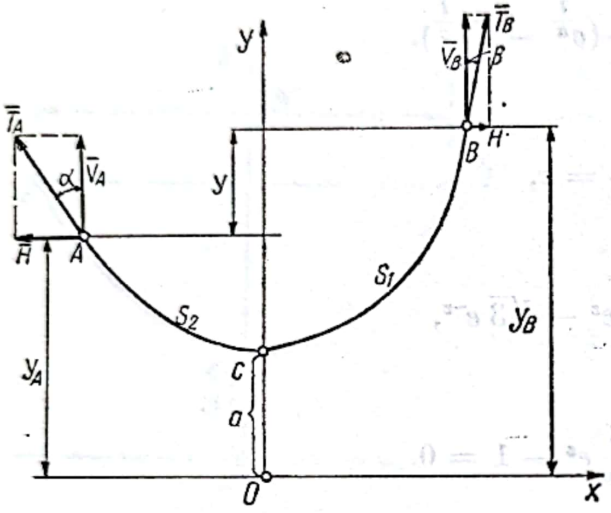


Fig. 5,6

Prin scădere se obţine:

$$T_B - T_A = p(y_B - y_A) = py.$$

Notînd cu s_1 şi s_2 lungimile cablului de la C la B, respectiv de la C la A, se pot scrie relaţiile:

$$V_A = ps_2; \qquad V_B = p \cdot s_1.$$

Însumînd cele două componente verticale, rezultă:

$$V_A + V_B = p(s_1 + s_2) = pS \qquad (a)$$

Se observă, însă, că:

$$V_A = H \operatorname{ctg} \alpha; \qquad V_B = H \operatorname{ctg} \beta.$$

Înlocuind în relaţia (a), rezultă:

$$H(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = ps \text{ sau } H \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = ps. \qquad (b)$$

Dacă în relaţia

$$T_B - T_A = py$$

se înlocuiesc tensiunile în funcţie de H, şi se obţine:

$$\frac{H}{\sin\beta} - \frac{H}{\sin\alpha} = py \text{ sau } H \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = py$$

şi încă

$$\frac{2H \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha \sin\beta} = py. \qquad (c)$$

Din relaţia (b), se deduce

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{H \sin(\alpha+\beta)}{2ps};$$

înlocuind în (c), se deduce :

$$\frac{2H \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{H \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ps}} = py.$$

Ținînd seama că

$$\sin(\alpha+\beta) = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2},$$

în urma simplificării rezultă

$$y = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} s.$$

5.7. Să se stabilească lungimea curbei cablului purtător, al unui funicular.

Rezolvare. Curba funiculară a unui cablu purtător suspendat în două puncte de reazem este un lănțișor cu parametrul $a = H/q$, care în aplicațiile practice se înlocuiesc cu o parabolă.

Lungimea arcului de lănțișor măsurat de la vîrf pînă la un punct oarecare se determină cu ajutorul integralei :

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^x ch \frac{x}{a}\, dx = a\, sh \frac{x}{a}. \qquad (a)$$

Notînd cu l lungimea deschiderii și cu h diferența de nivel între punctele de reazem, se obține lungimea cablului purtător suspendat între punctele $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$:

$$s = s_2 - s_1 = a\left(sh \frac{x_1 + l}{a} - sh \frac{x_1}{2}\right),$$

sau

$$\frac{s}{a} = 2\, ch \frac{2x_1 + l}{2a} sh \frac{l}{a}. \qquad (b)$$

Ordonatele punctelor de reazem se determină din ecuația lănțișorului :

$$y_1 = a\, ch \frac{x_1}{a};$$

$$y_1 + h = a\, ch \frac{x_1 + l}{a},$$

de unde rezultă

$$x = a\left(ch\frac{x+l}{a}\,ch\frac{x_1}{a}\right),$$

sau

$$\frac{h}{a} = 2\,sh\frac{2x_1+l}{2a}\,sh\frac{l}{2a}. \tag{c}$$

Abscisa x_1 poate fi eliminată din relaţiile (b) şi (c) făcînd diferenţa pătratelor lor, astfel că lungimea curbei lănţişor devine :

$$s = \sqrt{h^2 + 4a^2\,sh^2\frac{l}{2a}}. \tag{d}$$

Dezvoltînd în serie Taylor funcţia sinus hiperbolic :

$$4a^2\,sh^2\frac{l}{2a} = l^2 + \frac{2l^4}{4!\,a^4} + \frac{2l^6}{6!\,a^4} + \dots$$

ţinînd seama că

$$l^2 + h^2 = l^2/\cos^2\beta,$$

se obţine :

$$s = \frac{l}{\cos\beta}\left[1 + \left(\frac{2l^2}{4!\,a^2}\cos^2\beta + \frac{2l^4}{6!\,a^4}\cos^2\beta + \dots\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dezvoltînd din nou, după binomul lui Newton expresia din paranteza dreptunghiulară, se obţine :

$$s = \frac{1}{\cos}\int_0^l \left\{1 + \left[\frac{l-2x}{a}\sin\beta + \frac{(l-2x)^2}{4a^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} dx,$$

unde s-a notat prin β, $a = H/q$.

Dezvoltînd expresia obţinută după binomul lui Newton şi limitînd seria la trei termeni, rezultă :

$$s = \frac{l}{\cos\beta}\int_0^l \left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{l-2x}{a}\sin\beta + \frac{(l-2x)^2}{4a^2}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\left[\frac{l-2x}{a}\sin\beta + \frac{(l-2x)^2}{4a^2}\right]\right\} dx = \frac{1}{\cos\beta}\int_0^l \left[1 + \frac{(l+2x)}{2a}\sin\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{(l-2x)^2}{8a^2}\cos^2\beta - \frac{(l-2x)^3}{16a^2}\sin^2\beta - \frac{(l-2x)^4}{128\,a^4}\right] \cdot dx,$$

de unde se obţine lungimea arcului parabolei

$$s = \frac{l}{\cos\beta} + \frac{l^3}{24\,a^2}\cdot\left(1 - \frac{l^2}{27\,a^2\cos^2\beta}\right)\cos\beta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $l = 1000$ m, $a = 3000$ m și unghiul $\beta = 45°$, considerate condiții limită la instalarea funicularelor pasagere, expresia din paranteză are valoarea 0,983.

Neglijînd termenul al doilea din paranteză, rezultă că pentru determinarea lungimii cablului purtător într-o deschidere se poate folosi relația:

$$s = \frac{l}{\cos\beta} + \frac{l^3 \cos\beta}{24\,a^2}$$

sau luînd

$$a = H/q,$$

se obține

$$s = \frac{l}{\cos\beta} + \frac{q^2 l^3 \cos\beta}{24\,H^2}.$$

5.8. Cablul omogen al unui funicular AC de lungime l și greutate p[kN/m] este suspendat în A și rezemat pe un plan înclinat (fig. 5.8). Cunoscînd unghiurile α și β dintre tensiunea în A și planul orizontal și dintre planul înclinat și planul orizontal, să se determine lungimea l_1 a cablului rezemat de plan.

Rezolvare. Se consideră cablul format din două porțiuni distincte: porțiunea BC rezemată pe planul înclinat și porțiunea AB care atîrnă din punctul A pînă pe planul înclinat.

Ecuația de echilibru a porțiunii CB este:

$$T_B - pl_1 \sin\beta = 0,$$

iar ecuațiile de echilibru ale porțiunii BA sînt:

$$\left.\begin{aligned} -T_B\cos\beta + T_A\cos\alpha &= 0;\\ -T_B\sin\beta - p(l-l_1) + &\\ + T_A\sin\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

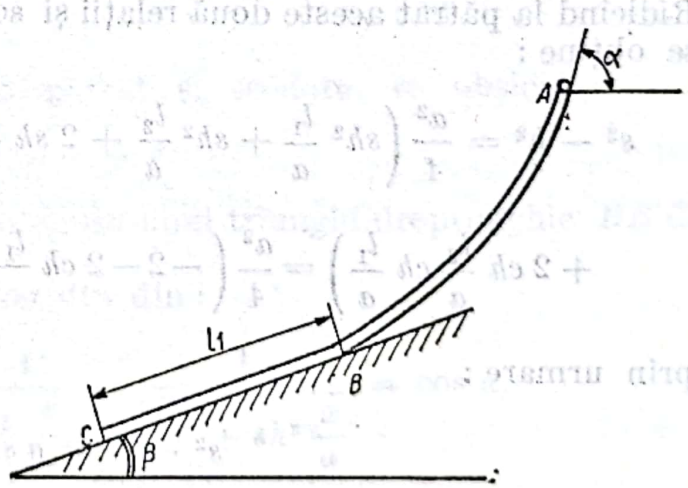


Fig. 5.8

Din prima ecuație se obține:

$$T_B = pl_1 \cdot \sin\beta,$$

iar din ecuația doua

$$T_A = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,T_B = pl_1 \cdot \frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Înlocuind valorile lui T_A și T_B în cea de a treia ecuație, se obține:

$$-p \cdot l_1 \sin^2\beta - p \cdot (l - l_1) + pl_1 \cdot \sin\beta\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se deduce lungimea l_1 :

$$l_1 = \frac{l\cos\alpha}{\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)} = \frac{l\cos\alpha}{\cos\beta\cos(\alpha-\beta)}.$$

5.9. Cablul unui funicular, considerat fir greu omogen este suspendat în două puncte A și B având o diferență de nivel h. Lungimea $2s$ a cablului, precum și distanța pe orizontală între punctele A și B fiind cunoscute, să se determine parametrul a.

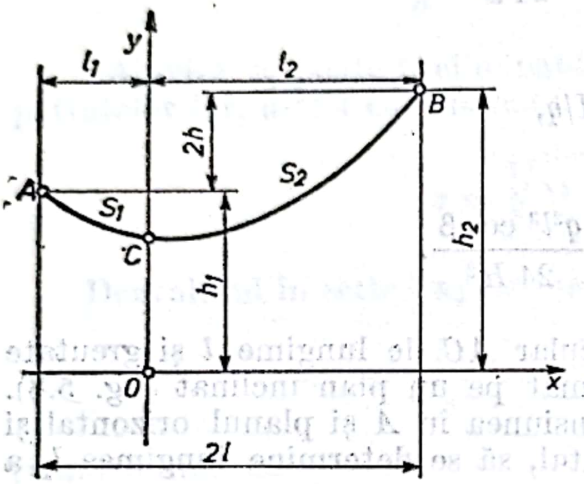


Fig. 5.9

Rezolvare. Din figura 5.9 se vede că :

$$2l = l_1 + l_2;$$

$$2h = h_2 - h_1.$$

Lungimea totală a lănțișorului este :

$$2s = s_1 + s_2 = a\left(sh\frac{l_1}{a} + sh\frac{l_2}{a}\right).$$

Avem, de asemenea :

$$2h = h_2 - h_1 = a\left(ch\frac{l_2}{a} - ch\frac{l_1}{a}\right).$$

Ridicînd la pătrat aceste două relații și scăzînd relația a doua din prima se obține :

$$s^2 - h^2 = \frac{a^2}{4}\left(sh^2\frac{l_1}{a} + sh^2\frac{l_2}{a} + 2\,sh\frac{l_1}{a}\,sh\frac{l_2}{a} - ch^2\frac{l_2}{a} - ch^2\frac{l_1}{a} + \right.$$

$$\left. + 2\,ch\frac{l_2}{a}\,ch\frac{l_1}{a}\right) = \frac{a^2}{4}\left(-2 - 2\,ch\frac{l_1+l_2}{a}\right) = a^2\,sh^2\frac{l}{a}.$$

prin urmare :

$$s^2 - h^2 = a\,sh\frac{l}{a}$$

Dezvoltînd în serie $sh\dfrac{l}{a}$ și considerînd numai primii doi termeni ai dezvoltării, avem :

$$sh\frac{l}{a} = \frac{l}{a} + \frac{l^3}{6a^3},$$

Rezultă

$$\sqrt{s^2 - h^2} = l + \frac{l^3}{6a^2},$$

de unde se obține

$$a = \frac{l\sqrt{l}}{6(\sqrt{s^2 - h^2} - l)}.$$

5.10. Cunoscînd că în problemele legate de echilibrul firelor intervin în mod frecvent unele proprietăți geometrice ale lănțișorului, să se determine lungimea arcului de lănțișor, $\overline{VB} = b$ (fig. 5.10), măsurat de la vîrf pînă într-un punct oarecare $B(x, y)$, lungimea arcului de lănțișor cuprins între punctele de suspensie $A_1(x_1, xy_1)$ și $A_2\ (x_2, y_2)$, precum și coordonatele punctelor de suspensie (T. Redlov, „Fire elastice").

Rezolvare. Ținînd seama de ecuația lănțișorului

$$y = a\,ch\,\frac{x}{a}, \qquad \text{(a)}$$

lungimea arcului, $\overline{VB} - b$, măsurat de la vîrf pînă la un punct oarecare $B(x, y)$ are expresia:

$$b = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx =$$

$$= \int_0^x ch\,\frac{x}{a}\,dx = a\,sh\,\frac{x}{a}. \qquad \text{(b)}$$

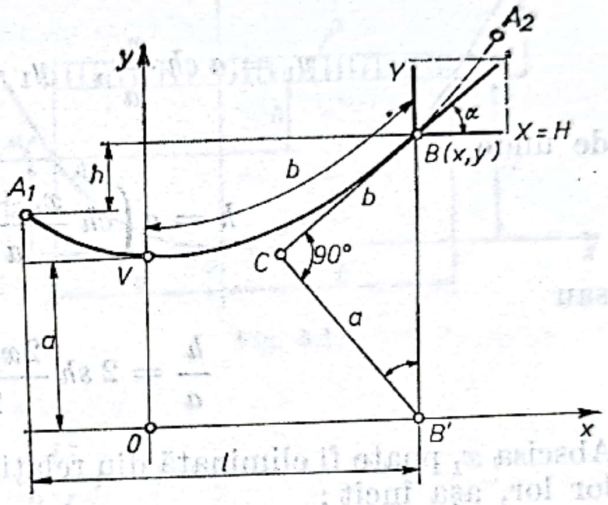


Fig. 5.10

Din (a) și (b) prin ridicare la pătrat și scădere, se obține:

$$y^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(c)}$$

Relația (c) ne arată că y este ipotenuza unui triunghi dreptunghic $BB'C$, avînd catetele egale cu a și b.

Mărimea unghiului $BB'C$ rezultă din:

$$\cos \widehat{BB'C} = \frac{a}{y} = \frac{1}{ch\,\frac{x}{a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2\,\frac{x}{a}}} = \cos\alpha,$$

deoarece

$$y' = sh\,\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\alpha,$$

α fiind înclinarea tangentei în B la curbă față de Ox; prin urmare

$$\widehat{BB'C} = \alpha \qquad \text{(d)}$$

Proprietățile exprimate de relațiile (c) și (d) servesc la construcția tangentei și normalei în B, precum și la rectificarea arcului VB, dacă se cunoaște parametrul lănțișorului.

Pentru determinarea lungimii arcului de lănțișor cuprins între punctele de suspensie $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$, vom utiliza relația (b). Notînd cu l deschiderea și cu h denivelarea firului, se obține :

$$s = b_2 - b_1 = a\left(sh\,\frac{x_1 + l}{a} - sh\,\frac{x_1}{a}\right),$$

sau

$$\frac{s}{a} = 2\,ch\,\frac{2x_1 + l}{2a}\,sh\,\frac{l}{2a}.$$

Coordonatele punctelor de suspensie verifică ecuația lănțișorului :

$$y_1 = a\,ch\,\frac{x_1}{a}, \quad y_1 + h = a\,ch\,\frac{x_1 + l}{a},$$

de unde

$$h = a\left(ch\,\frac{x_1 + l}{a} - ch\,\frac{x_1}{a}\right).$$

sau

$$\frac{h}{a} = 2\,sh\,\frac{2x_1 + l}{2a}\,sh\,\frac{l}{2a}. \qquad (f)$$

Abscisa x_1 poate fi eliminată din relațiile (e) și (f) făcînd diferența pătratelor lor, așa încît :

$$s = \sqrt{h^2 + 4a^2\,sh^2\,\frac{l}{2a}}. \qquad (g)$$

Determinăm coordonatele punctelor de suspensie. Abscisa punctului inferior de suspensie rezultă din relația (f) :

$$sh\,\frac{2x_1 + l}{2a} = \frac{h}{2a\,sh\,\frac{l}{2a}},$$

sau ținînd seama de (g)

$$sh\,\frac{2x_1 + l}{2a} = \frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}},$$

de unde

$$\frac{2x_1 + l}{2a} = \arg sh\,\frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}} = \frac{l}{2} \cdot ln\,\frac{s + h}{s - h};$$

deci :

$$x_1 = \frac{l}{2}\left(a \ln \frac{s + h}{s - h} - l\right). \qquad (h)$$

În baza relației (g), rezultă că x_1 este funcție de a, l și h.

Scanned with OKEN Scanner

5.11. Cablul unui funicular este suspendat în două puncte A și B, la niveluri diferite (fig. 5.11). Se cunoaște distanța l pe orizontală dintre punctele de suspensie, diferența de cotă dintre aceste puncte h, greutatea unității de lungime a proiecției cablului pe orizontală p, și tensiunea H. Considerînd curba funiculară parabolă, să se determine ordonatele y_1 și y_2, tensiunile T_A și T_B în punctele de suspensie precum și abscisele a și b ale acestor puncte. Se cere, de asemenea, lungimea cablului.

Rezolvare. Se particularizează ecuația parabolei funiculare :

$$y = \frac{px^2}{2H}$$

pentru punctele A și B făcînd :

$$x = -a \quad \text{și} \quad y = y_1$$

se obține

$$y_1 = \frac{pa^2}{aH}$$

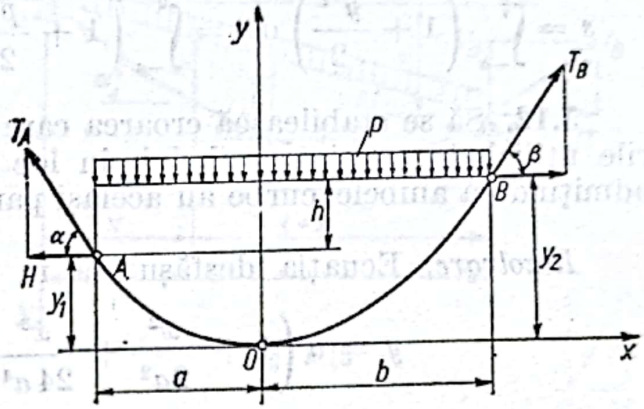


Fig. 5.11

Analog rezultă

$$y_2 = \frac{pb^2}{2H}.$$

Observînd că :

$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= h; \\ a + b &= l, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{2H}(b^2 - a^2) &= h; \\ a + b &= l \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

și încă

$$b - a = \frac{2Hh}{p}; \quad b + a = l, \qquad \text{(c)}$$

rezultă

$$a = \frac{l}{2} - \frac{hH}{pl}; \quad b = \frac{l}{2} + \frac{hH}{pl}$$

Se determină tensiunile în punctele de suspensie :

$$T_A = \frac{H}{\cos\alpha} = H\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha = (y')_{x=-a} = -\frac{pa}{H}.$$

Deci

$$T_a = H\sqrt{1+\frac{p^2a^2}{H^2}} = \sqrt{H^2+p^2a^2}.$$

Analog se obține:

$$T_b = \sqrt{H^2+p^2b^2}.$$

Lungimea cablului va fi:

$$s = \int_{-a}^{b}\left(1+\frac{y'^2}{2}\right)dx = \int_{-a}^{b}\left(1+\frac{p^2x^2}{2H^2}\right)dx = l+\frac{p^2}{6H^2}(a^3+b^3).$$

5.12. Să se stabilească eroarea care se face cînd se calculează cablurile utilizînd ecuația parabolei, în loc de a folosi ecuația lănțișorului, admițînd că ambele curbe au același parametru (fig. 5.12).

Rezolvare. Ecuația desfășurată în serie a lănțișorului este:

$$y = a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{24a^4}+\frac{x^6}{720a^6}+\ldots\right) \qquad (a)$$

iar ecuația parabolei

$$y^* = a+\frac{x^2}{2a}. \qquad (b)$$

Se observă că păstrînd numai primii doi termeni ai seriei (a), se obține ecuația (b) a parabolei.

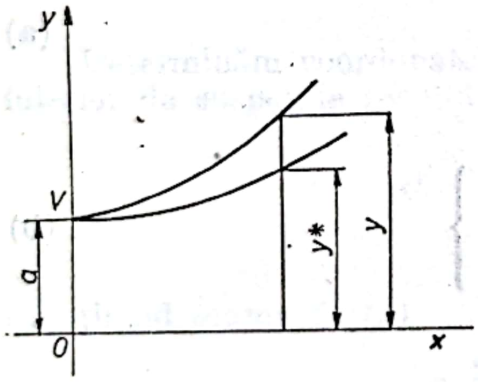


Fig. 5.12

Tabelul 5.12

$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{a}$	$\frac{y^*}{a}$	$\frac{y-y^*}{y}$ %
0,0	1,000 000	1,000 000	0,000
0,1	1,005 004	1,005 000	0,004
0,2	1,020 067	1,020 000	0,065
0,3	1,045 339	1,045 000	0,324
0,4	1,081 072	1,080 000	0,99
0,5	1,127 626	1,125 000	2,33
0,6	1,185 465	1,180 000	4,61
0,7	1,255 169	1,245 000	8,1
0,8	1,337 435	1,320 000	13,0
0,9	1,433 086	1,405 000	19,6
1,0	1,543 081	1,500 000	27,9

Eroarea relativă

$$\frac{y-y^*}{y} = \frac{\frac{x^4}{24a^3}+\frac{x^6}{720a^5}+\ldots}{a+\frac{x^2}{2a}+\frac{x^4}{24a^3}+\frac{x^6}{720a^5}+\ldots}, \qquad (c)$$

ce se comite asimilînd lănțișorul cu o parabolă, au valorile date în tabelul 5.12.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuirea lănțișorului cu o parabolă de același parametru este admisibilă numai dacă punctele de suspensie nu prezintă denivelări mari și dacă săgețile sînt mici în comparație cu deschiderea. Asimilarea lănțișorului cu o parabolă de același parametru are ca urmare o subevaluare a săgeților, erorile crescînd cu denivelarea, la o deschidere dată [57].

5.13. Să se determine săgeata maximă a unui cablu sub acțiunea greutății sale proprii.

Rezolvare. Se utilizează relația [57]:

$$f_x = \frac{M_x}{H}$$

pentru determinarea săgeții unui cablu sub acțiunea greutății sale proprii, considerată ca sarcină continuă cu intensitatea q, se obține (fig. 5.13)

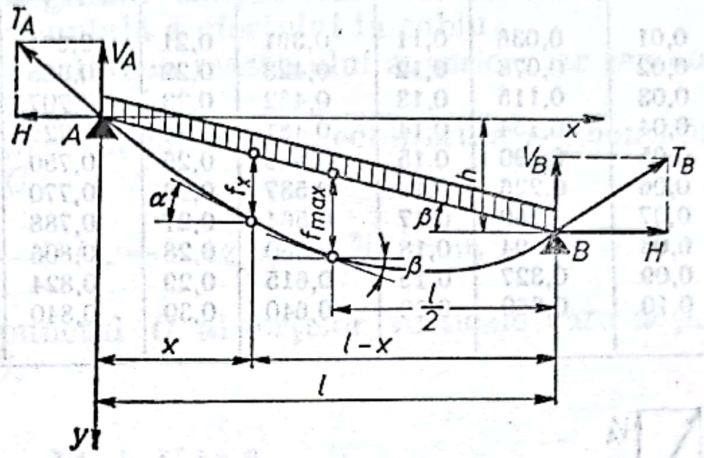


Fig. 5.13

$$f_x = \frac{M_x}{H} = \frac{qx(l-x)}{2H\cos\beta}. \qquad (a)$$

Abscisa x a punctului de pe curba funiculară în care săgeata are valoarea maximă se determină din condiția:

$$\frac{df_x}{dx} = \frac{q(l-2x)}{2H\cdot\cos\beta} = 0,$$

de unde

$$x = \frac{l}{2},$$

iar săgeata, la mijlocul deschiderii:

$$f_m = \frac{ql^2}{8H\cos\beta}. \qquad (b)$$

În baza relațiilor (a) și (b), se poate scrie relația dintre săgeata maximă și săgeata într-un punct de abscisă x de pe curba funiculară sub forma:

$$\frac{f_x}{f_m} = 4\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Valorile raportului $\frac{f_x}{f_m}$ se dau în tabelul 5.13.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.13

Valorile raportului $\frac{f_x}{f_m}$ după parabolă

x	$\frac{f_x}{f_m}$	x	$\frac{f_x}{f_m}$	x	$\frac{f_x}{f_m}$	x	$\frac{f_x}{f_m}$	x	$\frac{f_x}{f_m}$
0,01	0,036	0,11	0,391	0,21	0,664	0,31	0,856	0,41	0,967
0,02	0,078	0,12	0,423	0,22	0,685	0,32	0,870	0,42	0,975
0,03	0,115	0,13	0,452	0,23	0,707	0,33	0,885	0,43	0,980
0,04	0,154	0,14	0,481	0,24	0,729	0,34	0,898	0,44	0,985
0,05	0,190	0,15	0,510	0,25	0,750	0,35	0,910	0,45	0,990
0,06	0,226	0,16	0,537	0,26	0,770	0,36	0,922	0,46	0,994
0,07	0,260	0,17	0,564	0,27	0,788	0,37	0,932	0,47	0,996
0,08	0,294	0,18	0,580	0,28	0,806	0,38	0,942	0,48	0,998
0,09	0,327	0,19	0,615	0,29	0,824	0,39	0,951	0,49	0,999
0,10	0,360	0,20	0,640	0,30	0,840	0,40	0,960	0,50	1,000

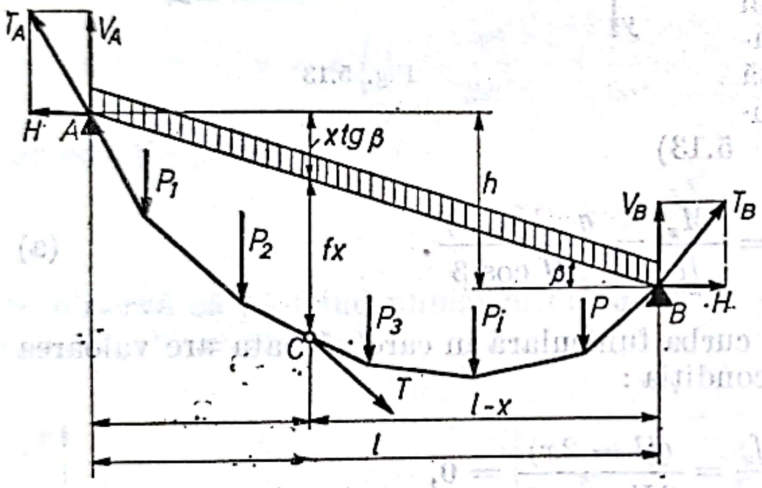


Fig. 5.14

5.14. Să se stabilească ecuaţia generală a săgeţii cablului purtător.

Rezolvare. Fie un cablu suspendat în două puncte de reazem, încărcată coplanar cu o sarcină repartizată uniform pe coardă şi sarcini concentrate paralele. Dacă se asociază arcului curbei funiculare o grindă dreaptă, simplu rezemată la capetele de deschidere şi încărcată ca şi curba funiculară se poate stabili o analogie între curba funiculară şi momentul încovoietor al grinzii.

Folosind notaţiile din figura 5.14, se determină reacţiunile din punctele de reazem ale cablului, V_A şi V_B. În baza condiţiilor de echilibru ale cablului se poate scrie :

$$\left.\begin{aligned} M_{(A)} = 0;\quad M_A^0 + V_B\, l - Hh = 0; \\ M_{(A)} = 0;\quad -M_A^0 + V_A\, l - H \cdot h = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

în care M_A^0 şi M_B^0 sînt momentele faţă de reazemele A şi B ale forţelor verticale.

Avînd în vedere că :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{l}$$

şi că

$$\frac{M_A^0}{l} \text{ şi } \frac{M_B^0}{l}$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt reacţiunile din punctele de reazem ale grinzii simplu rezemate asociate curbei funiculare, se obţine relaţia :

$$V = V^0 \mp H \operatorname{tg} \beta, \qquad \text{(b)}$$

în care V este reacţiunea în punctele de reazem ale cablului ; V^0 — reacţiunea în punctele de reazem ale grinzii simplu rezemate asociate curbei funiculare ; H — componenta orizontală a efortului în cablu.

Semnul (+) se ia pentru reacţiunea reazemului superior, iar semnul (—) pentru reacţiunea reazemului inferior.

Săgeata f_x a cablului se obţine din condiţia de echilibru a segmentului de cablu AC faţă de punctul C :

$$M_{(C)} = 0 : V_A x - H(f_x + x \operatorname{tg} \beta) - M_C^0 = 0,$$

în care M_C^0 este momentul de punctul C al forţelor verticale care acţionează asupra segmentului AC.

Ţinînd seama că :

$$V_A = V_A^0 + H \operatorname{tg} \beta,$$

se obţine

$$f_x = \frac{V_A^0 - M_C^0}{H}.$$

Numărătorul acestei fracţii reprezintă momentul de încovoiere M_x al grinzii drepte simplu asociate cablului. Prin urmare, săgeata cablului este egală cu raportul dintre momentul grinzii asociate cablului şi componenta orizontală a efortului din cablu :

$$f_x = \frac{M_x}{H}. \qquad \text{(c)}$$

Componenta orizontală H a efortului din cablu, în cazul încărcării acestuia cu sarcini verticale coplanare este constantă pentru toate secţiunile deschiderii.

5.15. Un cablu de funicular, de greutate $p = 7{,}2$ daN/m, este montat pe cinci piloni, avînd deschiderile succesive egale cu 473 ; 755 ; 345,522 m şi denivelările respective de 246 ; 423 ; 214 şi 287 m (fig. 5,15). Cablul este ancorat la extremitatea superioară şi întins cu greutatea $G = 100$ kN la extremitatea inferioară. Să se determine eforturile din cablu, pantele tangentelor la curba funiculară în dreptul pilonilor şi săgeţile celor patru cîmpuri, neglijînd frecările. Ce valori iau săgeţile în cazul cînd G se reduce la 80 kN (T. Redlov, „Fire elastice").

Rezolvare. Cunoscînd că, în ipoteza curbei funiculare lănţişor, tensiunea într-un punct al lănţişorului este proporţională cu ordonata lănţişorului, factorul de proporţionalitate fiind greutatea unităţii de lungime de fir, adică

$$T = py,$$

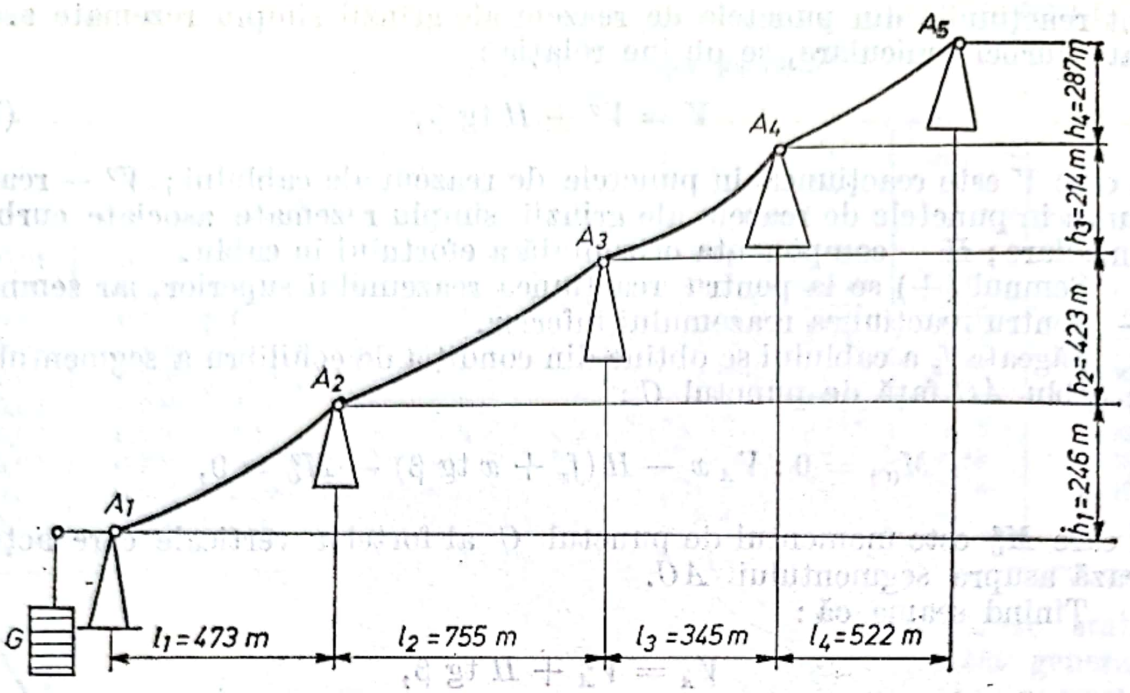


Fig. 5.15

eforturile din cablu au în dreptul pilonilor valorile:

Cîmpul I..., $T_1 = py_1 = G = 100$ kN; $T_{2,st} = p(y_1 + h) = 117{,}71$ kN;

Cîmpul II... $T_{2,dr} = 117{,}71$ kN; $T_{3,st} = 148{,}17$ kN;

Cîmpul III..., $T_{3,dr} = 148{,}17$ kN; $T_{4,st} = 163{,}58$ kN;

Cîmpul IV..., $T_{4,dr} = 163{,}58$ kN; $T_5 = 184{,}24$ kN.

Ordonatele punctelor superioare de suspensie din cele patru cîmpuri au valorile:

$$y_{2,st} = 11771 : 7{,}2 = 1635 \text{ m}; \; y_{3,st} = 14817 : 7{,}2 = 2058 \text{ m};$$

$$y_{4,st} = 16358 ; 7{,}2 = 2272 \text{ m}; \; y_5 = 18424 : 7{,}2 = 2559 \text{ m}.$$

Schimbînd în fiecare cîmp unitatea de măsură pentru lungimi, astfel încît fiecare deschidere să fie egală cu 100 unităţi de lungime, se obţin cu ajutorul nomogramelor 3 parametrii de lănţişor, după cum urmează (a se vedea nomogramele anexe ale lucrării „Fire elastice", autor prof. ing. T. Redlov):

Cîmpul I..., $l = 473 : 4{,}73 = 100\, U_0$, $h = 246 : 4{,}73 = 52\, U_0$, $a_1 = 270{,}2\, U_0$

$$y_2 = 1635 : 4{,}73 = 346\, U_0,$$

Cîmpul II,..., $l = 755 : 7{,}55 = 100\, U_0$, $h = 423 : 7{,}55 = 56\, U_0$, $a_2 = 207{,}2\, U_0$

$$y_2 = 2058 : 7{,}55 = 272\, U_0,$$

Cîmpul III..., $l = 345 : 3{,}45 = 100\ U_0$, $h = 214 : 3{,}45 = 62\ U_0$,

$y_2 = 2272 : 3{,}45 = 658\ U_0$, $a_3 = 531{,}5\ U_0$;

Cîmpul IV..., $l = 622 : 5{,}22 = 100\ U_0$, $h = 287 : 5{,}22 = 490\ U_0$,

$a_3 = 402{,}0\ U_0$

Nomogramele 5 dau valorile săgeților în funcție de a și b. Revenind la sistemul metric, rezultă:

$$f_1 = 5{,}06 \cdot 4{,}73 = 23{,}93 \text{ m}; \quad f_2 = 6{,}94 \cdot 7{,}55 = 52{,}40 \text{ m};$$

$$f_3 = 2{,}77 \cdot 3{,}45 = 9{,}56 \text{ m}; \quad f_4 = 3{,}55 \cdot 5{,}22 = 18{,}53 \text{ m}.$$

Din nomogramele *6* și *7* se extrag, cunoscînd a și h, pantele tangentelor la axa cablului în dreptul pilonilor [57]:

Cîmpul I ..., $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}322 \ldots \alpha_1 = 17°51'$,

$\operatorname{tg} \alpha_{2,st} = 0{,}730 \ldots \alpha_{2,st} = 36°08'$,

Cîmpul II..., $\operatorname{tg} \alpha_{2,dr} = 0{,}291 \ldots \alpha_{2,dr} = 16°13'$,

$\operatorname{tg} \alpha_{3,st} = 0{,}847 \ldots \alpha_{3,st} = 40°16'$,

Cîmpul III..., $\operatorname{tg} \alpha_{3,dr} = 0{,}511 \ldots \alpha_{3,dr} = 27°04'$,

$\operatorname{tg} \alpha_{4,st} = 0{,}733 \ldots \alpha_{4,st} = 36°14'$,

Cîmpul IV..., $\operatorname{tg} \alpha_{4,dr} = 0{,}412 \ldots \alpha_{4,dr} = 22°24'$,

$\operatorname{tg} \alpha_5 = 0{,}695 \ldots \alpha_5 = 34°48'$.

Pentru $G = 80$ kN rezultă:

$$f_1' = 6{,}250 \cdot 4{,}73 = 29{,}56 \text{ m}; \quad f_2' = 8{,}225 \cdot 7{,}55 = 62{,}10 \text{ m};$$

$$f_3' = 3{,}185 \cdot 3{,}45 = 10{,}99 \text{ m}; \quad f_4' = 4{,}025 \cdot 5{,}22 = 21{,}01 \text{ m}.$$

Micșorarea greutății de întindere cu 20% atrage după sine mărirea săgeților pentru cele patru cîmpuri succesive cu 23,6%, 18,5%, 15,0% și 13,4%. (Aceste sporuri se micșorează cu creșterea numărului de ordine ale deschiderii, din cauză că p rămîne invariabil).

5.16. Să se determine componenta orizontală H a efortului din cablu, în conformitate cu notația din figura 5.16.

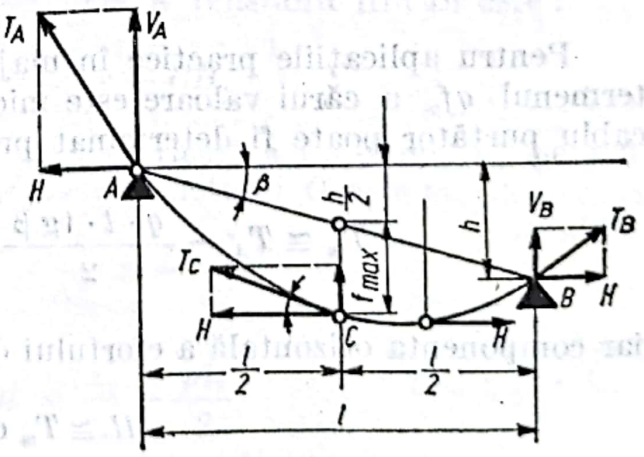


Fig. 5.16

Rezolvare. Din figura 5.16 se observă că:

$$H = T_C \cos \beta. \qquad \text{(a)}$$

Utilizînd legea de bază a firelor perfect flexibile, efortul T_C se poate exprima în funcţie de eforturile în punctele de reazem prin relaţiile [57]:

$$T_C = T_A - q\left(\frac{h}{2} + f_m\right) = T_A - \frac{ql\,\mathrm{tg}\,\beta}{2} - qf_m;$$

$$T_C = T_B + q\left(\frac{h}{2} - f_m\right) = T_B + \frac{ql\,\mathrm{tg}\,\beta}{2} - qf_m;$$

de unde prin însumare:

$$T_C = \frac{T_A + T_B}{2} - qf_m = T_m - qf_m. \tag{b}$$

Înlocuind în relaţia (a) valoarea efortului T_C din (b), rezultă

$$H = (T_m - qf_m)\cos\beta \tag{c}$$

în care

$$T_m = \frac{T_A + T_B}{2}$$

este efortul mediu din cablu.

Dacă în relaţia (c) se înlocuieşte valoarea săgeţii f_m prin $f_m = \frac{ql^2}{8H\cos\beta}$ se obţine:

$$H = T_A\cos\beta\left(1 - \frac{q^2l^2}{8T_m^2\cos^2\beta}\right). \tag{d}$$

Pentru aplicaţiile practice în majoritatea cazurilor poate fi neglijat termenul qf_m a cărui valoare este mică. În acest caz, efortul mediu din cablu purtător poate fi determinat prin relaţia:

$$T_m \cong T_A - \frac{q\cdot l\cdot \mathrm{tg}\,\beta}{2} = T_B + \frac{ql\cdot \mathrm{tg}\,\beta}{2}, \tag{e}$$

iar componenta orizontală a efortului din cablu, cu relaţia:

$$H \cong T_m\cos\beta. \tag{f}$$

5.17. Un cablul este suspendat în două puncte A şi B, asupra căruia mai acţionează forţa concentrată P, în punctul C (fig. 5.17). Cotele fiind date în figură, se pune problema determinării tensiunilor în punctele de suspensie.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se asimilează cu arce de parabolă porțiunile de cablu AC și BC. Parabola AC va avea axele x_1 și y_1, iar parabola BC, x_2 și y_2 Ecuațiile celor două parabole sînt respectiv :

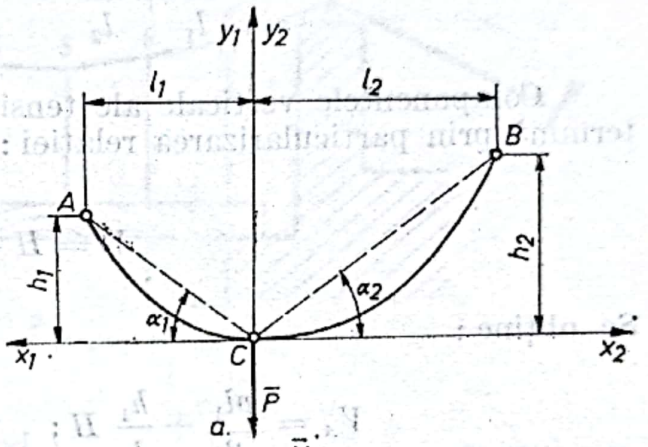
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{p}{2H}x_1^2 + C_1x_1; \\ y_2 &= \frac{p}{2H}x_2^2 + C_2x_2, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

C_1 și C_2 fiind două constante. Punînd condiția ca parabolele să treacă prin punctele de suspensie A și B, se obține :

$$h_1 = \frac{pl_1^2}{2H} + C_1l_1$$

și

$$h_2 = \frac{pl_2^2}{2H} + C_2l_2.$$



Rezultă expresiile constantelor C_1 și C_2 :

$$C_1 = \frac{h_1}{l_1} - \frac{pl_1}{2H}$$

și

$$C_2 = \frac{h_2}{l_2} - \frac{pl_2}{2H}.$$

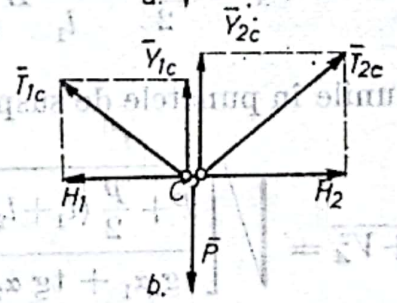


Fig. 5.17

Ecuația generală a componentei verticale a tensiunii din fir este :

$$V = H\frac{dy}{dx} = px + CH.$$

În punctul C, $x = 0$; componenta verticală a tensiunii, V, pentru partea stîngă, respectiv partea dreaptă a punctului C este :

$$V_{1c} - C_1H = \frac{h_1}{l_1}H - \frac{pl_1}{2}$$

și

$$V_{2c} - C_2H = \frac{h_2}{l_2} - \frac{pl_2}{2}$$

Scriind ecuațiile de proiecții pe axele de coordonate a forțelor din punctul C, se obține :

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i &= 0\,; -H_1 + H_2 = 0\,; \\ \sum Y_i &= 0\,; V_{1c} + V_{2c} - P = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Rezultă:

$$H_1 = H_2 = H \quad \text{și} \quad H\left(\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2}\right) - \frac{p}{2}(l_1 + l_2) - P = 0.$$

de unde se deduce:

$$H = \frac{P + \frac{p}{2}(l_1 + l_2)}{\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2}} = \frac{P + \frac{p}{2}(l_1 + l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Componentele verticale ale tensiunilor din punctele A și B se determină prin particularizarea relației:

$$V = H\frac{dy}{dx}.$$

Se obține:

$$V_A = \frac{pl_1}{2} + \frac{h_1}{l_1}H; \quad V_B = \frac{pl_2}{2} + \frac{h_2}{l_2}H. \tag{c}$$

Tensiunile în punctele de suspensie sînt:

$$\left.\begin{aligned} T_A &= \sqrt{H^2 + V_A^2} = \sqrt{\left[\frac{P + \frac{p}{2}(l_1+l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\right]^2 + \left[\frac{pl_1}{2} + \frac{h_1}{l_1}\cdot\frac{P + \frac{p}{2}(l_1+l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\right]^2} \\ T_B &= \sqrt{H^2 + V_B^2} = \sqrt{\left[\frac{P + \frac{p}{2}(l_1+l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\right]^2 + \left[\frac{pl_2}{2} + \frac{h_2}{l_2}\cdot\frac{P + \frac{p}{2}(l_1+l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\right]^2} \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

5.18. Se consideră podul suspendat din figura 5.18, *a*, format dintr-un cablu ancorat la extremități și acționat de forțe concentrate, paralele, egale, echidistanțate și de același sens. Se cere să stabilească ecuația cablului.

Rezolvare. Considerînd o porțiune dintr-un fir încărcat cu forțe concentrate verticale și echidistanțate (fig. 5.18, *b*), coordonatele unui punct *i* al său sînt:

$$x_i = a(i - 1), \tag{a}$$

$$y_i = a(\operatorname{tg}\alpha_{1,2} + \operatorname{tg}\alpha_{2,3} + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_{i-1,i}), \tag{b}$$

unde a este distanța dintre suporții forțelor.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a se obține expresiile tangentelor, se folosesc ecuațiile de echilibru ale sistemului de forțe

$$\{\bar{F}, \bar{N}_{i,i-1}, \bar{N}_{i,i+1}\}$$

aplicate punctului i (fig. 5.18, b).

Ecuația de proiecții pe direcția axei Ox va fi:

$$N_{i,i-1} \cos \alpha_{i-1,i} = N_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1} = H, \qquad (c)$$

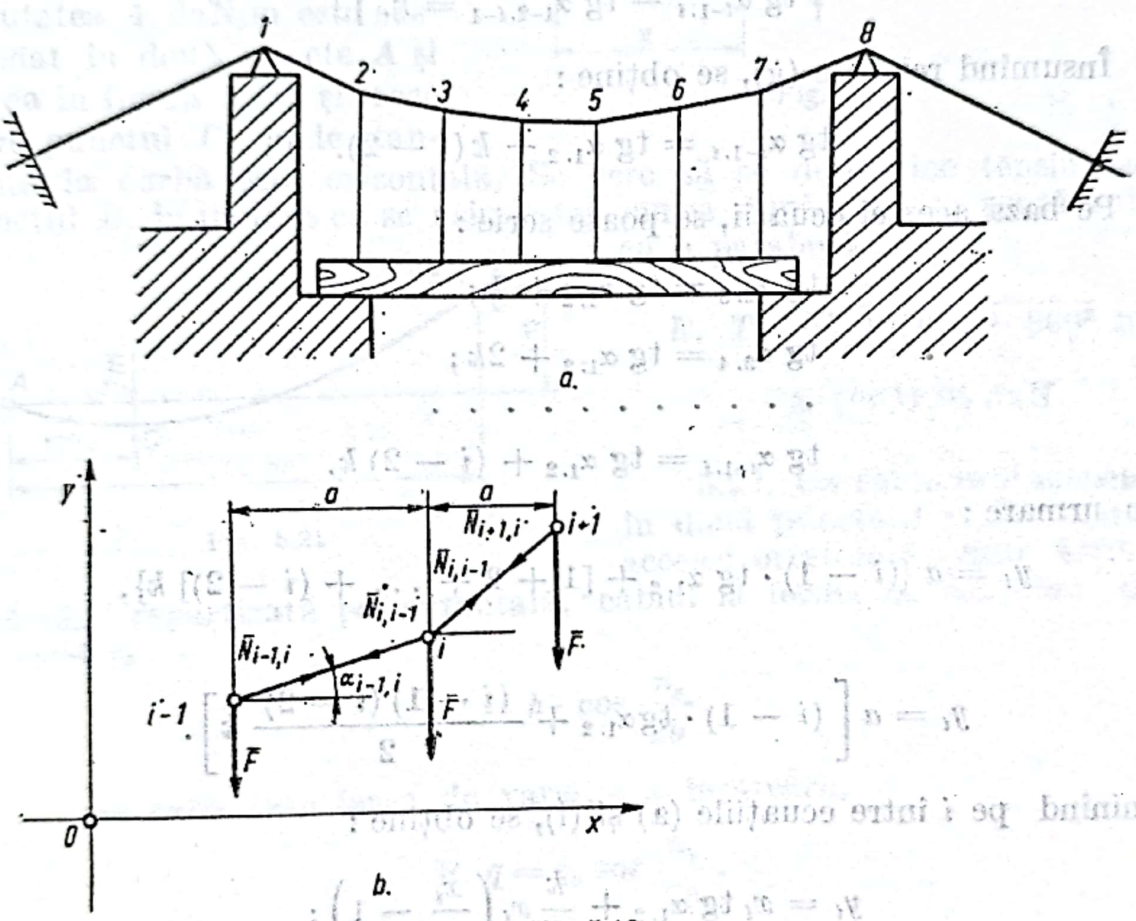


Fig. 5.18

H reprezentînd proiecția pe orizontală a eforturilor pe diferite porțiuni ale firului.

Ecuația de proiecții pe axa Oy se scrie:

$$-N_{i,i-1} \sin \alpha_{i-1,i} + N_{i,i+1} \sin \alpha_{i,i+1} = F. \qquad (d)$$

Din relația (c) rezultă:

$$N_{i,i-1} = \frac{H}{\cos \alpha_{i-1,i}}, \quad N_{i,i+1} = \frac{H}{\cos \alpha_{i,i+1}}. \qquad (e)$$

Substituind expresiile (e) în (d), se obține relația:

$$\operatorname{tg} \alpha_{i,i+1} - \operatorname{tg} \alpha_{i-1,i} = \frac{F}{H} = k, \qquad (f)$$

unde k este o constantă. Scriind ecuații de forma (f), pentru fiecare nod, de la nodul 2 la nodul $i-1$, se obține:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\alpha_{2,3} - \operatorname{tg}\alpha_{1,2} = k;\\ &\operatorname{tg}\alpha_{3,4} - \operatorname{tg}\alpha_{2,3} = k;\\ &\operatorname{tg}\alpha_{4,5} - \operatorname{tg}\alpha_{3,4} = k;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\operatorname{tg}\alpha_{i-1;i} - \operatorname{tg}\alpha_{1-2,i-1} = k. \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

Însumînd relațiile (g), se obține:

$$\operatorname{tg}\alpha_{i-1,i} = \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + k(i-2). \quad (h)$$

Pe baza acestei ecuații, se poate scrie:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\alpha_{2,3} = \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + k;\\ &\operatorname{tg}\alpha_{3,4} = \operatorname{tg}\alpha_{1;2} + 2k;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\operatorname{tg}\alpha_{i-1,i} = \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + (i-2)\,k. \end{aligned}$$

Prin urmare:

$$y_i = a\,\{(i-1)\cdot \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + [1+2+\ldots+(i-2)]\,k\},$$

sau

$$y_i = a\left[(i-1)\cdot \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + \frac{(i-1)(i-2)}{2}k\right]. \quad (i)$$

Eliminînd pe i între ecuațiile (a) și (i), se obține:

$$y_i = x_i \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + \frac{k}{2}x_i\left(\frac{x_i}{a} - 1\right);$$

deci cablul încărcat cu forțe concentrate verticale, egale și echidistanțate se va înscrie într-o parabolă a cărei ecuație este:

$$y = x\cdot \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + \frac{k}{2}\left(\frac{x}{a} - 1\right)x. \quad (j)$$

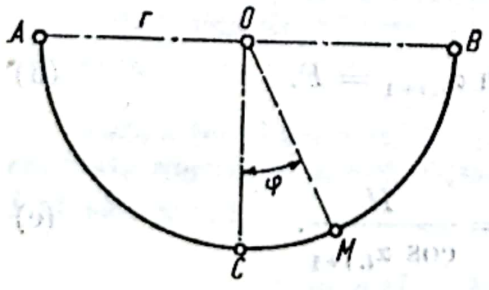


Fig. 5.19

5.19. Care trebuie să fie legea de variație a greutății unității de lungime de cablu, pentru ca forma lui să fie un semicerc, ca în figura 5.19. Care este tensiunea într-un punct M al firului?

$$R\cdot q_M = \frac{q_0}{\cos^2\varphi};\quad T_M = \frac{q_0\cdot r}{\cos\varphi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.20. De punctele A și B este suspendat un cablu, a cărui greutate este $q = 4$ daN/m (fig. 5.20). Să se determine distanța x la care trebuie așezat discul D, în condiția ca $f_2 = 2f_1 = l/100$. Punctele A, D și B se găsesc pe aceeași orizontală.

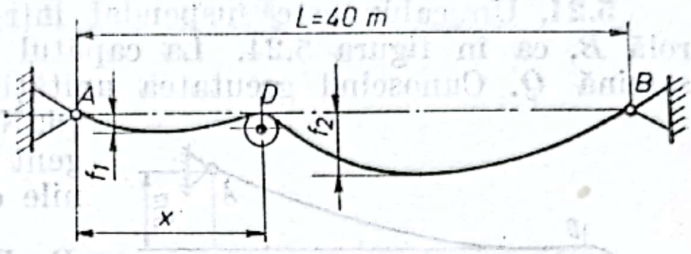


Fig. 5.20

R. 16,56 m.

5.21. Un cablu avînd greutatea 4 daN/m este suspendat în două puncte A și B, ca în figura 5.21, și trece prin punctul C, unde tangenta la curbă este orizontală. Se cere să se determine tensiunea în punctul B, în ipoteza că se asimilează curba după care se așază cablul cu o parabolă.

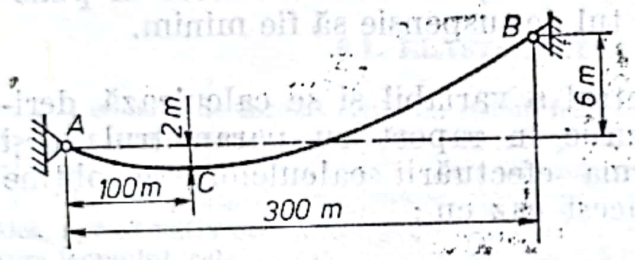


Fig. 5.21

R. $T_B = \sqrt{10000^2 + 800^2} \cong$

$\cong 10031{,}95$ daN.

5.22. Un cablu este suspendat în două puncte A și B situate pe aceeași orizontală. Sub acțiunea încărcării repartizată pe orizontală, cablul ia forma de echilibru dată de ecuația:

$$y = h \cdot \cos \frac{\pi_x}{2b}.$$

Să se determine legea de variație a încărcării.

R. $q = q_0 \cos \frac{\pi_x}{2b}$.

5.23. Un cablu de greutate p[daN/m], este legat ca în figura 5.23 în punctul A, înfășurat pe jumătatea superioară a unui cilindru și

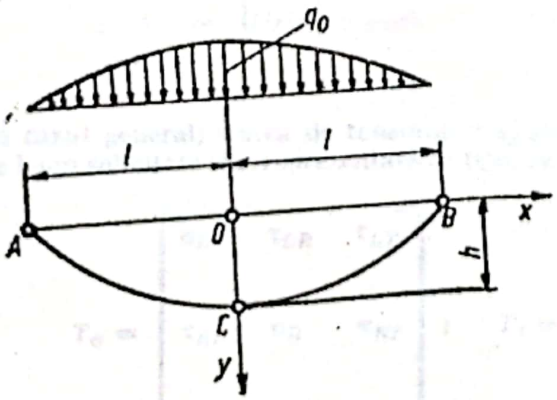


Fig. 5.22

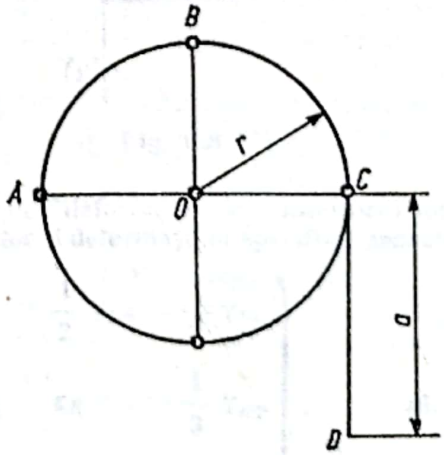


Fig. 5.23

atîrnă cu o lungime a. Se cer tensiunile în punctele A, B și C.

R. $T_C = pa$; $T_B = p(r + a)$; $T_A = pa$.

5.24. Un cablu este suspendat într-un punct A și trecut peste o rolă B, ca în figura 5.24. La capătul liber al cablului este legată o sarcină Q. Cunoscînd greutatea unității de lungime de cablu $p = 5$ [daN/m] și că în D cablul este tangent la rolă, să se determine reacțiunile din punctele A și B.

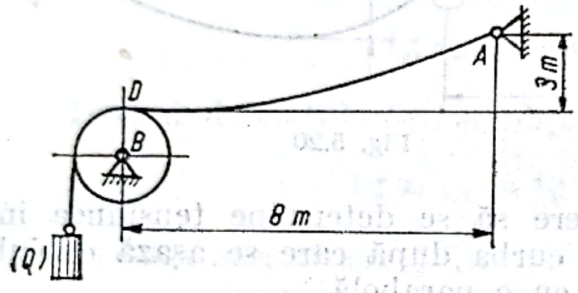


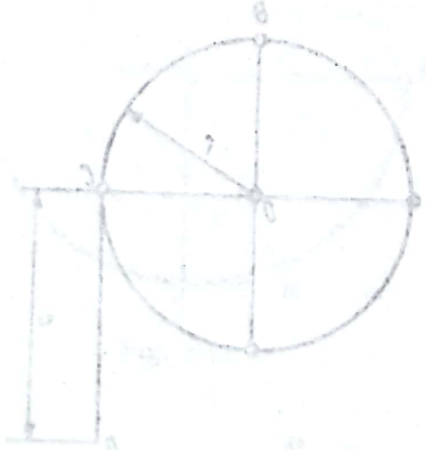
Fig. 5.24

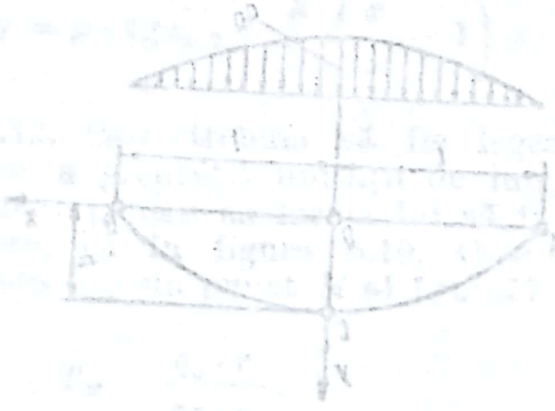
R. $R_A = 70$ daN; $R_B = 78{,}6$ daN.

5.25. Să se determine săgeata unui cablu suspendat în două puncte de nivel, astfel încît efortul în punctul de suspensie să fie minim.

Indicație. Se consideră parametrul a variabil și se calculează derivata efortului în punctul de suspensie în raport cu parametrul a și apoi se anulează derivata. În urma efectuării calculelor, se obține $l/2a \cong 1{,}20$. Săgeata este egală în acest caz cu:

$$f = a\left(ch\frac{l}{2a} - 1\right) \cong 0{,}338\ l.$$





ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII LEMNULUI ȘI MATERIALELOR PE BAZĂ DE LEMN

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

6.1. ELASTICITATEA LEMNULUI MASIV

Lemnul este format dintr-un sistem foarte complex de fibre, celule, substanțe de cimentare ș.a., a căror coeziune fizico-chimică pune probleme deosebite în calculele de rezistență și rigiditate, comparativ cu materialele omogene și izotrope cum sînt de exemplu metalele.

Lemnul, datorită structurii sale, este un material anizotrop cu trei plane de simetrie elastică, aproximativ ortogonale între ele, adică este un material ortotrop. Avînd în vedere structura lemnului, cele trei axe de simetrie elastică sînt : longitudinală L (sau y în notațiile obișnuite ale unui sistem de referință triortogonal drept), radială R (sau z) și tangențială T (sau x) iar cele trei plane de anizotropie elastică sînt LR, RT și TR (fig. 6, a).

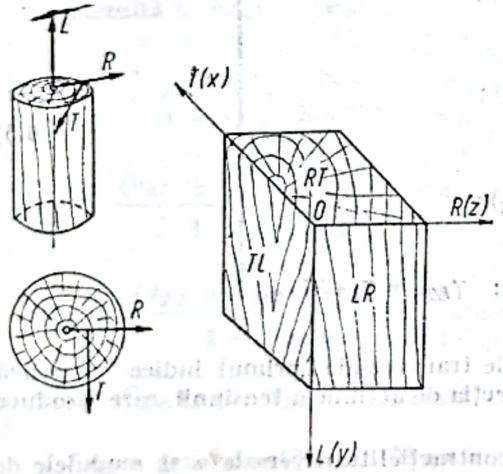


Fig. 6.a

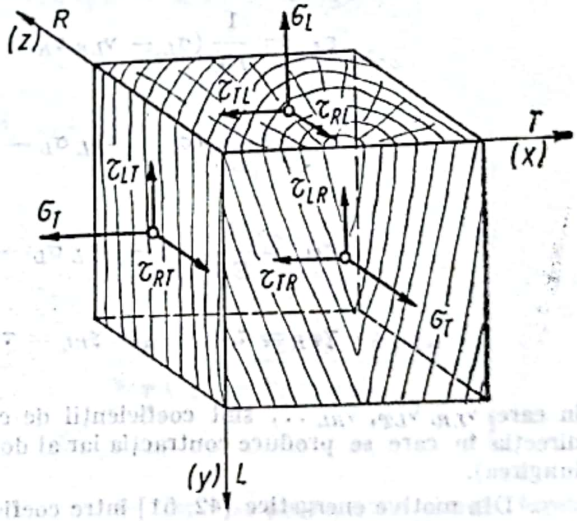


Fig. 6.b

În cazul general, starea de tensiune, respectiv starea de deformație, din interiorul unei piese de lemn solicitate sînt reprezentate de tensorul tensiunilor și deformațiilor specifice respectiv

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_L & \tau_{LR} & \tau_{LT} \\ \tau_{RL} & \sigma_R & \tau_{RT} \\ \tau_{TL} & \tau_{TR} & \sigma_T \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_L & \frac{1}{2}\gamma_{LR} & \frac{1}{2}\gamma_{LT} \\ \frac{1}{2}\gamma_{RL} & \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{RT} \\ \frac{1}{2}\gamma_{TL} & \frac{1}{2}\gamma_{TR} & \varepsilon_T \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

în care σ_L, σ_R și σ_T sînt tensiunile normale după direcțiile L, R și T; τ_{LR}, τ_{RT} și τ_{LT} — tensiunile tangențiale în planele LR, RT și LT; ε_L, ε_R și ε_T sînt deformațiile specifice iar γ_{LR}, γ_{RT} și γ_{LT} — lunecările specifice (fig. 6, *b*).

În cazul în care σ_L, σ_R și σ_T sînt principale, tensorul tensiunilor T_σ și al deformațiilor T_ε devine :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_R & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_L \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_L & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_R & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Introducînd tensorul modulelor de elasticitate longitudinală E și tensorul coeficienților de contracție transversală S, respectiv

$$E = \begin{Vmatrix} E_L & 0 & 0 \\ 0 & E_R & 0 \\ 0 & 0 & E_T \end{Vmatrix}; \quad S = \begin{Vmatrix} 1 & -\nu_{LR} & -\nu_{LT} \\ -\nu_{RL} & 1 & -\nu_{RT} \\ -\nu_{TL} & -\nu_{TR} & 1 \end{Vmatrix} \tag{6.3}$$

din egalitatea

$$\begin{Vmatrix} E_L & 0 & 0 \\ 0 & E_R & 0 \\ 0 & 0 & E_T \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -\nu_{LR} & -\nu_{LT} \\ -\nu_{RL} & 1 & -\nu_{RT} \\ -\nu_{TL} & -\nu_{TR} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \end{Vmatrix} \tag{6.4}$$

rezultă

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_L &= \frac{1}{E_L}(\sigma_L - \nu_{LR}\sigma_R - \nu_{LT}\sigma_T); \\ \varepsilon_R &= \frac{1}{E_R}(\sigma_R - \nu_{RL}\sigma_L - \nu_{RT}\sigma_T); \\ \varepsilon_T &= \frac{1}{E_T}(\sigma_T - \nu_{TL}\sigma_L - \nu_{TR}\sigma_R); \\ \gamma_{TR} &= \tau_{TR}/G_{TR}; \quad \gamma_{RL} = \tau_{RL}/G_{RL}; \quad \gamma_{LT} = \tau_{LT}/G_{LT}, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

în care ν_{LR}, ν_{LT}, ν_{RL} ... sînt coeficienții de contracție transversală (primul indice ilustrează direcția în care se produce contracția iar al doilea direcția de acțiune a tensiunii care produce lungirea).

Din motive energetice [42, 51] între coeficienții contracției transversale ν și modulele de elasticitate E există relațiile :

$$E_L \nu_{RL} = E_R \nu_{LR}; \quad E_L \nu_{TL} = E_T \nu_{LT}; \quad E_R \nu_{TR} = E_T \nu_{RT} \tag{6.6}$$

În cazul în care L, R și T nu sînt direcții principale, tensiunile tangențiale sînt diferite de zero iar lunecările specifice au succesiv valorile

$$\gamma_{TR} = \frac{\tau_{TR}}{G_{TR}}; \quad \gamma_{RL} = \frac{\tau_{RL}}{G_{RL}}; \quad \gamma_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}},$$

unde G_{TR}, G_{RL} și G_{LT} sînt modulele de elasticitate transversală.

Scanned with OKEN Scanner

Relațiile (6.5) și (6.7) reprezintă *legea generalizată* a lui H o o k e în cazul lemnului.

Relațiile 6.5) dau corelația deformații-tensiuni. Relațiile tensiuni-deformații în cazul lemnului, se obțin din relația (6.5), care se mai scrie

$$\varepsilon = S\sigma,$$

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} E_L & \varepsilon_L \\ E_R & \varepsilon_R \\ E_T & \varepsilon_T \end{Vmatrix} \quad \text{iar} \quad \sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \end{Vmatrix}, \tag{6.8}$$

de unde rezultă

$$\sigma = S_{\varepsilon}^{-1},$$

S^{-1} fiind matricea inversă matricei S.

După transformări se mai poate scrie

$$\sigma = S^* \varepsilon \cdot \frac{1}{\det. S} \tag{6.9}$$

unde S^* este matricea asociată matricei S iar det. S este determinantul format din coeficienții matricei S.

Exprimată matricial relația (6.9) devine

$$\begin{Vmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \end{Vmatrix} = \frac{\begin{Vmatrix} 1 - \nu_{RT}\nu_{TR} & \nu_{LR} + \nu_{LT}\nu_{TR} & \nu_{LT} + \nu_{RL}\nu_{RT} \\ \nu_{RL} + \nu_{RT}\nu_{TL} & 1 - \nu_{LT}\nu_{TL} & \nu_{RT} + \nu_{LT}\nu_{RL} \\ \nu_{RL} + \nu_{RL}\nu_{TR} & \nu_{TR} + \nu_{LR}\nu_{TL} & 1 - \nu_{LR}\nu_{RT} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E_L & \varepsilon_L \\ E_R & \varepsilon_R \\ E_T & \varepsilon_T \end{Vmatrix}}{1 - \nu_{RT}\nu_{TR} - \nu_{LR}(\nu_{RL} + \nu_{RT}\nu_{TL}) - \nu_{LT}(\nu_{TL} + \nu_{RL}\nu_{TR})} \tag{6.10}$$

Rezultă în final următoarele relații între tensiuni și deformațiile specifice :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_L &= \frac{(1 - \nu_{RT}\nu_{TR})E_L\varepsilon_L + (\nu_{LR} + \nu_{LT})E_R\varepsilon_R + (\nu_{LT} + \nu_{RL}\nu_{RT})E_T\varepsilon_T}{(1 - \nu_{RT}\nu_{TR}) - \nu_{LR}(\nu_{RL} + \nu_{RT}\nu_{TL}) - \nu_{LT}(\nu_{TL} + \nu_{RL}\nu_{TR})}; \\ \tau_R &= \frac{(\nu_{RL} + \nu_{RT}\nu_{TL})E_L\varepsilon_L + (1 - \nu_{LT}\nu_{TL})E_R\varepsilon_R + (\nu_{RT} + \nu_{LT}\nu_{RL})E_T\varepsilon_T}{1 - \nu_{RL}\nu_{TR} - \nu_{LR}(\nu_{RL} + \nu_{RT}\nu_{TL}) - \nu_{LT}(\nu_{TL} + \nu_{RL}\nu_{TR})}; \\ \sigma_T &= \frac{(\nu_{TL} + \nu_{RL}\nu_{TR})E_L\varepsilon_L + (\nu_{TR} + \nu_{LR}\nu_{TL})E_R\varepsilon_R + (1 - \nu_{LR}\nu_{RL})E_T\varepsilon_T}{1 - \nu_{RT}\nu_{TR} - \nu_{LR}(\nu_{RL} + \nu_{RT}\nu_{TL}) - \nu_{LT}(\nu_{TL} + \nu_{RL}\nu_{TR})}; \\ \tau_{TR} &= G_{TR}\gamma_{TR}; \quad \tau_{RL} = G_{RL}\gamma_{RL}; \quad \tau_{LT} = G_{LT}\gamma_{LT}. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Legea generalizată a lui H o o k e, în cazul lemnului, se mai poate scrie și sub forma

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{13}\sigma_z; \\ \varepsilon_y &= s_{21}\sigma_x + \varepsilon_{22}\sigma_y + s_{23}\sigma_z; \\ \varepsilon_z &= s_{31}\sigma_x + s_{32}\sigma_y + s_{33}\sigma_z; \\ \gamma_{yz} &= s_{44}\tau_{yz}; \\ \gamma_{zx} &= s_{55}\tau_{zx}; \\ \gamma_{xy} &= s_{66}\tau_{xy}; \\ \text{unde } s_{ik} &= s_{ki} \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z; \\ \sigma_y &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z; \\ \sigma_z &= c_{31}\varepsilon_x + c_{32}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z; \\ \tau_{yz} &= c_{44}\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= c_{55}\gamma_{zx}; \\ \tau_{xy} &= c_{66}\gamma_{xy}; \\ \text{unde } c_{ik} &= c_{ki}. \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

În relațiile (6.12) și (6.13) s_{ik} și c_{ik} reprezintă coeficienții indicilor elastici ai lemnului în planele de simetrie elastică iar semnificația lor este

$$E_L = E_y = \frac{1}{s_{22}}; \quad E_R = E_z = \frac{1}{s_{33}}; \quad E_T = E_x = \frac{1}{s_{11}}; \quad G_{LR} = G_{yz} = \frac{1}{s_{44}} = c_{44};$$

$$G_{RT} = G_{zx} = \frac{1}{s_{55}} = c_{55}; \quad G_{LT} = G_{xy} = \frac{1}{s_{66}} = C_{66}; \quad \nu_{LT} = -s_{22}/s_{11};$$

$$\nu_{LT} = -s_{12}/s_{22}; \quad \nu_{TR} = -s_{13}/s_{33}; \quad \nu_{RT} = -s_{31}/s_{11}; \quad \nu_{LR} = -s_{22}/s_{33}; \quad \nu_{RL} = -s_{32}/s_{22}$$

$$c_{11} = \frac{\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}}; \quad c_{12} = \frac{\begin{vmatrix} s_{23} & s_{12} \\ x_{33} & s_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}}; \quad c_{13} = \frac{\begin{vmatrix} s_{12} & s_{22} \\ s_{13} & s_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}} \text{ ș.a.m.d.} \tag{6.14}$$

Constantele determinate pe cele trei direcții principale de elasticitate poartă numele de *constante principale elastice.*

Lemnul ca material anizotrop și ortotrop are nouă constante elastice principale (E_L, E_R, E_T, G_{LR}, G_{LT}, ν_{LT}, ν_{LR}, și ν_{RT}).

În tabelele 6.1 și 6.2 sînt prezentate valorile constantelor elastice ale citorva specii de lemn mai des utilizate în practică în industria produselor finite și construcțiilor din lemn.

În cazul general, cînd direcțiile tensiunilor nu coincid cu direcțiile de simetrie elastică L, R și T, expresiile relațiilor dintre deformații și tensiuni sînt :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{L'} &= \frac{\sigma_{L'}}{E_{L'}} - \frac{\nu_{L'R'}\sigma_{R'}}{E_{L'}} - \frac{\nu_{L'T'}\sigma_{T'}}{E_{L'}} + \xi_{L'R',L'}\frac{\tau_{L'R'}}{G_{L'R'}} + \xi_{R'T',L'}\frac{\tau_{R'G'}}{G_{R'T'}} + \xi_{T'L',L'}\frac{\tau_{T'L'}}{G_{T'L'}};\\
\varepsilon_{R'} &= \frac{\sigma_{R'}}{E_{R'}} - \frac{\nu_{R'L'}\sigma_{L'}}{E_{R'}} - \frac{\nu_{R'T'}\sigma_{T'}}{E_{R'}} + \xi_{L'R',R'}\frac{\tau_{L'R'}}{G_{L'R'}} + \xi_{R'T',R'}\frac{\tau_{R'T'}}{G_{R'T'}} + \xi_{T'L',R'}\frac{\tau_{T'L'}}{G_{T'L'}};\\
\varepsilon_{T'} &= \frac{\sigma_{T'}}{E_{T'}} - \frac{\nu_{T'L'}\sigma_{L'}}{E_{L'}} - \frac{\nu_{T'R'}\sigma_{R'}}{E_{T'}} + \xi_{L'R',T'}\frac{\tau_{L'R'}}{G_{L'R'}} + \xi_{R'T',T'}\frac{\tau_{R'T'}}{G_{R'T'}} + \xi_{T'L',T'}\frac{\tau_{R'T'}}{G_{T'L'}};\\
\gamma_{L'R'} &= \xi_{L',L'R'}\frac{\sigma_{L'}}{E_{L'}} + \xi_{R',L'R'}\frac{\sigma_{R'}}{E_{R'}} + \xi_{T',L'R'}\frac{\sigma_{T'}}{E_{T'}} + \frac{\tau_{L'R'}}{G_{L'R'}} + \eta_{R'T',L'R'}\frac{\tau_{R'T'}}{G_{R'T'}} +\\
&\quad + \eta_{T'L',L'R'}\frac{\tau_{T'L'}}{G_{T'L'}};\\
\gamma_{R'T'} &= \xi_{L',R'T'}\frac{\sigma_{L'}}{E_{L'}} + \xi_{R',R'T'}\frac{\sigma_{R'}}{E_{R'}} + \xi_{T',R'T'}\frac{\sigma_{T'}}{E_{T'}} + \eta_{L'R',R'T'}\frac{\tau_{L'R'}}{G_{L'R'}} + \frac{\tau_{R'T'}}{G_{R'T'}} +\\
&\quad + \eta_{T'L',R'T'}\frac{\tau_{T'L'}}{G_{T'L'}};\\
\gamma_{T'L'} &= \xi_{L',T'L'}\frac{\sigma_{L'}}{E_{L'}} + \xi_{R',T'L'}\frac{\sigma_{R'}}{E_{R'}} + \xi_{T',T'R'}\frac{\sigma_{T'}}{E_{T'}} + \eta_{L'R',T'L'}\frac{\tau_{L'R'}}{G_{L'R'}} +\\
&\quad + \eta_{R'T',T'L'}\frac{\tau_{R'T'}}{G_{R'T'}} + \frac{\tau_{T'L'}}{G_{T'R'}},
\end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $\varepsilon_{L'}$, $\varepsilon_{R'}$ și $\varepsilon_{T'}$ sînt deformațiile specifice în direcția tensiunilor

$$\sigma_{L'},\ \sigma_{R'} \text{ și } \sigma_{T'};$$

$\gamma_{L'R'}$, $\gamma_{L'T'}$ și $\gamma_{R'T'}$ — lunecările specifice (micșorarea unghiurilor de 90°) în planele unde acționează tensiunile $\tau_{L'R'}$, $\tau_{L'T'}$ și $\tau_{R'T'}$;

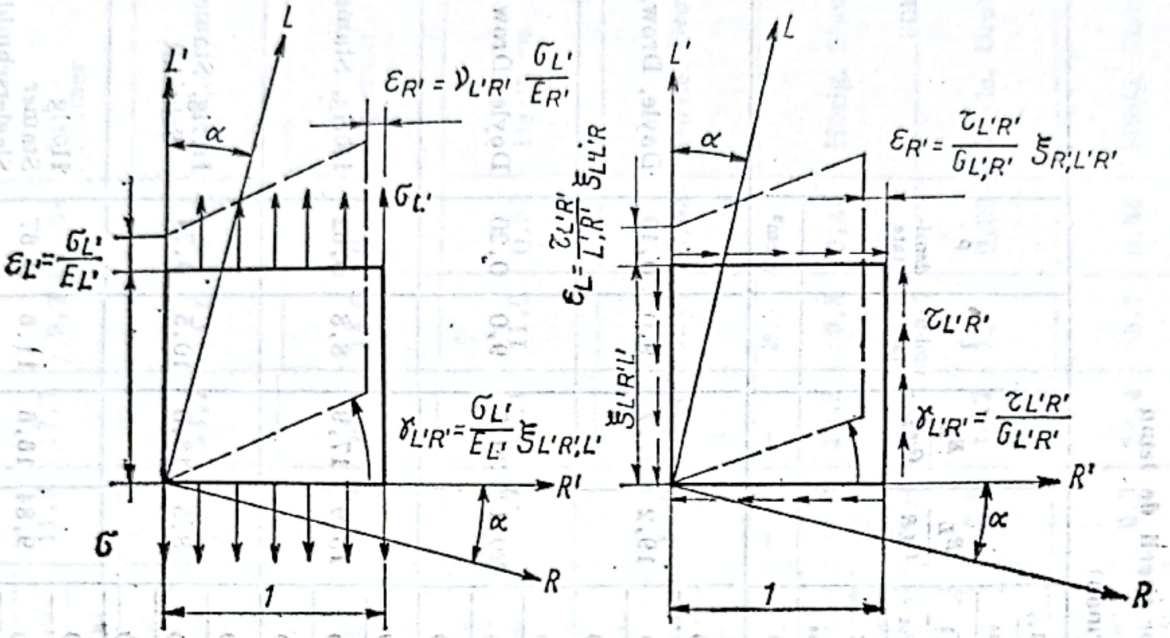


Fig. 6.c

E, *G*, ν, ξ și η — modulele de elasticitate longitudinală și transversală, coeficienții contracției transversale și coeficienții de influență reciprocă a deformațiilor (fig. 6, *c*).

Pentru *E*, *G* și ν indicii au semnificațiile cunoscute iar pentru ξ și η, indicii pînă la virgulă, arată direcția tensiunilor care produc deformațiile iar indicii după virgulă arată direcția tensiunilor care produc deformațiile.

Spre exemplu $\xi_{L'R',L'}$ este coeficientul arătînd mărimea deformațiilor liniare în direcția L' datorită tensiunii tangențiale $\tau_{L'R'}$; $\eta_{R'T',L'R'}$ — coeficient ce arată mărimea lunecării specifice $\gamma_{L'R'}$ datorită acțiunii tensiunii tangențiale $\tau_{R'T'}$.

Datorită structurii sale anizotrope, cu trei plane de simetrie elastică, direcția deformațiilor maxime ale lemnului nu coincide cu direcția tensiunilor maxime (fig. 6, *d*).

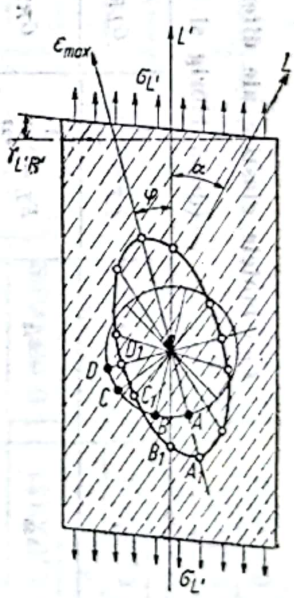
Mărimea unghiului φ dintre direcțiile tensiunilor și deformațiile maxime este dat de relația

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\gamma_{L'R'}}{\varepsilon_{R'} - \varepsilon_{L'}} = \frac{\xi_{L'R',L}}{1 + \xi_{R'L'}} \tag{6.16}$$

iar deformațiile maxime

$$\varepsilon_{max} = \frac{\varepsilon_{L'} + \varepsilon_{R'}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{R'} - \varepsilon_{L'})^2 + \gamma^2_{L'R'}} = \tag{6.17}$$

$$= \frac{\varepsilon_{L'}}{2}\left[1 - \nu_{R'L'} + \sqrt{(1 + \nu_{R'L'})^2 + \xi^2_{L'R',L'}}\right]$$



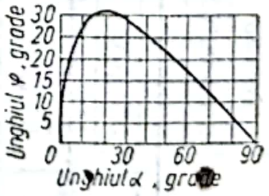


Fig. 6.d

adică deformațiile maxime și direcția acestora sînt dependente și de proprietățile elastice ale lemnului.

Tabelul 6.1

Constantele elastice ale diferitelor specii de lemn

(după Hörig și Hearmon)

SPECIA	s_{11} s_{22} s_{33} cm²/daN	s_{44} s_{55} s_{66} cm²/daN	$-s_{12}$ $-s_{13}$ $-s_{23}$ cm²/daN	$E_T = \frac{1}{s_{11}}$ $E_L = \frac{1}{s_{22}}$ $E_R = \frac{1}{s_{33}}$ daN/cm²	$G_{LR} = \frac{1}{s_{44}}$ $G_{RT} = \frac{1}{s_{55}}$ $G_{TL} = \frac{1}{s_{66}}$ daN/cm²	$\frac{E_L}{G_{LR}}$ —	$\frac{E_L}{G_{TL}}$ —	U umiditate %	ρ densitate g/cm³	SURSA
Balsa	0,00258 0,0000402 0,00086	0,000791 0,00704 0,00115	0,0000215 0,000594 0,00001237	400 24900 1200	1300 100 900	19,2	27,7	9,0	0,10	Doyle, Drow, Mc Burney
Balsa	0,000926 0,0000156 0,000327	0,000314 0,00298 0,000483	0,00000798 0,000219 0,00000474	1100 64200 3100	3200 300 2100	20,1	30,6	9,0	0,20	Doyle, Drow Mc Burney
Mesteacăn	0,000159 0,000006 0,0000888	0,0000836 0,000527 0,000108	0,0000026 0,000064 0,0000029	6300 166700 11300	12000 1900 9300	13,9	17,9	8,8	0,62	Hörig, Stamer
Fag	0,0000862 0,00000714 0,0000438	0,0000610 0,000215 0,0000929	0,0000037 0,000031 0,0000032	11600 140100 22800	16400 4700 10800	8,5	13,0	10,5	0,74	Hörig, Stamer, Siegler-Schmidt
Stejar	0,0001015 0,0000076 0,0000457	0,000076 0,00025 0,000128	0,0000087 0,00003 0,0000055	9900 130000 21900	13200 4000 7800	9,84	16,6	11,6	0,67	Hörig Stamer Sieglerschmidt

Scanned with OKEN Scanner

Frasin[1]	0,000122	0,0000731	0,0000032	8200	13700	11,8	17,7	9,2	0,68	Hörig Stamer
	0,00000621	0,000363	0,000045	161000	2800					
	0,0000651	0,000110	0,0000029	15400	9100					
Frasin[2]	0,000101	0,000114	0,00000425	9900	8800	17,4	24,7	14,0	0,80	Hearmon
	0,00000654	0,000392	0,0000395	152900	2500					
	0,0000598	0,000161	0,00000347	16700	6200					
Mahon	0,000204	0,000161	0,00000443	4900	6200	20,4	26,3	13,0	0,53	Hearmon
	0,00000791	0,000654	0,0000844	126400	1500					
	0,000101	0,000209	0,00000244	9900	4800					
Nuc	0,000156	0,000102	0,00000557	6400	9800	11,7	16,1	11,0	0,59	Hearmon
	0,00000876	0,000427	0,0000585	114200	2300					
	0,0000824	0,000140	0,00000429	12100	7100					
Duglas	0,000126	0,000111	0,00000279	8000	9000	17,8	17,8	12,0	0,48	Doyle, Drow, Mc Burney
	0,00000625	0,00111	0,0000427	160000	900					
	0,0000994	0,000111	0,00000190	10100	9000					
Molid	0,00250	0,000159	0,0000033	4000	6300	25,8	20,8	9,8	0,44	Hörig, Stamer
	0,00000616	0,0027	0,00006	162300	400					
	0,000143	0,000129	0,0000027	7000	7800					
Molidul sitka	0,000196	0,000131	0,00000395	5100	7600	15,6	16,2	12	0,39	Doyle, Drow, Mc Burney
	0,00000846	0,00252	0,000048	118300	400					
	0,000109	0,000136	0,00000315	9200	7300					
Pin	0,000172	0,0000563	0,0000027	5800	17800	9,3	24,4	9,7	0,54	Hörig, Stamer
	0,00000602	0,00148	0,000054	166100	700					
	0,000089	0,000146	0,0000028	11200	6800					

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 6.2

Valorile coeficienților contracției transversale

ν	SPECIA							
	Fag	Frasin	Stejar	Mesteacăn	Paltin	Pin	Molid	Douglas
$\nu_{LT} = \frac{s_{21}}{s_{11}}$	0,043	0,026	0,085	0,017	0,041	0,015	0,013	0,021
$\nu_{TR} = \frac{s_{13}}{s_{33}}$	0,710	0,700	0,660	0,720	0,760	0,060	0,420	0,600
$\nu_{RL} = \frac{s_{32}}{s_{22}}$	0,450	0,300	0,320	0,490	0,490	0,460	0,430	0,370
$\nu_{TL} = \frac{s_{31}}{s_{11}}$	0,520	0,520	0,500	0,440	0,470	0,440	0,530	0,380
$\nu_{RT} = \frac{s_{31}}{s_{11}}$	0,360	0,370	0,300	0,400	0,440	0,310	0,240	0,420
$\nu_{LR} = \frac{s_{23}}{s_{33}}$	0,073	0,045	0,120	0,033	0,071	0,031	0,019	0,029

Modulele de elasticitate cît și coeficienții contracției transversale ai lemnului sînt influențați de mai mulți factori ca : specia lemnului, unghiul dintre direcția fibrelor și direcția tensiunilor principale, densitatea, umiditatea, temperatura, defectele lemnului (nodurile, fibra torsionată) ș.a. [6, 38].

În lungul trunchiului unui arbore variația modulului de elasticitate E este mai pronunțată spre vîrful acestuia (fig. 6, *e*).

Unghiul φ dintre direcția fibrelor și direcția tensiunilor principale. Dată fiind structura anizotropă a lemnului, în fiecare direcție indicii proprietăților elastice se schimbă. Spre exemplu expresiile constantelor elastice s'_{ik}, față de un sistem de axe $L'R'T'$ $(x'y'z')$ rotit cu unghiul φ, în jurul axei $T(x)$, care rămîne fixă (fig. 6, *f*), sînt :

$$
\left.
\begin{aligned}
s'_{11} &= s_{11}\,; \\
s'_{22} &= s_{22}\cos^4\varphi + (2s_{23} + \\
&\quad + s_{44})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + s_{33}\sin^4\varphi\,; \\
s'_{33} &= s_{22}\sin^4\varphi + (2s_{23} + \\
&\quad + s_{44})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + s_{33}\cos^4\varphi\,; \\
s'_{21} &= s_{21}\cos^2\varphi + s_{31}\sin^2\varphi\,; \\
s'_{31} &= s_{21}\sin^2\varphi + s_{31}\cos^2\varphi\,; \\
s'_{23} &- (s_{22} + s_{33})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \\
&\quad + s_{23}(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) - \\
&\quad - s_{44}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,; \\
s'_{44} &= 4(s_{22} + s_{33} - \\
&\quad - 2s_{23})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + s_{44}(\cos^2\varphi - \\
&\quad - \sin^2\varphi)^2\,; \\
s'_{55} &= s_{55}\cos^2\varphi + s_{66}\sin^2\varphi\,; \\
s'_{66} &= s_{55}\sin^2\varphi + s_{66}\cos^2\varphi,
\end{aligned}
\right\} \quad (6.18)
$$

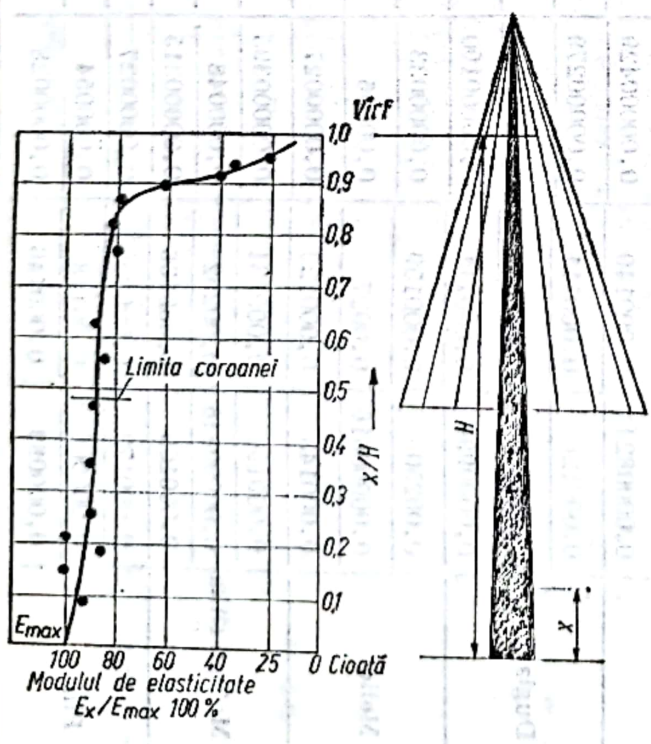


Fig. 6.e

În mod similar se pot obține expresiile indicilor elastici și după alte direcții. Pentru practică sînt utile valorile constantelor elastice și pentru $\varphi = 45°$:

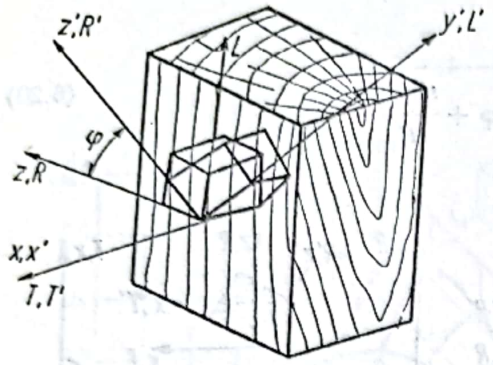


Fig. 6.f

$$\left.\begin{aligned} s_{22}^{*} &= s_{23}^{*} = \frac{1}{4}(s_{22}+s_{33}+2s_{23}+s_{44}); \\ s_{21}^{*} &= s_{31}^{*} = \frac{1}{2}(s_{21}+s_{31}); \\ s_{23}^{*} &= \frac{1}{4}(s_{22}+s_{33}+s_{23}-s_{44}); \\ s_{44}^{*} &= s_{22}+s_{33}-2s_{23}; \\ s_{55}^{*} &= s_{66}^{*} = \frac{1}{2}(s_{55}+s_{66}), \end{aligned}\right\} \qquad (6.19)$$

Variația coeficienților $s_{11} = 1/E_T$; $s_{12} = 1/E_L$ și $s_{33} = 1/E_R$ pentru lemnul de pin și fag în planurile TL, LR și RT sînt prezentate în figura 6,*g*. În figura 6,*h* se prezintă variația coeficienților $s_{44} = 1/G_{LR}$; $s_{55} = 1/G_{RT}$ și $s_{66} = 1/G_{TL}$ pentru lemnul de pin și fag în planurile TL, LR și RT.

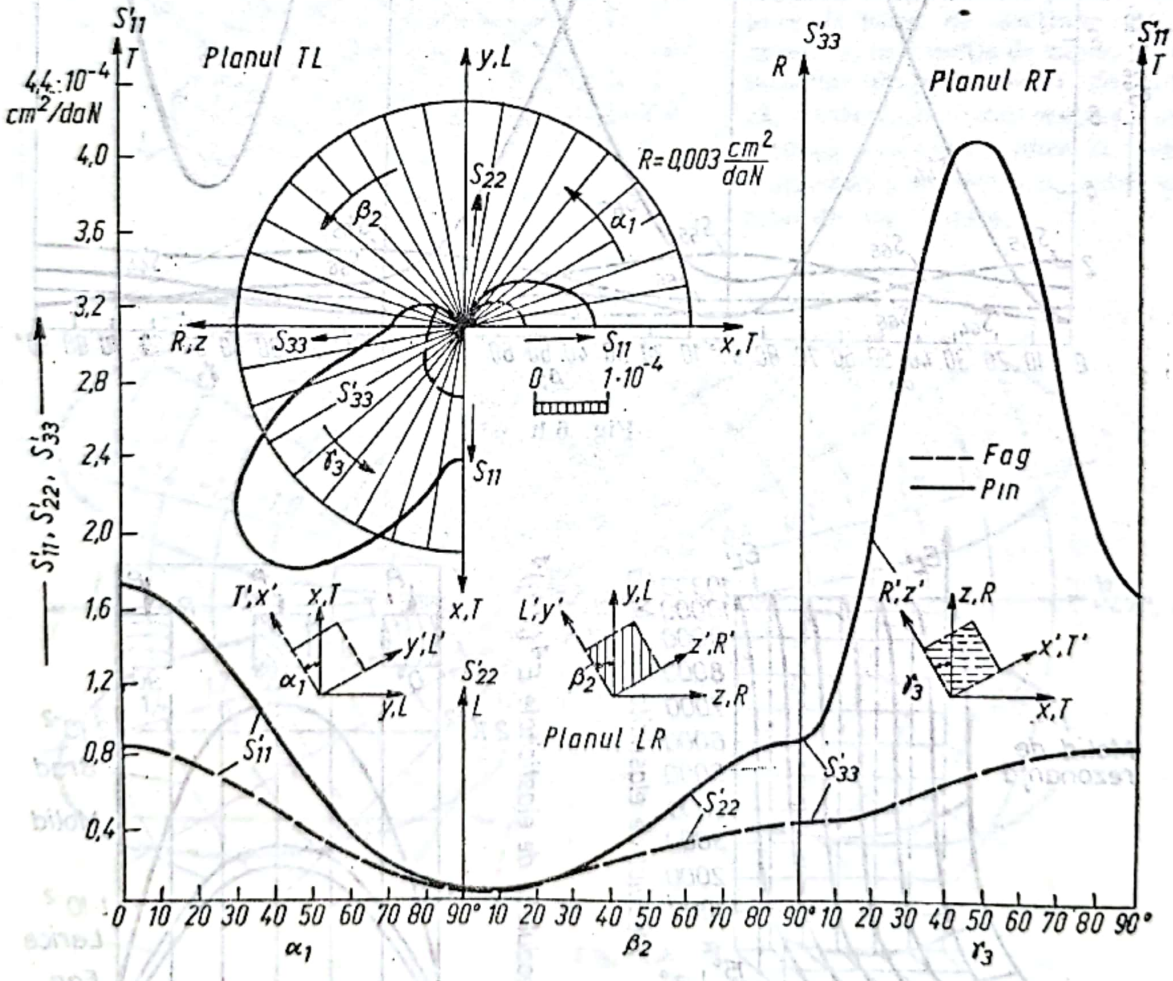


Fig. 6.g

Variația modulului de elasticitate E pentru molidul de rezonanță cu înclinarea fibrelor și inelelor anuale este prezentată în figura 6.*i*, iar în figurile 6, *j* și 6, *k* variația coeficienților ν și ξ. Variația inversului modulului de elasticitate E^{-1}, pentru diferite specii de lemn, în planul RT este redată în figura 6, *l*, 2.

Pe baza unor cercetări experimentale KEYLWERT [36] a stabilit următoarea relație pentru calculul modulului de elasticitate E_φ, după o direcție oarecare rotită cu unghiul φ față de axa L:

$$E_\varphi = \frac{1}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{E_{0°}} - \frac{\sin^2\varphi}{E_{90°}}\right)\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{E_{45°}}}. \qquad (6.20)$$

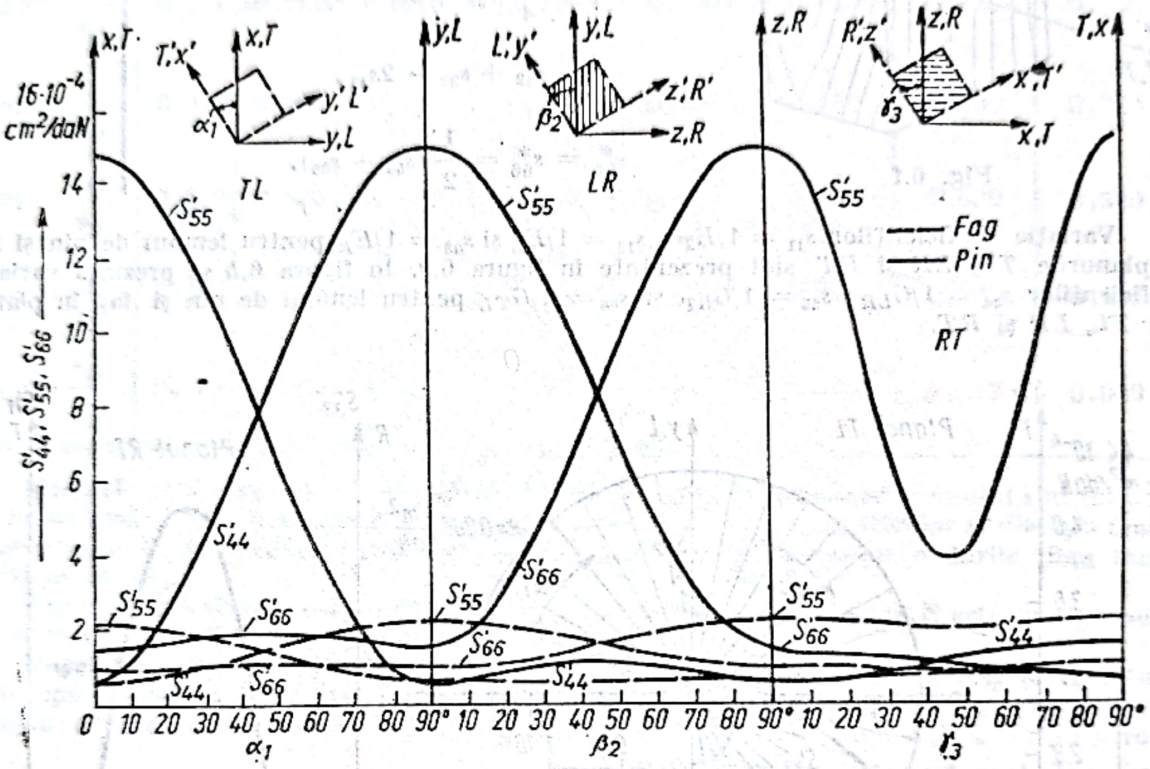


Fig. 6.h

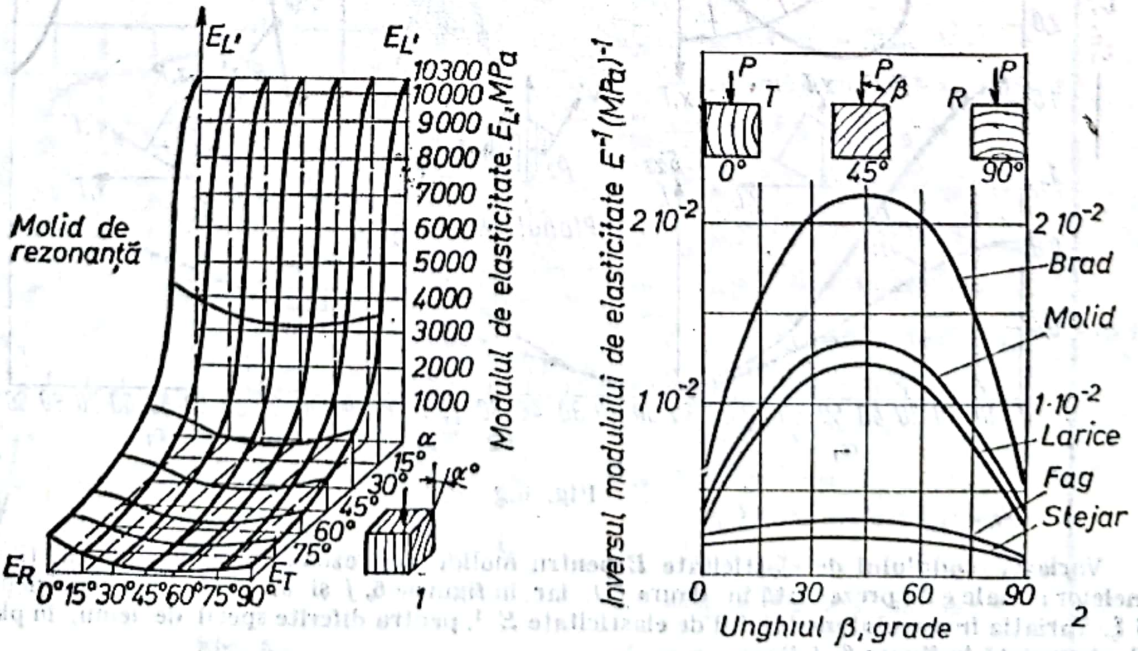


Fig. 6.i

În cazul solicitării de torsiune a barelor de secțiune circulară, datorită faptului că la deformația totală a acestora contribuie lunecările din două plane (fig. 6, *l*) expresiile modulelor de elasticitate transversală în direcția tangențială, longitudinală și respectiv radială sînt :

$$G_{tT} = \frac{2}{s'_{55} + s'_{66}}; \quad G_{tL} = \frac{2}{s'_{66} + s'_{44}}; \quad G_{tR} = \frac{2}{s'_{44} + s'_{55}}, \tag{6.21}$$

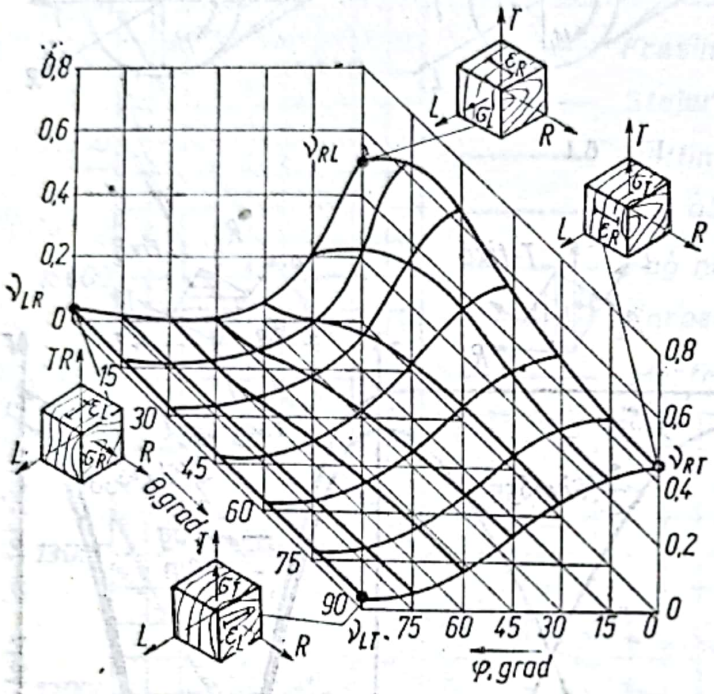


Fig. 6.j

În figura 6,*m* sînt redate curbele de variație a inverselor modulelor de elasticitate G_t la torsiune, pentru lemnul de fag și pin, în cele trei plane de simetrie elastică *TL*, *LR* și *RT*, cu unghiul dintre direcția fibrelor și direcția momentului de torsiune M_t. În tabelul 6.3 se dau valorile modulului de elasticitate G_t pentru cîteva specii de lemn des utilizate în practică.

Modulul de elasticitate G_t la torsiune, la barele de secțiune dreptunghiulară, este cu circa 15...25 % mai mare decît la barele de secțiune circulară. În figura 6, *n* se prezintă variația modulului de elasticitate la torsiune longitudinală pentru diferite bare de lemn de secțiune dreptunghiulară, în funcție de raportul *h*/*b* al laturilor dreptunghiului. Se observă că, creșterea înălțimii secțiunii pentru lățimea b = const., duce la creșterea elasticității, respectiv scăderea modulului de elasticitate.

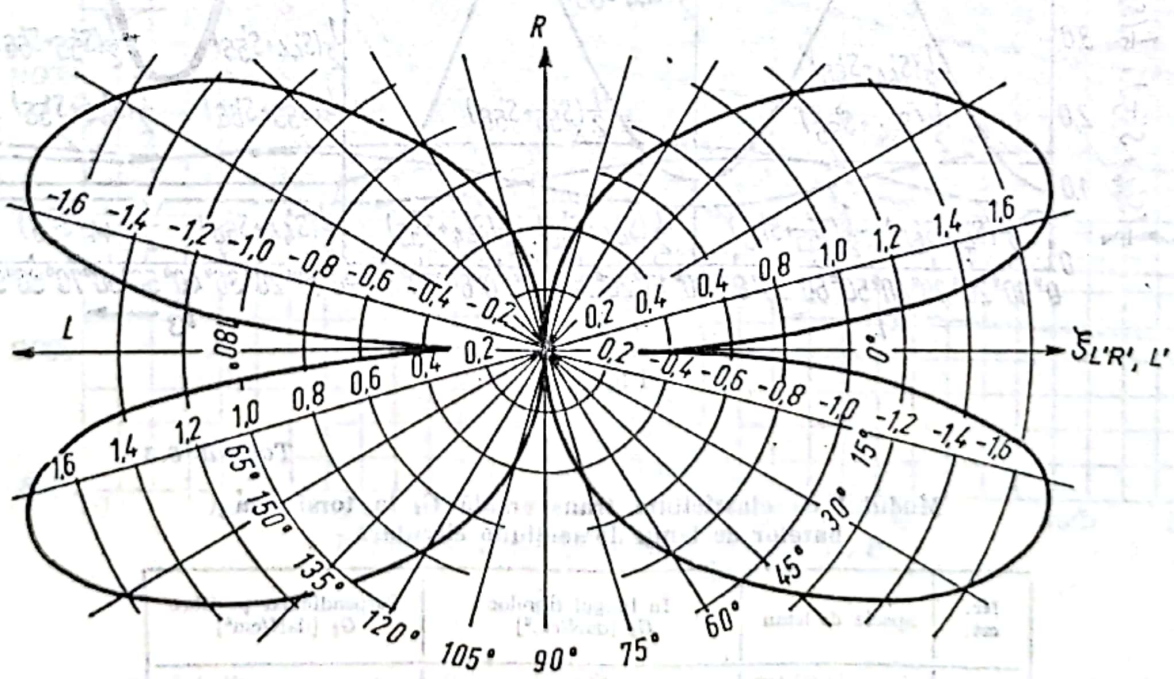


Fig. 6.k

De asemenea, între modulele de elasticitate longitudinale la încovoiere statică E_i, la compresiune și tracțiune paralelă cu fibrele E_c și respectiv E_t, există următoarele rapoarte (pentru umiditatea $U = 12...50$ %) :

— pentru lemnul tuturor speciilor :

$$E_i/E_c = 0{,}80 \ldots 0{,}90; \quad E_c/E_t = 0{,}90 \ldots 0{,}95;$$

Scanned with OKEN Scanner

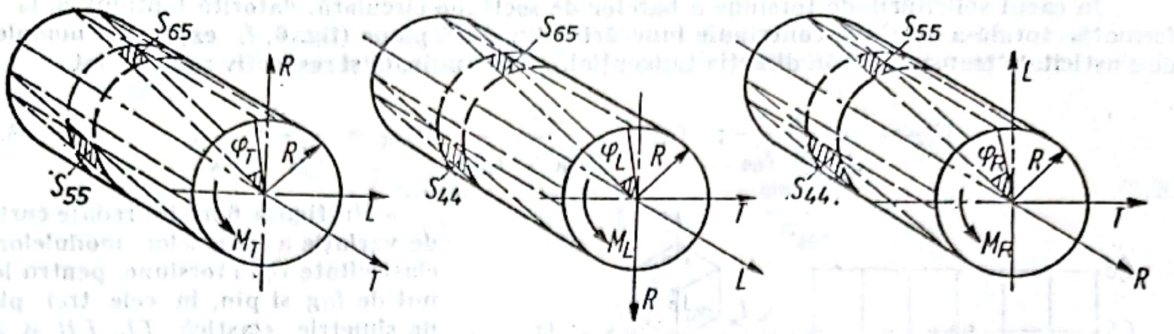


Fig. 6.1

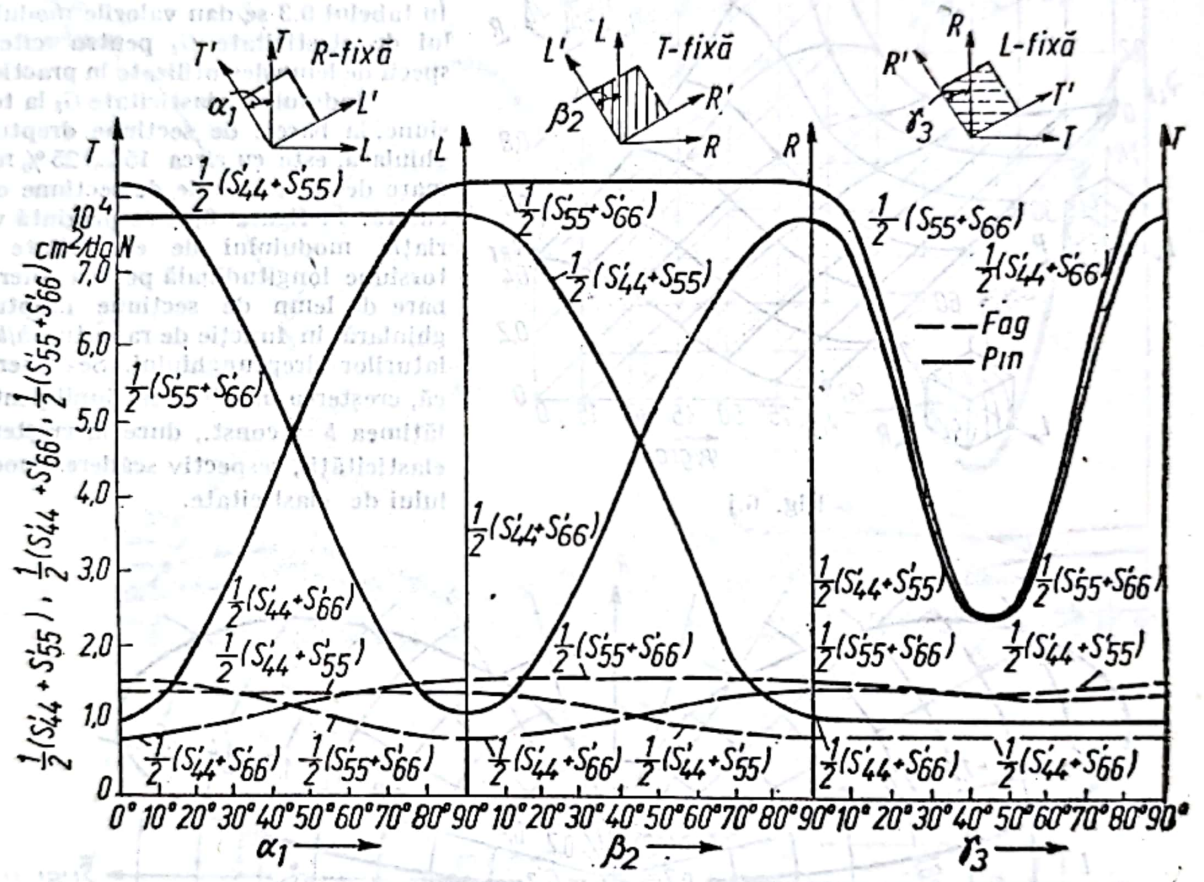


Fig. 6.m

Tabelul 6.3

Modulul de elasticitate transversală G_t la torsiunea barelor de lemn de secţiune circulară

Nr. crt.	Specia de lemn	În lungul fibrelor G_t [daN/cm²]	Perpendicular pe fibre G_t [daN/cm²]
1	Molid	5200...7900	600...1100
2	Brad	7500...9200	1300...2300
3	Pin	6600	1200...1500
4	Fag	7500...9200	1300...5400
5	Stejar	9100...10100	4000...5300
6	Frasin	11400...13900	300...7400
7	Mesteacăn	10100	3200

Scanned with OKEN Scanner

— pentru lemnul de rașinoase ;

$$E_t / E_t = 0{,}70 \ldots 0{,}80$$

— pentru lemnul de foioase :

$$E_t / E_t = 0{,}50 \ldots 0{,}70.$$

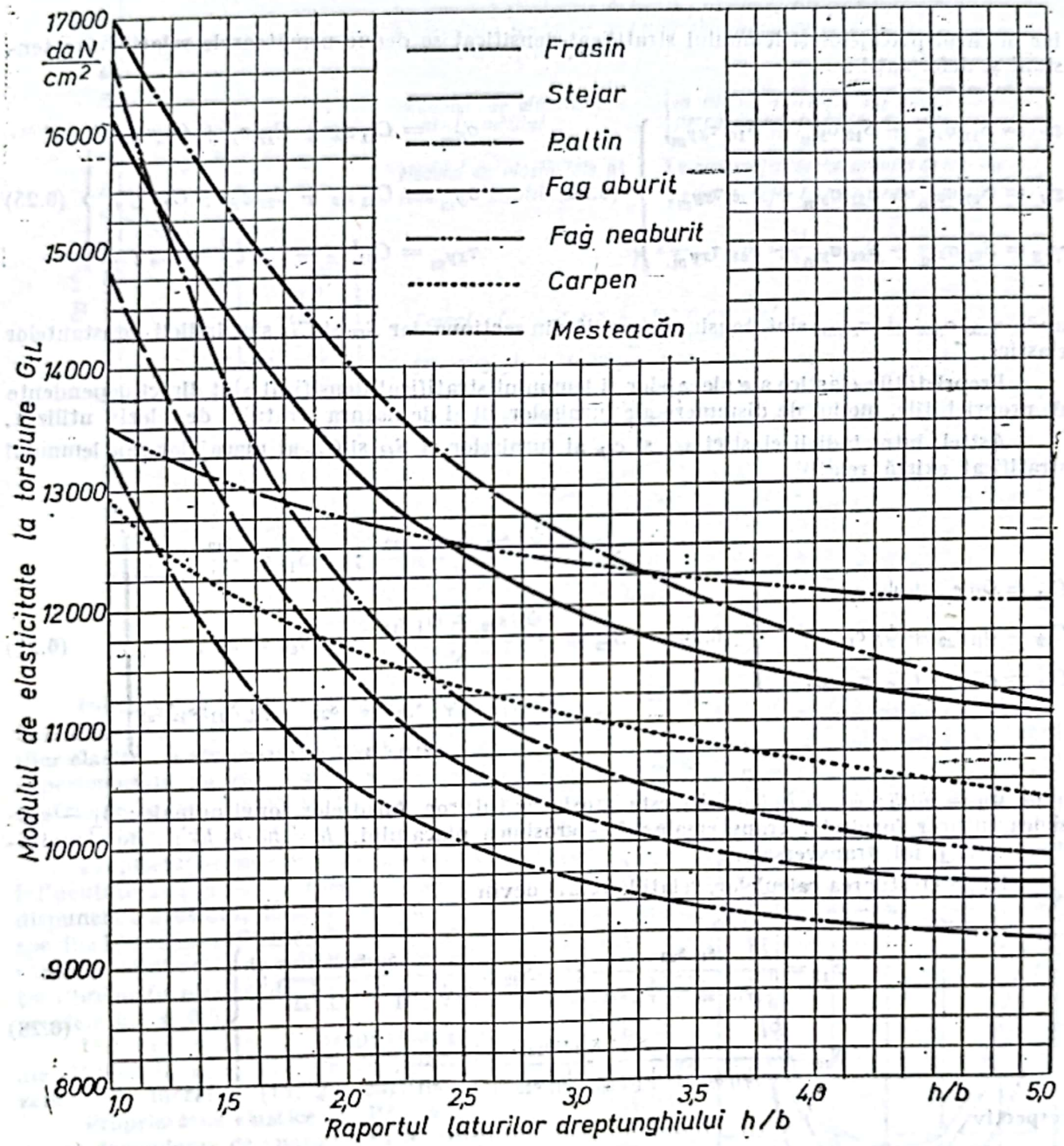


Fig. 6.n

Date de detaliu asupra modului cum influențează umiditatea, temperatura, densitatea și defectele lemnului proprietățile elastice ale lemnului sînt prezentate în [16, 36, 38, 50].

6.2. ELASTICITATEA MATERIALELOR PE BAZĂ DE LEMN

Furnirele, placajele și lemnul stratificat-densificat, datorită structurii lor se caracterizează printr-un grad de anizotropie mai mic decît al lemnului masiv, numărul constantelor elastice reducîndu-se de la nouă la cinci.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, în cazul furnirelor, relațiile dintre tensiuni și deformații devin :

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy}\\ \varepsilon_y &= s_{21}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy}\\ \gamma_{xy} &= s_{61}\sigma_x + s_{62}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \quad (6.22)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{16}\gamma_{xy}\\ \sigma_y &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{26}\gamma_{xy}\\ \tau_{xy} &= c_{61}\varepsilon_x + c_{62}\varepsilon_y + c_{66}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \quad (6.23)$$

iar în cazul placajelor și lemnului stratificat-densificat se deduc următoarele relații între tensiuni și deformații :

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= S_{11}\sigma_{x_m} + S_{12}\sigma_{y_m} + S_{16}\tau_{xy_m},\\ \varepsilon_y &= S_{21}\sigma_{x_m} + S_{22}\sigma_{y_m} + S_{26}\tau_{xy_m},\\ \gamma_{xy} &= S_{61}\sigma_{x_m} + S_{62}\sigma_{y_m} + S_{66}\tau_{xy_m}\end{aligned}\right\} \quad (6.24)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x_m} &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{16}\gamma_{xy},\\ \sigma_{y_m} &= C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{26}\gamma_{xy},\\ \tau_{xy_m} &= C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{66}\gamma_{xy}.\end{aligned}\right\} \quad (6.25)$$

unde σ_{xm} σ_{ym} și τ_{xym} sînt tensiunile medii din secțiune, iar S_{ik} și C_{ik} sînt indicii constantelor elastice.

Proprietățile elastice ale placajelor și lemnului stratificat-densificat sînt direct dependente de proprietățile, modul de dispunere ale furnirelor cît și de natura stratului de adeziv utilizat.

Astfel, între indicii elastici s_{ik} și c_{ik} ai furnirelor și S_{ik} și C_{ik} ai placajelor sau lemnului stratificat există relațiile

$$\left.\begin{aligned}C_{11} &= \psi_{||}\, c_{11} + \psi_L\, c_{22},\\ C_{22} &= \psi_{||}\, c_{22} + \psi_L\, c_{11},\\ C_{12} &= c_{12}\,; \quad C_{66} = c_{66}.\end{aligned}\right\} \quad (6.26)$$

$$\left.\begin{aligned}S_{11} &= \frac{\psi_{||}\, s_{11} + \psi_{\perp}\, s_{22}}{N}\,; \quad S_{12} = \frac{s_{12}}{N}\,;\\ S_{22} &= \frac{\psi_{||}\, s_{22} + \psi_{\perp}\, s_{11}}{N}\,; \quad S_{66} = s_{66}\,;\\ N &= \frac{(\psi_{||}\, s_{11} + \psi_{\perp}\, s_{22})(\psi_{||}\, s_{22} + \psi_{\perp}\, S_{11})\, s_{12}\, s_{21}}{s_{121}\, s_{22} - s_{12}\, s_{21}},\end{aligned}\right\} \quad (6.27)$$

unde $\psi_{||} = h_{||}/h$; $\psi_{\perp} = h_{\perp}/h_{||}$; $h_{||}$ este grosimea tuturor furnirelor longitudinale ; $h_{\perp}$ — grosimea tuturor furnirelor transversale ; h — grosimea placajului ; $h = h_{||} + h_{\perp}$; || foi longitudinale și ⊥ foi transversale.

După efectuarea calculelor, relațiile (6.27) devin :

$$\left.\begin{aligned}S_{11} &= \frac{s_{11}\, s_{22}}{\psi_{||}\, s_{22} + \psi_{\perp}\, s_{11}}\,; \quad S_{22} = \frac{s_{11}\, s_{22}}{\psi_{||}\, s_{11} + \psi_{\perp}\, s_{22}}\,;\\ S_{12} &= \frac{s_{11}\cdot s_{22}\cdot s_{12}}{(\psi_{||}\, s_{11} + \psi_{\perp}\, s_{22})(\psi_{||}\, s_{22} + \psi_{\perp}\, s_{11})},\end{aligned}\right\} \quad (6.28)$$

respectiv

$$\left.\begin{aligned}E_{11} &= \psi_{||}\, e_{11} + \psi_{\perp}\, e_{22}\\ E_{22} &= \psi_{||}\, e_{22} + \psi_{\perp}\, e_{11}\end{aligned}\right\} \quad (6.29)$$

unde $E_{11} = 1/S_{11}$ = modulul de elasticitate longitudinală în direcția perpendiculară pe direcția fibrelor furnirului de față ;

$E_{22} = 1/S_{22}$ = modulul de elasticitate longitudinală în direcția paralelă cu direcția fibrelor furnirului de față ;

$e_{11} = 1/s_{11}$ = modulul de elasticitate al furnirelor în direcție perpendiculară pe direcția fibrelor ;

Scanned with OKEN Scanner

$e_2 = 1/s_{22}$ = modulul de elasticitate al furnirelor în direcția paralelă cu direcția fibrelor.

Determinarea ușoară și rapidă a modulelor de elasticitate E_{11} și E_{22} ale placajelor sau lemnului stratificat-densificat se poate face cu ajutorul nomogramei din figura 6, *o*.

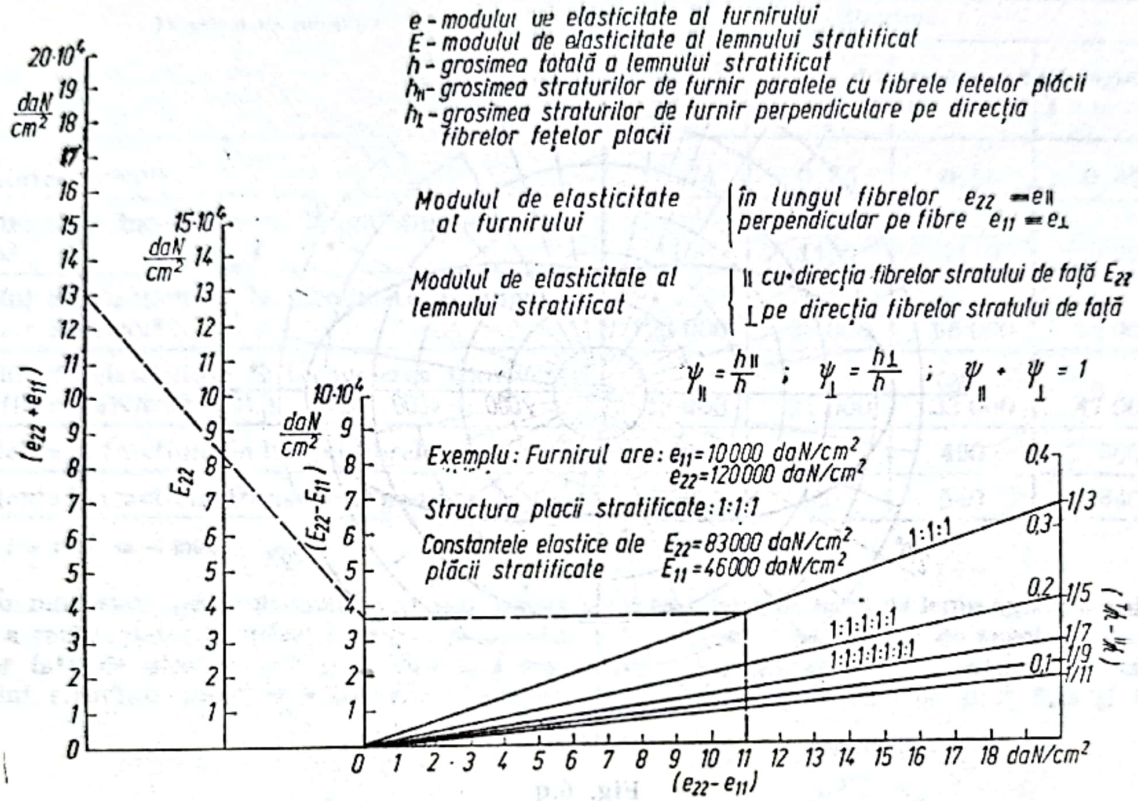


Fig. 6.o

Relațiile (6.24)...(6.29) au fost deduse fără a ține seama de influența, asupra proprietăților elastice, a straturilor de adeziv. Cercetările experimentale au dovedit că stratul de adeziv contribuie la îmbunătățirea indicilor proprietăților elastice ale placajului.

Proprietățile elastice ale placajelor sînt influențate de : grosimea furnirelor și modul de dispunere a acestora, de structura placajului, de speciile lemnoase utilizate, de natura adezivului utilizat, de direcția de solicitare față de direcția fibrelor furnirelor de bază etc. (fig. 6, *p* și tabelele 6.4 și 6.5).

Date referitoare la proprietățile elastice ale plăcilor din așchii și fibre de lemn sînt prezentate în lucrările [18, 23, 25)].

Proprietățile elastice ale PAL și PFL sînt direct dependente de : parametrii tehnologici ai procesului de fabricație ; adezivul folosit, densitate ; grosimea plăcii etc. (fig. 6, *q*).

Principalele caracteristici ale proprietăților elastice ale PAL și PFL produse în România sînt [12, 49] :

— PAL de grosimea mică sînt mai elastice în direcția longitudinală și mai rigide în direcție transversală ;

— densitatea influențează într-o măsură considerabilă mărimea modulului de elasticitate *E* la PAL și mai puțin la PFL ;

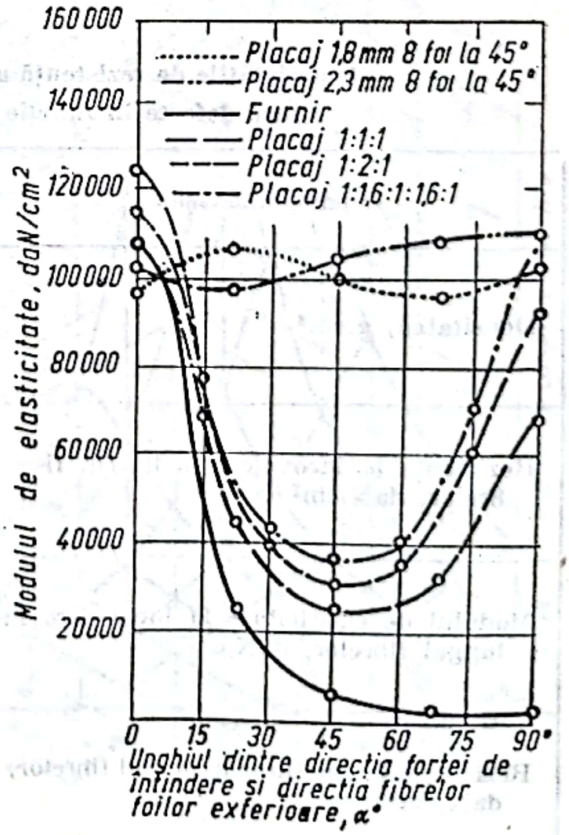


Fig. 6.p

— coeficienții construcției transversale cresc în cazul PFL, cu creșterea grosimii și densității iar în cazul PAL scad ;

— modulul de elasticitate G_{LT} are valori de 1,2,...1,6 ori mai mari în cazul PAL și PFL comparativ cu lemnul masiv etc.

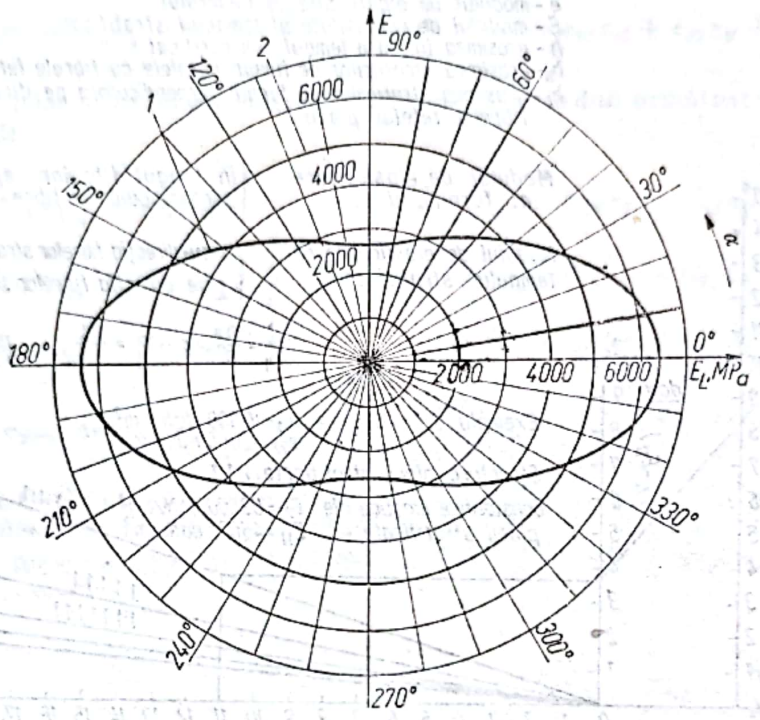


Fig. 6.q

Tabelul 6.4

Proprietățile de rezistență ale placajelor de exterior din furnire fără defecte în funcție de specie și numărul de straturi

Proprietatea mecanică	Nr. de straturi	Specia			
		fag	pin	molid	plop
Densitatea, g/cm³	3	0,73	0,62	0,45	0,50
	5	0,72	0,55	0,57	0,53
	7	0,72	0,62	0,55	0,51
Rezistența la încovoiere în lungul fibrelor, daN/cm²	3	980	670	730	590
	5	770	610	650	490
	7	830	630	620	480
Modulul de elasticitate la încovoiere în lungul fibrelor, daN/cm²	3	136 000	141 000	140 000	123 000
	5	121 000	109 000	137 000	99 000
	7	138 000	111 000	119 000	84 000
Rezistența la tracțiune în lungul fibrelor, daN/cm²	3	690	560	530	520
	5	610	390	500	490
	7	600	430	410	380

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 6.5

Proprietăţile placajelor de uz general din 3 straturi

Proprietăţile mecanice	Grosimea mm											
	3			4			5			6		
	Structura											
	1,2–1,2–1,2			1,2–2,0–1,2			1,2–3,0–1,2			1,2–4,0–1,2		
	f	f	f	f	m	f	f	m	f	f	m	f
Densitatea, g/cm³	0,74			0,66			0,65			0,62		
Rezistenţa la încovoiere în lungul fibrelor, daN/cm²	1150			1130			1110			920		
Modulul de elasticitate la încovoiere în lungul fibrelor daN/cm²	120 000			96 000			96 000			94 000		
Modulul de elasticitate la încovoierea transversal pe fibre daN/cm²	13 000			21 000			33 000			47 000		
Rezistenţa la tracţiune în lungul fibrelor daN/cm²	920			730			490			500		
Rezistenţa la tracţiune transversal pe fibre daN/cm²	560			430			540			640		

f — faţă; m — miez.

În mod asemănător în cazul lemnului masiv şi materialelor pe bază de lemn există o anizotropie a rezistenţelor la diferite solicitări, a căror mărime este determinată de specie, direcţia fibrelor faţă de direcţia efortului de solicitare, densitate, umiditate, temperatură, defectele lemnului, structura diferitelor materiale (placaje, PAL, PFL,.) : În figurile 6, *r*, 6, *s* şi 6, *t*

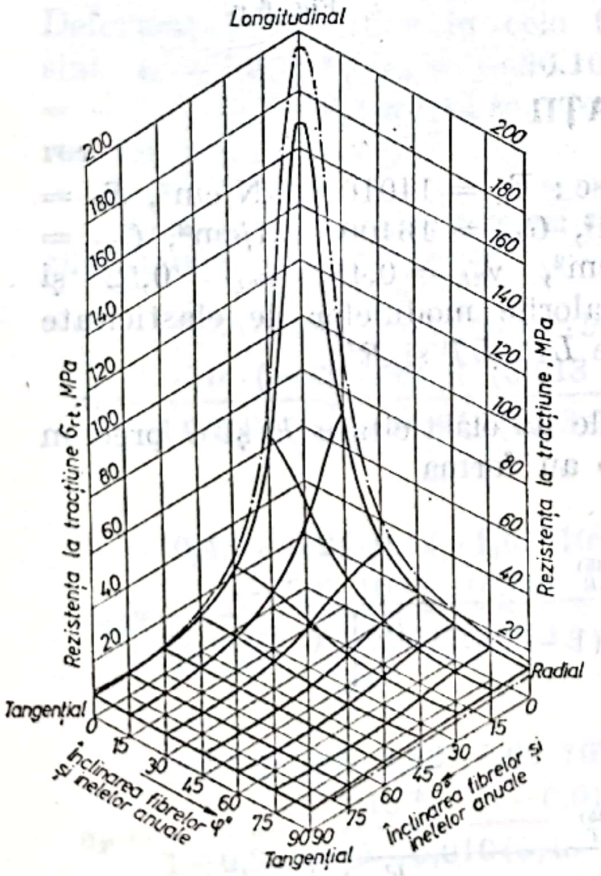


Fig.6.r

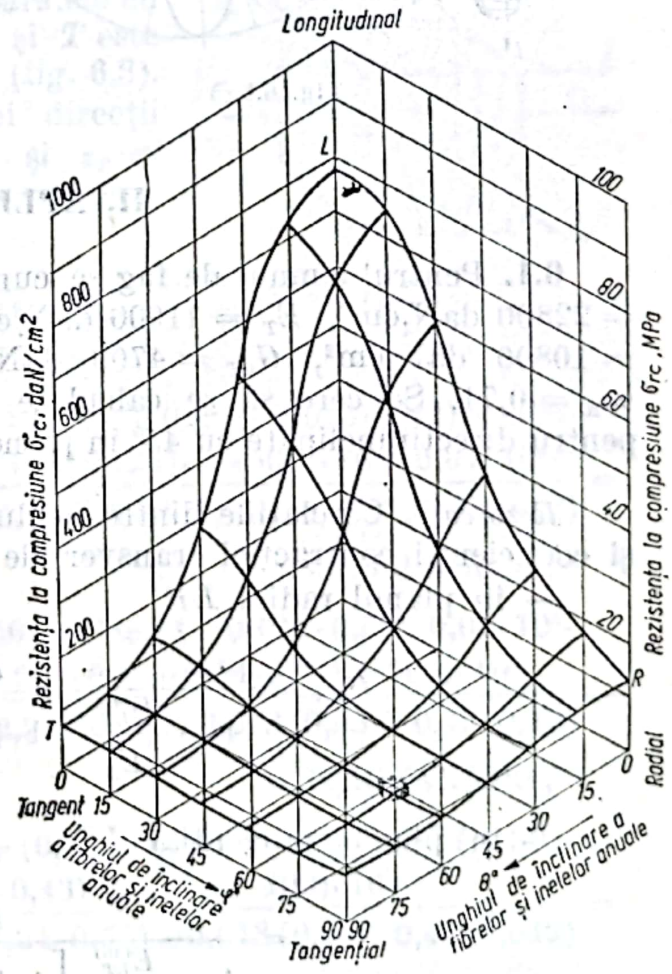


Fig.6.s

sînt prezentate sugestiv, spre exemplificare curbele de variaţie ale rezistenţelor la tracţiune şi compresiune ale lemnului masiv în planele LR, LR şi TR (curba întreruptă din figura 6, r redă limita de 95 % veridicitate a valorilor prezentate). Variaţia rezistenţelor placajelor bachelitizate şi de aviaţie la solicitările de tracţiune, compresiune şi forfecare sînt prezentate în figura 6, u [16, 36, 38, 40, 50].

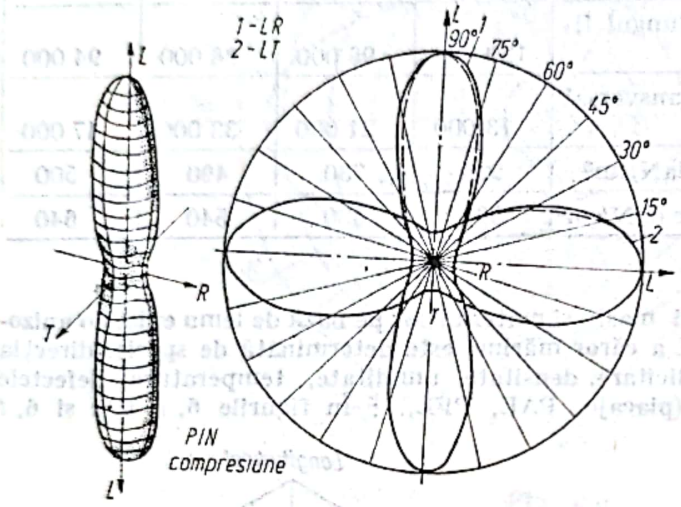


Fig. 6.t

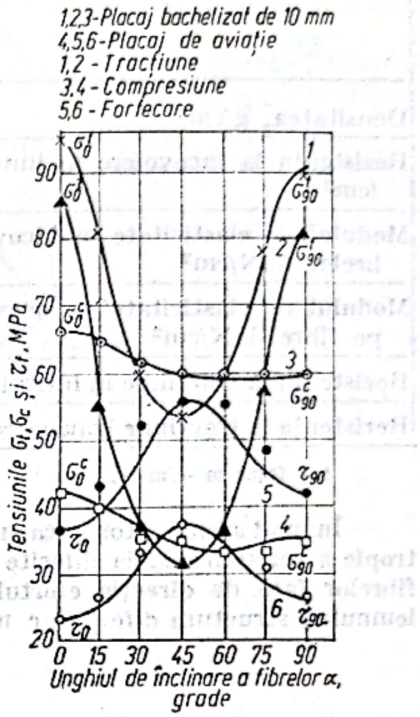


Fig. 6.u

II. APLICAŢII

6.1. Pentru lemnul de fag se cunosc : $E_L = 140100$ daN/cm², $E_R = 22800$ daN/cm², $E_T = 11600$ daN/cm², $G_{LR} = 16400$ daN/cm², $G_{LT} = 10800$ daN/cm², $G_{RT} = 4700$ daN/cm², $\nu_{RL} = 0{,}45$, $\nu_{TL} = 0{,}52$ şi $\nu_{TR} = 0{,}71$. Se cere să se calculeze valorile modulelor de elasticitate pentru direcţii înclinate cu 45° în planele LR, LT şi RT.

Rezolvare. Corelaţiile dintre modulele de elasticitate E şi G precum şi coeficienţii contracţiei transversale ν au forma

— în planul radial LR

$$G_{LR} = \frac{E_{LR}^{(45)}}{4 - \frac{E_{LT}^{(45)}}{E_R}\left[1 + (1 - 2\nu_{LR})\frac{E_R}{E_L}\right]};$$

— în planul tangenţial LT

$$G_{LT} = \frac{E_{LT}^{(45)}}{4 - \frac{E_{LT}^{(45)}}{E_T}\left[1 + (1 - 2\nu_{TL})\frac{E_T}{E_L}\right]};$$

— în planul transversal RT (perpendicular pe fibre)

$$G_{RT} = \frac{E_{RT}^{(45)}}{4 - \frac{E_{RT}^{(45)}}{E_T}\left[1 + (1 - 2\nu_{TR})\frac{E_T}{E_R}\right]}.$$

După înlocuiri şi efectuarea calculelor se obţin următoarele valori pentru modulele de elasticitate în direcţie înclinată cu 45°, respectiv

$E_{LR}^{(45)} = 37897$ daN/cm²; $E_{LT}^{(45)} = 14257$ daN/cm²; $E_{RT}^{(45)} = 22407$ daN/cm².

6.2. O piesă de fag este solicitată în lungul fibrelor cu tensiunea $\sigma_L = 100$ daN/cm². Se cere să se calculeze variaţia de volum a piesei.

Rezolvare. Deformaţia specifică a volumului este

$$\varepsilon_v = \sigma / E_V,$$

unde $E_v = E_L/(1 - \nu_{RL} - \nu_{TL}) = 140\,100/(1 - 0{,}45 - 0{,}52) = 4{,}67 \cdot 10^6$ daN/cm². Cu această valoare deformaţia specifică a volumului este

$$\varepsilon_v = \frac{100}{4{,}67 \cdot 10^6} = 2{,}1413 \cdot 10^{-5}.$$

6.3. Un cub confecţionat din lemn de molid astfel încît muchiile să fie paralele cu direcţiile de simetrie elastică L, R şi T este solicitat de tensiunile σ_L, σ_R şi σ_T (fig. 6.3). Deformaţiile specifice în cele trei direcţii sînt $\varepsilon_L = 50.10^{-5}$, $\varepsilon_R = -30.10^{-5}$ şi $\varepsilon_T = -500 \cdot 10^{-5}$. Se cere să se calculeze valoarea tensiunilor.

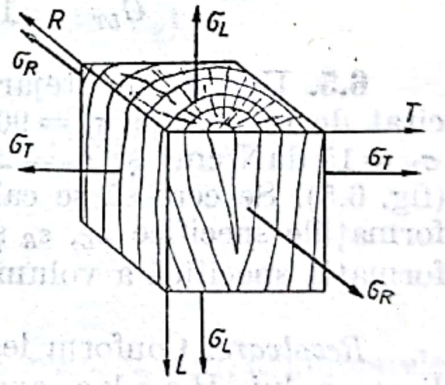


Fig. 6.3

Rezolvare. Conform relaţiei (6.11) expresiile tensiunilor sînt:

$$\sigma_L = \frac{(1-0{,}24\cdot 0{,}42)\cdot 1{,}62\cdot 10^5\cdot 50\cdot 10^{-5} + (0{,}019 + 0{,}013\cdot 0{,}42)\cdot 0{,}07\cdot 10^5\cdot(-30)\cdot 10^{-5} + (0{,}013 + 0{,}43\cdot 0{,}24)\cdot(-500)\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}04\cdot 10^5}{1-0{,}24\cdot 0{,}42-0{,}019\,(0{,}43+0{,}24\cdot 0{,}53)-0{,}013\,(0{,}53+0{,}43\cdot 0{,}42)} =$$

$$= 85{,}14 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_R = \frac{(0{,}43+0{,}24\cdot 0{,}53)\cdot 1{,}62\cdot 10^5\cdot 50\cdot 10^{-5} + (1-0{,}013\cdot 0{,}53)\cdot 0{,}07\cdot 10^5\cdot(-30)\cdot 10^{-5} + (0{,}024 + 0{,}013\cdot 0{,}43)\cdot 0{,}04\cdot 10^5\cdot(-500)\cdot 10^5}{1-0{,}24\cdot 0{,}42-0{,}019\,(0{,}43+0{,}24\cdot 0{,}53)-0{,}013\,(0{,}53+0{,}43\cdot 0{,}42)} =$$

$$= 38{,}13 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_T = \frac{(0{,}53+0{,}43\cdot 0{,}42)\cdot 1{,}62\cdot 10^5 + (0{,}42+0{,}019\cdot 0{,}53)\cdot 7\cdot 10^3\cdot(-30)\cdot 10^{-5} + (1-0{,}019\cdot 0{,}43)\cdot 4\cdot 10^3\cdot(-400)\cdot 10^5}{1-0{,}24\cdot 0{,}42-0{,}019\,(0{,}43+0{,}24\cdot 0{,}53)-0{,}013\,(0{,}53+0{,}43\cdot 0{,}042)} =$$

$$= 41{,}87 \text{ daN/cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

În relaţiile de mai sus s-au înlocuit: $E_L = 1{,}62 \cdot 10^5$ daN/cm², $E_R = 0{,}07 \cdot 10^5$ daN/cm², $E_T = 0{,}04 \cdot 10^5$ daN/cm², $\nu_{LT} = 0{,}013$; $\nu_{TL} = 0{,}53$, $\nu_{TR} = 0{,}42$; $\nu_{RT} = 0.24$; $\nu_{LR} = 0{,}019$ şi $\nu_{RL} = 0{,}43$.

6.4. Pe feţele unui cub de lemn de fag se dezvoltă tensiunile $\tau_{TR} = 3$ daN/cm², $\tau_{LT} = 8$ daN/cm² şi $\tau_{RL} = 16$ daN/cm² (fig. 6.4). Cunoscînd valorile modulelor de elasticitate transversală $G_{LR} = 16\,400$ daN/cm², $G_{RT} = 4\,700$ daN/cm² şi $G_{TL} = 10\,800$ daN/cm² se cere să se calculeze valoarea lunecărilor specifice.

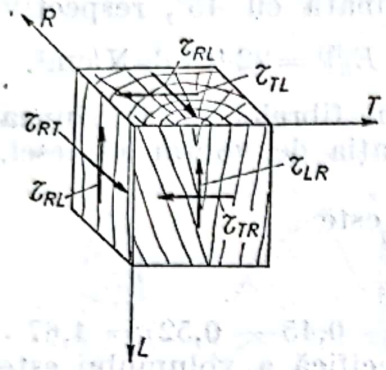


Fig. 6.4

Rezolvare. Lunecările specifice sînt:

$$\gamma_{TR} = \frac{\tau_{TR}}{G_{TR}} = \frac{3}{4\,700} = 6{,}3829 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0{,}03657°;$$

$$\gamma_{RL} = \frac{\tau_{RL}}{G_{RL}} = \frac{16}{16\,400} = 9{,}756 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0{,}05589°;$$

$$\gamma_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}} = \frac{8}{10\,800} = 7{,}407 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0{,}04244°.$$

6.5. Un cub de stejar este solicitat de tensiunile $\sigma_L = 90$ daN/cm², $\sigma_R = 15$ daN/cm² şi $\sigma_T = 20$ daN/cm² (fig. 6.5). Se cere să se calculeze deformaţiile specifice ε_L, ε_R şi ε_T şi deformaţia specifică a volumului ε_V.

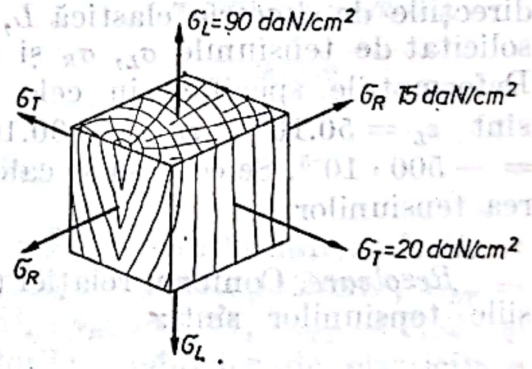


Fig. 6.5

Rezolvare. Conform legii generalizate a lui Hooke expresiile deformaţiilor specifice după cele trei direcţii sînt:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{130\,000}(90 - 0{,}12 \cdot 15 - 0{,}085 \cdot 20) = 66{,}5 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_R = \frac{1}{21\,900}(15 - 0{,}32 \cdot 90 - 0{,}30 \cdot 20) = -90{,}4 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_T = \frac{1}{9\,900}(20 - 0{,}5 \cdot 90 - 0{,}66 \cdot 15) = -352{,}5 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_L + \varepsilon_R + \varepsilon_T = -376 \cdot 10^{-5}.$$

În relaţiile de mai sus s-au înlocuit: $E_L = 1{,}3 \cdot 10^5$ daN/cm²; $E_R = 0{,}219 \cdot 10^5$ daN/cm²; $E_T = 0{,}099 \cdot 10^5$ daN/cm²; $\nu_{LT} = 0{,}085$; $\nu_{TR} = 0{,}66$; $\nu_{RL} = 0{,}32$; $\nu_{TL} = 0{,}5$; $\nu_{RT} = 0{,}3$ şi $\nu_{LR} = 0{,}12$.

Scanned with OKEN Scanner

6.6. O piesă sub formă de cub cu latura $a = 10$ cm confecționată din lemn de fag este introdusă într-un lăcaș cubic executat într-un bloc foarte rigid de oțel. Latura lăcașului este de 10 cm (fig. 6.6). Piesa de lemn este comprimată în vederea densificării cu o forță $P = 80$ kN ce acționează în direcție longitudinală. Se cere să se calculeze mărimea tensiunilor ce iau naștere în direcția radială și tangențială precum și scurtarea piesei în direcție longitudinală.

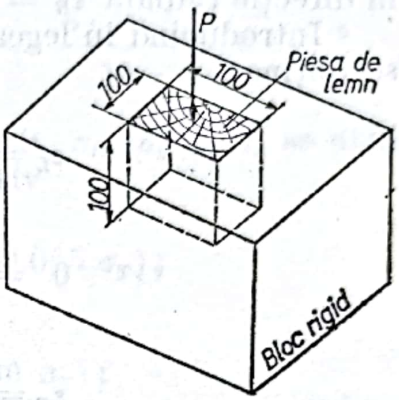


Fig. 6.6

Rezolvare. Ca urmare a comprimării piesei cu forța $P = 80$ kN $= 8\,000$ daN în direcție longitudinală apare tensiunea

$$\sigma_L = -P/A = -8000/10 \cdot 10 = -80 \text{ daN/cm}^2.$$

Pereții locașului fiind foarte rigizi în direcție tangențială și radială deformațiile specifice sînt nule, respectiv

$$\varepsilon_R = \varepsilon_L = 0.$$

Înlocuind aceste date în legea generalizată a lui Hooke se obține

$$\varepsilon_L = \frac{1}{140\,000}(-80 - 0{,}073\,\sigma_R - 0{,}043\,\sigma_T);$$

$$0 = \frac{1}{22\,000}(\sigma_R + 0{,}45 \cdot 80 - 0{,}36 \cdot \sigma_T);$$

$$0 = \frac{1}{11\,000}(\sigma_T = 0{,}52 \cdot 80 - 0{,}71\,\sigma_R).$$

În relațiile de mai sus s-au înlocuit pentru lemnul de fag, următoarele valori : $E_L = 140\,000$ daN/cm²; $E_T = 11\,000$ daN/cm²; $E_R = 22\,000$ daN/cm²; $\nu_{LR} = 0{,}073$; $\nu_{LT} = 0{,}043$; $\nu_{RL} = 0{,}45$; $\nu_{TL} = 0{,}52$: $\nu_{TR} = 0{,}36$ și $\nu_{TR} = 0{,}71$.

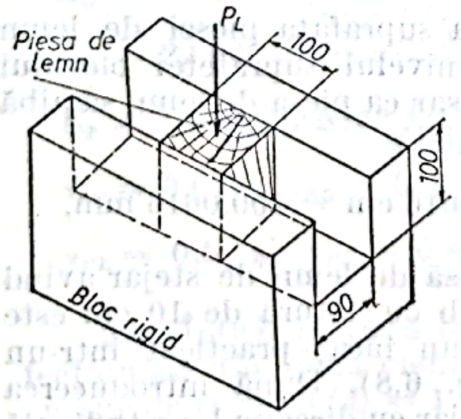


Fig. 6.7

După efectuarea calculelor se obține

$$\sigma_R = -68{,}48 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_T = -90{,}22 \text{ daN/cm}^2$$

și $E_L = -5{,}08 \cdot 10^{-4}$.

Scurtarea ΔL a piesei va fi

$$\Delta L = \varepsilon_L h = -5{,}08 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = -50{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

6.7. O piesă de lemn de frasin este introdusă într-un canal practicat într-un bloc metalic nedeformabil (fig. 6.7). Piesa are secțiunea 10.9 cm². Adîncimea canalului este de 10 cm. Asupra piesei de lemn acționează o forță $P_L = 90$ kN. Se cere să se calculeze tensiunile σ_L, σ_R și σ_T precum și deformațiile specifice ε_L, ε_R și ε_T. Care trebuie să fie înălțimea L a piesei de lemn ca după ce acționează forța P suprafața superioară a piesei să fie la nivelul blocului metalic.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Piesa de frasin introdusă în canalul cu pereţii rigizi este solicitată în direcţie longitudinală de tensiunea

$$\sigma_L = -\frac{P_L}{A} = -\frac{9\,000}{10 \cdot 9} = -100 \text{ daN/cm}^2,$$

în direcţie radială $\varepsilon_R = 0$ iar în direcţie tangenţială (fiind liberă) $\sigma_T = 0$.

Introducînd în legea generalizată a lui H o o k e mărimile cunoscute se obţine

$$\varepsilon_L = \frac{1}{160\,000}(-100 - 0{,}045\ \sigma_R);$$

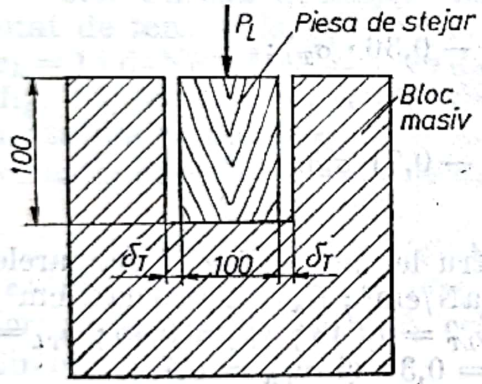
$$0 = \frac{1}{16\,000}(\sigma_R + 0{,}3 \cdot 100);$$

$$\varepsilon_T = \frac{1}{8\,000}(100 \cdot 0{,}52 - 0{,}7 \cdot \sigma_R),$$

se obţine un sistem cu necunoscutele ε_L, σ_R şi ε_T.

După rezolvare se obţine :

$$\sigma_R = -30 \text{ daN/cm}^2; \quad \varepsilon_L = -6{,}16 \cdot 10^{-4} \text{ şi } \varepsilon_T = 91{,}25 \cdot 10^{-4}.$$



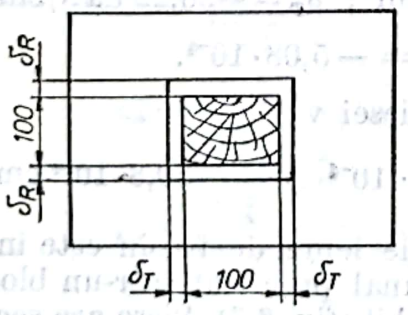


Fig. 6.8

În relaţiile de mai sus s-a înlocuit pentru lemnul de frasin : $E_L = 160\,000$ daN/cm^2; $E_R = 16\,000$ daN/cm^2; $E_T = 8\,000$ daN/cm^2; $\nu_{LR} = 0{,}045$; $\nu_{LT} = 0{,}26$; $\nu_{RL} = 0{,}30$; $\nu_{RT} = 0{,}37$; $\nu_{TL} = 0{,}52$ şi $\nu_{TR} = 0{,}70$.

Deformaţia ΔL este

$$\Delta L = \varepsilon_L h_L = -6{,}16 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = -6{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$

Deci pentru ca suprafaţa piesei de lemn să ajungă la nivelul suprafeţei blocului rigid este necesar ca piesa de lemn să aibă o înălţime iniţială

$$h_{L0} = 10{,}00616 \text{ cm} = 100{,}0616 \text{ mm}.$$

6.8. O piesă de lemn de stejar avînd forma unui cub cu latura de 10 cm este introdusă într-un lăcaş practicat într-un bloc rigid (fig. 6.8). După introducerea lemnului de stejar cu direcţia longitudinală verticală, se constată că între feţele lui şi pereţi rămîne un intrefier $2\delta_T = 6 \cdot 10^{-2}$ cm în direcţie tangenţială şi $2\delta_R = 2 \cdot 10^{-3}$ cm în direcţie radială. Piesa de lemn este comprimată cu forţa $P_L = 100$ kN. Se cere să se calculeze tensiunile σ_L, σ_R şi σ_T precum şi deformaţiile specifice ε_L, ε_R şi ε_T.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Datorită forţei P_L în direcţie longitudinală apare tensiunea

$$\sigma_L = -P_L/A = -10\,000/100 = -100 \text{ daN/cm}^2.$$

Ca urmare a intrefierului în direcţie radială şi tangenţială deformaţiile specifice vor fi :

$$\varepsilon_R = \frac{2\delta_R}{10} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ şi } \varepsilon_T = \frac{2\delta_T}{10} = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{10} = 6 \cdot 10^{-3}.$$

Pentru a determina celelalte mărimi, respectiv σ_R, σ_T şi σ_L se utilizează legea generalizată a lui H o o k e, respectiv

$$\varepsilon_L = \frac{1}{130\,000}(-100 - 0{,}12\,\sigma_R - 0{,}085\,\sigma_T);$$

$$2 \cdot 10^{-4} = \frac{2}{22000}(\sigma_R + 0{,}32 \cdot 100 - 0{,}30\,\sigma_T);$$

$$6 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{10\,000}(\sigma_T + 0{,}5 \cdot 100 - 0{,}66\,\sigma_R).$$

După rezolvarea sistemului de mai sus se obţine

$$\sigma_R = -50{,}87 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_T = -77{,}57 \text{ daN/cm}^2$$

şi $\varepsilon_L = -6{,}715 \cdot 10^{-4}$.

În relaţiile anterioare s-au înlocuit pentru piesa de stejar :

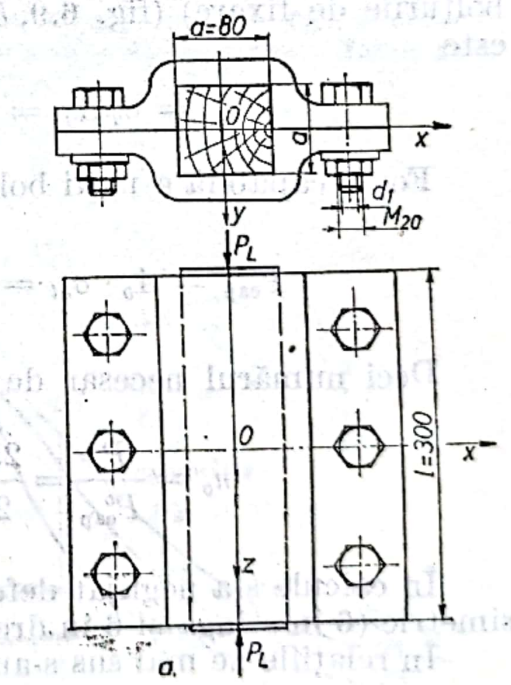
$E_L = 130\,000 \text{ daN/cm}^2$;

$E_R = 22\,000 \text{ daN/cm}^2$;

$E_T = 10\,000 \text{ daN/cm}^2$; $\nu_{LR} = 0{,}12$;

$\nu_{LT} = 0{,}085$; $\nu_{RL} = 0{,}32$; $\nu_{RT} = 0{,}30$;

$\nu_{TL} = 0{,}5$ şi $\nu_{TR} = 0{,}66$.



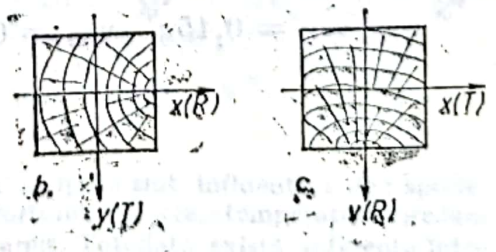


Fig. 6.9

6.9. Într-o matriţă foarte rigidă confecţionată din două elemente solidarizate cu şuruburi M 20 ($d_i = 17{,}29$ mm) se presează rigle de lemn de fag cu dimensiunile $30 \cdot 30 \cdot 300$ mm^3. Se cere să se calculeze numărul necesar de şuruburi pentru ca matriţa să reziste celei mai dezavantajoase poziţii a riglei de lemn în matriţa admisibilă pentru şuruburi la tracţiune $\sigma_{at} = 1\,000$ daN/cm^2 şi forţa $P_L = 6\,000$ daN.

Rezolvare. Sub acțiunea forței P_T în riglă se produc tensiuni în direcție longitudinală

$$\sigma_L = -\frac{P_L}{A} = -\frac{6\,000}{8 \cdot 8} = -93{,}75 \text{ daN/cm}^2,$$

iar în direcțiile R și T, σ_R și σ_T necunoscute.

Matrița fiind rigidă deformațiile specifice ε_R și ε_T sînt egale cu zero, respectiv, conform legii generalizate a lui H o o k e se poate scrie

$$\varepsilon_R = 0 = \frac{1}{E_R}(\sigma_R + 0{,}45 \cdot 93{,}75 - 0{,}36\,\sigma_T);$$

$$\varepsilon_T = 0 = \frac{1}{E_T}(\sigma_T + 0{,}52 \cdot 93{,}75 - 0{,}71\,\sigma_R),$$

de unde rezultă

$$\sigma_R = -80{,}24 \text{ daN/cm}^2 \quad \text{și} \quad \sigma_T = -105{,}72 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezultă că poziția periculoasă este atunci cînd rigla este cu direcția radială după axa x și axa y în direcție tangențială (respectiv paralelă cu bolțurile de fixare) (fig. 6.9, *b*). În acest caz forța care solicită bolțurile este

$$P_T = \sigma_T A_T = 105{,}75 \cdot 8 \cdot 30 = 25373 \text{ daN}.$$

Forța capabilă a unui bolț solicitat la întindere este

$$P^b_{cap} = A_b \cdot \sigma_{at} = \frac{\pi \cdot 1{,}729^2}{4} \cdot 1000 = 2348 \text{ daN}.$$

Deci numărul necesar de bolțuri va fi

$$n_b = \frac{P_T}{P^b_{cap}} = \frac{25\,373}{2\,348} = 10{,}8 \cong 12 \text{ bolțuri}.$$

În calcule s-a neglijat deformația bolțurilor. Bolțurile vor fi aranjate simetric (6 în stînga și 6 în dreapta).

În relațiile de mai sus s-au folosit pentru lemnul de fag:

$$\nu_{RL} = 0{,}45; \quad \nu_{TL} = 0{,}52; \quad \nu_{RT} = 0{,}36 \quad \text{și} \quad \nu_{TR} = 0{,}71.$$

Scanned with OKEN Scanner

CALCULUL DE REZISTENȚĂ, RIGIDITATE ȘI STABILITATE AL STRUCTURILOR MECANICE REALIZATE DIN LEMN

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

Lemnul, datorită proprietăților sale fizico-mecanice, este un material ce își găsește o largă întrebuințare la realizarea construcțiilor, structurilor diferitelor categorii de mobilier, produse finite de uz casnic și industrial. Caracteristicile lemnului îl fac apt pentru construcții, fiind competitiv cu celelalte materiale (metal, beton, zidărie).

Lemnul se utilizează în construcții pentru structuri de rezistență (în special la acoperișuri) pentru finisaje (tîmplărie, pardoseli, pereți), pentru cofraje etc. În structura mobilierului și produselor finite își găsește o largă utilizare atît ca lemn masiv cît mai ales sub forma materialelor semifinite superioare (placaj, plăci din așchii de lemn și fibre de lemn, panel, furnir ș.a.).

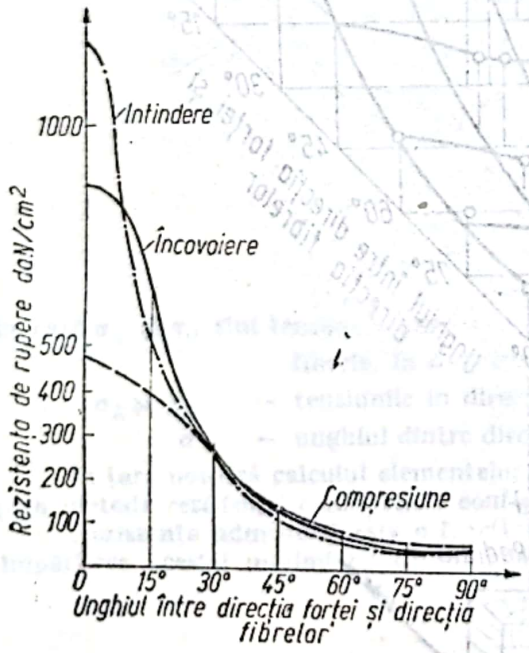


Fig. 7.a

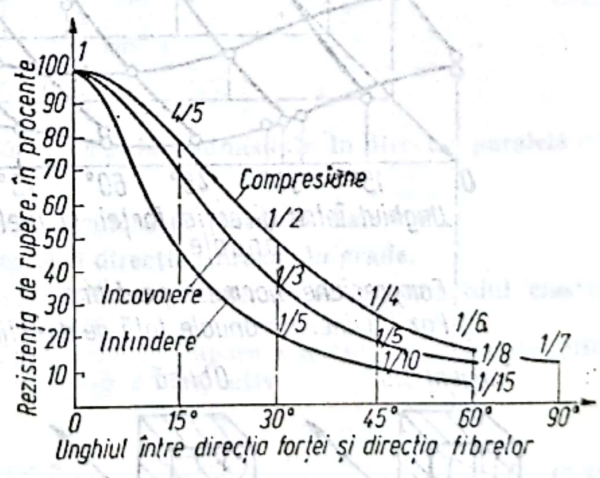
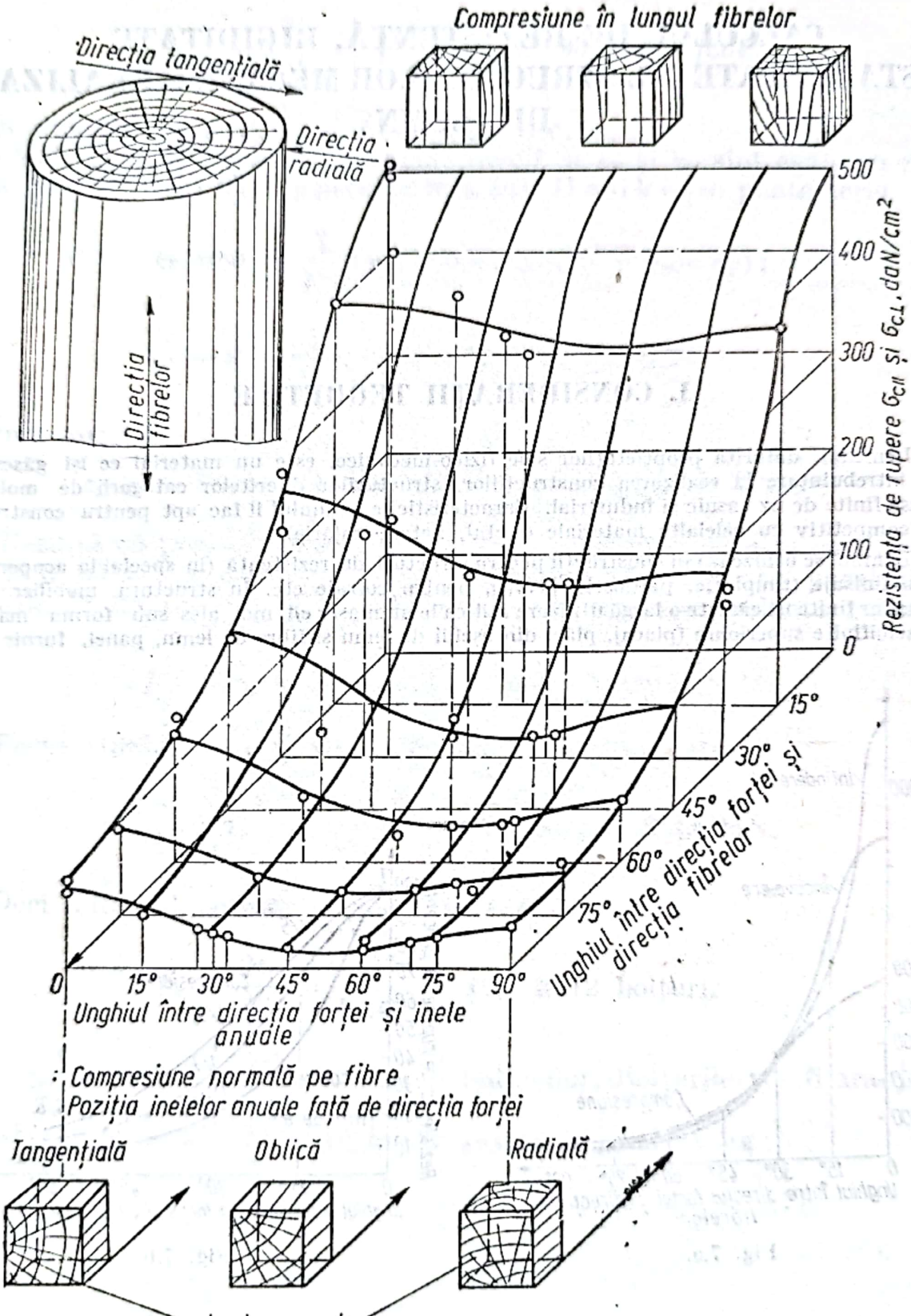


Fig. 7.b

Rezistențele lemnului la diferite solicitări simple sau compuse sînt influențate de : specie, densitate, umiditate, înclinarea fibrelor față de direcția efortului, defecte, temperatură precum și de natura sarcinilor statice sau dinamice la care este supus. Totodată există diferențe între rezistențele determinate pe epruvete și cele ale pieselor în mărime naturală.

Modul cum unghiul dintre direcția eforturilor și fibrele influențează rezistențele lemnului la principalele solicitări simple este prezentat în figurile 7. *a*, *b* și *c*, iar influența umidității este prezentată în figura 7. *d*.



Variația rezistenței la compresiune cu înclinarea fibrelor și inelelor anuale

Fig. 7.c

Rezistența lemnului pentru un anumit unghi α între forță și fibră este dată de relațiile

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{||}}{1 + \left(\frac{\sigma_{||}}{\sigma_\perp} - 1\right) \sin^3 \alpha}; \qquad (7.1)$$

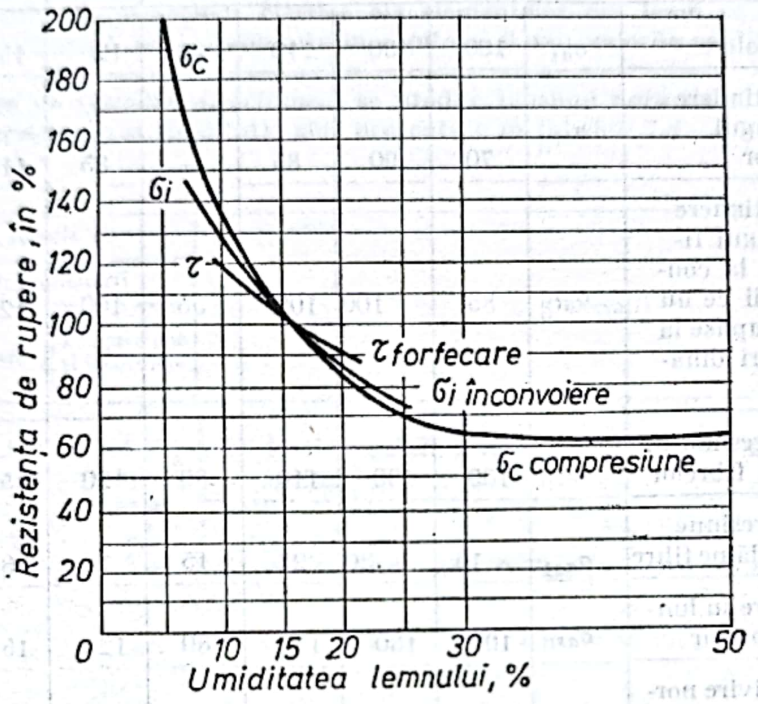


Fig. 7.d

$$\tau_\alpha = \frac{\tau_{||}}{1 + \left(\frac{\tau_{||}}{\tau_\perp} - 1\right) \sin^3 \alpha}, \qquad (7.2)$$

în care $\sigma_{||}$ și $\tau_{||}$ sînt tensiunile normale, respectiv tangențiale admisibile în direcție paralelă cu fibrele, în daN/cm²;

$\sigma_\perp$ și $\tau_\perp$ — tensiunile în direcție perpendiculară pe fibre, în daN/cm²;

α — unghiul dintre direcția forței și direcția fibrelor, în grade.

În țara noastră calculul elementelor și construcțiilor din lemn se face în domeniul elastic prin metoda *rezistențelor admisibile* conform STAS 856-71.

Rezistența admisibilă este o fracțiune a rezistenței de rupere a lemnului, obținută prin împărțirea acestei mărimi cu coeficientul de siguranță c, respectiv

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{r\ epruvete\ mici}}{c}. \qquad (7.3)$$

Valorile rezistențelor admisibile pentru diferite solicitări și pentru diferite specii de material lemnos sînt date în tabelul 7. *a*.

Speciile ce nu sînt cuprinse în tabelul 7. *a* se pot aprecia astfel:

— pinul silvestru cu răşinoasele;
— salcîmul cu stejarul;
— frasinul și ulmul cu fagul;
— salcia și aninul negru cu plopul.

Tabelul 7, a

Nr. crt.	Natura solicitării	Rezistențele admisibile în daN/cm²							
		Simbol	Construcții definitive				Construcții provizorii			
			molid brad	stejar gorun	fag	plop	molid brad	stejar gorun	fag	plop
1	Încovoiere	σ_{ai}	100	130	110	80	120	155	130	95
2	a) Întindere în lungul fibrelor	$\sigma_{at\|\|}$	70	90	85	—	85	110	100	—
	b) Întindere în lungul fibrelor la construcții ce nu sînt supuse la eforturi dinamice	$\sigma_{at\|\|}$	85	100	100	55	100	120	120	70
3	Compresiune în lungul fibrelor	$\sigma_{ac\|\|}$	100	130	110	80	120	155	130	95
4	Compresiune normală pe fibre	$\sigma_{ac\perp}$	15	30	24	15	18	36	29	18
5	Strivire în lungul fibrelor	$\sigma_{as\|\|}$	100	130	110	80	120	155	130	95
6	a) Strivire normală pe fibre în crestări laterale	$\sigma_{as\perp}$	15	30	24	15	18	36	29	18
	b) Strivire normală pe fibre în pene prismatice la transmiteri frontale și pe reazeme	$\sigma_{as\perp}$	25	50	40	25	30	60	48	30
7	Strivire sub șaibă	σ_{asr}	35	70	56	35	40	80	64	40
8	Forfecare în lungul fibrelor provenind din încovoiere	$\tau_{ai\|\|}$	20	32	26	16	24	38	31	19
9	Forfecare în planul fibrelor a — longitudinală	$\tau_{a\|\|}$	10	16	13	8	12	19	16	10
	b — transversală	$\tau'_{a\perp}$	5	8	7	4	6	10	8	5
10	Forfecare în plan normal pe direcția fibrelor	$\tau_{a\perp}$	45	75	60	36	55	90	70	45

Scanned with OKEN Scanner

Rezistențele indicate în tabelul 7. *a* se modifică în funcție de natura elementului sau de condițiile de lucru în care lucrează, astfel :

— pentru construcții permanente supuse umezirii și uscării alternative, se reduc cu 15 % iar pentru construcții sau părți de construcții care stau permanent sau timp îndelungat în apă se reduc cu 25% ;

— rezistențele admisibile ale pieselor curbe se stabilesc prin înmulțirea rezistențelor din tabelul 7.*a* cu un coeficient β determinat în funcție de raportul R/h (R — raza de curbură a piesei, h — grosimea scîndurii, dulapului sau grinzii pe direcția razei), coeficient dat în tabelul 7.*b*.

Pentru calculul deformațiilor elastice ale elementelor din lemn se utilizează valorile modulelor de elasticitate E și G prezentate în capitolul 6 sau valorile medii prezentate în tabelul 7.*c*.

La solicitarea de *întindere (tracțiune)* se produc tensiuni normale σ. Relațiile de calcul din condițiile de rezistență și rigiditate, sînt prezentate în tabelul 7.*d*.

Tabelul 7, b

Coeficient β în funcție de:			Observații
Raportul $\frac{R}{h}$	Felul solicitării		
	întindere	compresiune și încovoiere	
125	0,5	0,7	1) Pentru valori intermediare ale lui R/h se interpolează liniar
150	0,6	0,8	
175	0,7	0,9	
200	0,8	1,0	
250	0,9	1,0	2) Rezistențele la strivire și forfecare nu se reduc
⩾300	1,0	0,9	

Tabelul 7, c

Specia materialului lemnos	Modul de elasticitate E(daN/cm²)		Modul de elasticitate transversal G (daN/cm²)
	paralel cu direcția fibrelor $E_{\parallel}$	perpendicular pe direcția fibrelor $E_{\perp}$	
Rășinoase	100 000	3 000	5 000
Foioase	125 000	6 000	10 000

Tabelul 7, d

Calculul de	Din condiția de rezistență	Din condiția de rigiditate
Dimensionare	$A_{nec} = K_s \frac{N_{max}}{\sigma_a}$	$A_{nec} = \frac{N_{max} l}{E \Delta l_a}$
Verificare	$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A_n} \leqslant \sigma_a$	$\Delta l_{max} = \frac{N_{max} l}{E A_n} \leqslant \Delta l_a$
Calculul forței capabile	$N_{cap} = \sigma_a A_n$	$N_{cap} = \frac{E A_n \Delta l_a}{l}$

A_{nec} — aria necesară ; A_n — aria netă ; N_{max} — forța axială maximă ; N_{cap} — forța axială capabilă ; Δl — lungirea ; Δl_a — lungirea admisibilă ; l — lungimea ; K_s — 1,15...1,5 (coeficient ce depinde de mărimea slăbirilor pieselor).

Scanned with OKEN Scanner

Barele supuse de *compresiune centrică* și cu subțirimea redusă (piese scurte cu secțiunea transversală dezvoltată) adică cu $\lambda = l_f/i_{min} < 10$ (l_f fiind lungimea la *flambaj* și i_{min} — raza de inerție minimă) relația de verificare este

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A_n} \leqslant \sigma_{ac},$$

unde N_{max} este valoarea forței de compresiune, A_n — aria netă și σ_{ac} — rezistența admisibilă la compresiune.

La piesele de lungime mare intervine fenomenul de pierdere a stabilității. În acest caz rezistența critică $\sigma_{cf} = \sigma_f$, la care se produce pierderea stabilității poate fi mai mică decît rezistența la rupere. Pierderea stabilității poate avea loc atît în zona comportării elastice a materialului respectiv $\sigma_{cr} = \sigma_f < \sigma_p$, cît și în zona plastică $\sigma_{cr} = \sigma_f > \sigma_p$.

Forța critică de flambaj este dată de radiația lui Euler

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_f^2}, \tag{7.4}$$

pentru $\lambda = l_f/i_{min} \geqslant 100$,

unde I_{min} este momentul de inerție minim al secțiunii piesei de lemn, în cm^4 :

l_f — lungimea de flambaj, în cm ; pentru piese din lemn lungimile de flambaj sînt :

$l_f = l$, pentru bară dublă articulată ;

$l_f = 2l$, pentru bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt ;

$l_f = 0{,}8l$, pentru bară încastrată la un capăt și articulată la celălalt ;

$l_f = 0{,}65l$, pentru bară dublu încastrată ;

λ — coeficient de zvelțețe sau subțirime ;

i_{min} — raza de inerție minimă, în cm.

Pentru $\lambda < 100$ forța critică de flambaj este

$$N_{cr} = \sigma_f A = (285 - 1{,}9\,\lambda)\,A \text{ [daN]}, \tag{7.5}$$

unde $\sigma_f = 285 - 1{,}9\,\lambda$ este relația lui Kocetkov.

Dimensionarea pieselor de lemn comprimate se poate face prin mai multe căi.

Din relația lui Euler (7.4) se determină I_{min}^{nec} și apoi dimensiunile secțiunii. După care în mod obligatoriu se verifică dacă era valabilă relația lui Euler, respectiv se calculează coeficientul de zvelțețe λ, care trebuie să fie $\lambda \geqslant \lambda_0 = 100$ (după unii autori $\lambda_0 = 75$). Dacă este îndeplinită această condiție dimensiunile obținute sînt bune, în caz contrar se calculează coeficientul de siguranță la flambaj

$$c_f = \frac{P_f}{N} = \frac{\sigma_f A}{N} = \frac{(285 - 1{,}9\,\lambda)A}{N} \geqslant c_{(f)}^{dat}, \tag{7.6}$$

iar dacă nu este îndeplinită relația (7.6), respectiv $c_f < c_f^{dat}$ se măresc dimensiunile și se reia calculul pînă cînd $c_f \geqslant c_f^{dat}$.

O altă cale de dimensionare este a coeficientului de flambaj φ. Cunoscînd forța axială N și lungimea de flambaj l_f calculul se face prin aproximații succesive. Astfel, se alege o valoare pentru coeficientul de zvelțețe λ, în concordanță cu cele indicate în tabelul 7. *e*, cu care se determină φ și se calculează aria necesară.

$$A_{nec} = \frac{N}{\varphi \sigma_{ac}} \tag{7.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7,e

Nr. crt.	Denumirea elementelor	Coeficient de zvelteţe maxim admis λ_a	
		construcţii definitive	construcţii provizorii
1	La grinzi cu zăbrele şi arce: — tălpi, diagonale şi montanţi de reazem	150	175
	— celelalte elemente	175	200
2	Stîlpi principali	120	150
	Stîlpi secundari şi zăbrelele stîlpilor cu secţiune compusă	150	175
3	Contravîntuiri	200	200

În continuare se alege o secţiune din sortimentul de material lemnos existent, de arie aproximativ egală cu A_{nec} şi se verifică tensiunea maximă cu relaţia

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{ef}} \leqslant \varphi \sigma_{ac}. \tag{7,8}$$

Pentru secţiunile pătrate şi circulare se pot determina ariile necesare şi cu relaţiile:

— pentru secţiuni circulare

dacă

$$\lambda > 75, \quad A = \frac{l_f}{15{,}7} \sqrt{\frac{N}{\sigma_a}}, \tag{7.9}$$

dacă

$$\lambda < 75, \quad A = \frac{N}{\sigma_a} + 0{,}001\, l_f^2; \tag{7.10}$$

— pentru secţiuni pătrate

dacă

$$\lambda > 75, \quad A = \frac{l_f}{16{,}1} \sqrt{\frac{N}{\sigma_a}}, \tag{7.11}$$

dacă

$$\lambda < 75, \quad A = \frac{N}{\sigma_a} + 0{,}001\, l_f^2. \tag{7.12}$$

Verificarea secţiunilor pieselor de lemn comprimate se face ţinînd cont de posibilitatea pierderii stabilităţii.

Astfel, se poate calcula coeficientul de siguranţă

$$c_f = \frac{N_f}{N}. \tag{7.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta se calculează coeficientul de zvelteţe $\lambda = l_f/i_{min}$ şi dacă $\lambda \geq \lambda_0$, N_f se calculează cu relaţia lui Euler (7.4) iar dacă $\lambda < \lambda_0$, $N_f = \sigma_f A$ unde σ_f este dat de relaţia lui Kocetkov (7.5).

Pentru verificare se poate folosi şi metoda coeficientului de flambaj φ, respectiv

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{ef}} \leqslant \varphi \sigma_{ac}.$$

Valorile coeficientului de flambaj φ pentru lemn sînt date în tabelul 7. *f*.

La compresiunea normală pe fibre (fig. 7. *e*), mărimea deformaţiilor şi tensiunilor depinde în mare măsură dacă compresiunea se exercită pe toată suprafaţa piesei sau numai pe o porţiune din lungimea ei. În primul caz (fig. 7. *e*) lemnul lucrează numai la compresiune, iar în cazurile

Tabelul 7, f

Valorile coeficientului de flambaj φ pentru lemn

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	0,999	0,999	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994
10	0,992	0,990	0,988	0,986	0,984	0,982	0,980	0,977	0,974	0,971
20	0,968	0,965	0,961	0,958	0,954	0,950	0,946	0,942	0,937	0,933
30	0,928	0,923	0,918	0,913	0,908	0,902	0,896	0,890	0,884	0,876
40	0,872	0,866	0,859	0,852	0,845	0,838	0,831	0,823	0,816	0,808
50	0,800	0,729	0,784	0,775	0,767	0,758	0,749	0,740	0,731	0,733
60	0.712	0,702	0,692	0,682	0,672	0,662	0,652	0,641	0,630	0,619
70	0,608	0,597	0,585	0,574	0,562	0,550	0,537	0,523	0,510	0,497
80	0,485	0,473	0,461	0,450	0,439	0,428	0,419	0,410	0,401	0,392
90	0,383	0,374	0,366	0,359	0,351	0,343	0,336	0,329	0,323	0,316
100	0,310	0,304	0,298	0,292	0,286	0,281	0,276	0,271	0,266	0,261
110	0,256	0,251	0,247	0,243	0,239	0,235	0,231	0,227	0,223	0,221
120	0,215	0,211	0,208	0,205	0,202	0,199	0,196	0,193	0,190	0,187
130	0,184	0,181	0,178	0,175	0,172	0,170	0,168	0,166	0,163	0,161
140	0,158	0,156	0,154	0,152	0,150	0,148	0,148	0,144	0,142	0,140
150	0,138	0,136	0,134	0,132	0,131	0,129	0,128	0,126	0,124	0,122
160	0,121	0,120	0,118	0,117	0,115	0,114	0,113	0,112	0,110	0,109
170	0,107	0,106	0,105	0,104	0,103	0,101	0,100	0,099	0,098	0,097
180	0,096	0,095	0,091	0,093	0,092	0,091	0,090	0,089	0,088	0,087
190	0,085	0,085	0,084	0,083	0,082	0,081	0,081	0,080	0,079	0,078
200	0,077									

Scanned with OKEN Scanner

celelalte, în afară de compresiunea simplă a porțiunii care este direct acționată, se observă că fibrele lucrează foarte intens la încovoiere și întindere la muchiile piesei.

La solicitarea de forfecare se produc tensiuni tangențiale τ. Principalele tipuri de forfecări ale lemnului, în funcție de direcția forțelor și planelor de forfecare față de direcția fibrelor și inelelor anuale sînt prezentate în tabelul 7. *g*.

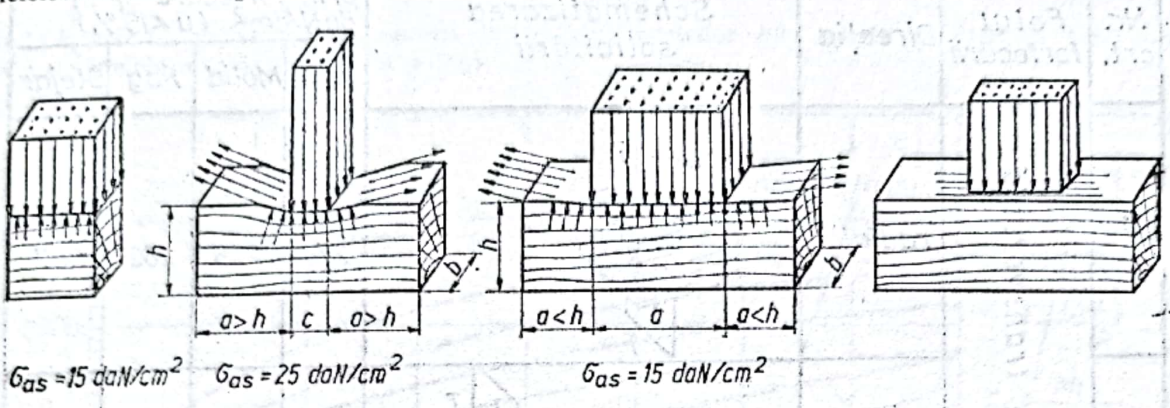


Fig. 7.c

Pentru dimensionare la solicitarea de forfecare se utilizează relația

$$A_{nec} = \frac{T_{max}}{\tau_{af}}, \tag{7.14}$$

iar pentru verificare

$$\tau_{ef} = \frac{T_{max}}{A_n} \leqslant \tau_{af}. \tag{7.15}$$

Forța capabilă la forfecare este dată de relația

$$T_{cap} = A_n \tau_{af}. \tag{7.16}$$

În relațiile de mai sus T este forța tăietoare, A — aria secțiunii iar τ_{af} — rezistența admisibilă la forfecare, dependentă de planul de forfecare și direcția fibrelor.

Un rol important în realizarea structurilor mecanice îl prezintă *îmbinările în lemn*. Calculul de rezistență al acestora are în vedere solicitările care apar (forfecarea, compresiunea locală respectiv strivirea, tracțiunea, încovoierea ș.a.).

După *mijloacele de îmbinare* utilizate îmbinările pot fi : prin chertare, cu tije, cu pene, cu inele sau prin încleiere. După *rolul* pe care îl au îmbinările pot fi de solidarizare sau de rezistență. O prezentare detaliată a tipurilor de îmbinări, a construcției acestora și a calculelor care se fac este dată în lucrările [16, 32, 48].

Solicitarea de torsiune este rar întîlnită la piesele de lemn. Tensiunile tangențiale τ_t piesele de secțiune circulară sînt date de relația

$$\tau_{t\,max} = \frac{M_t}{W_p}, \tag{7.17}$$

unde W_p este modulul de rezistență polar ; $W_p = \pi d^3/16$, în cm³,

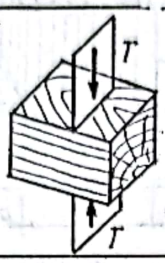
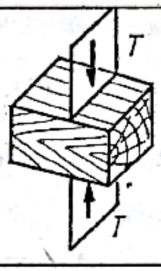
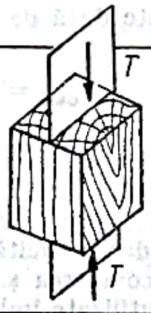
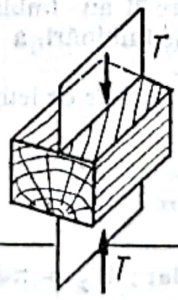
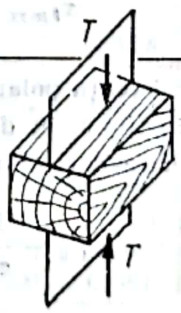
M_t — momentul de torsiune, în daN.cm.

Pentru dimensionare se utilizează relația :

$$W_{p\,nec} = \frac{M_t}{\tau_{at}}\ [cm^3]. \tag{7.18}$$

Tensiunea admisibilă la torsiune este egală cu cea de forfecare în lungul fibrelor, respectiv $\tau_{at} = \tau_{af\parallel}$.

Tabelul 7,9

Nr. crt.	Felul forfecării	Direcția	Schematizarea solicitării	Rezistența la rupere prin forfecare τ_r în daN/cm² (u ≤ 15 %)			
				Brad	Molid	Fag	Stejar
1	Forfecare transversală	radială		274	245	483	367
2		tangențială		248	246	430	406
3	Forfecare longitudinal paralelă	radială		55	54	110	109
4		tangențială		58	55	143	128
5	Forfecare longitudinal perpendiculară	radială		17	19	65	58
6		tangențială		18	20	68	71

În cazul torsiunii barelor de lemn de secțiune dreptunghiulară tensiunile maxime se produc la mijlocul laturii mari și sînt date de relația

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{k_1 h b^2}, \tag{7.19}$$

unde k_1 este un coeficient ce depinde de raportul laturilor h/b, specie și direcția tensiunilor față de inelele anuale (Fig. 7. *f* și 7.*g*).

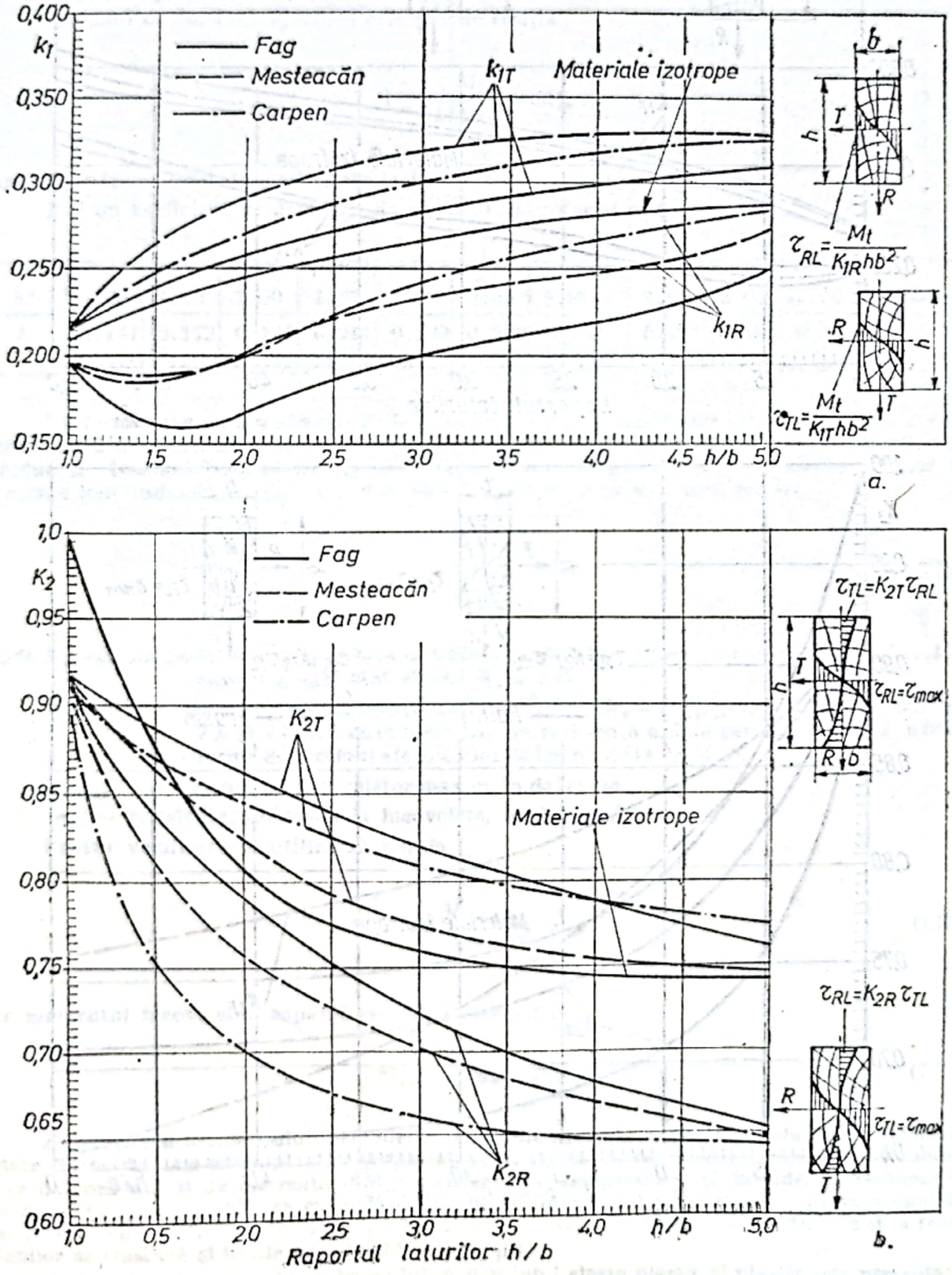
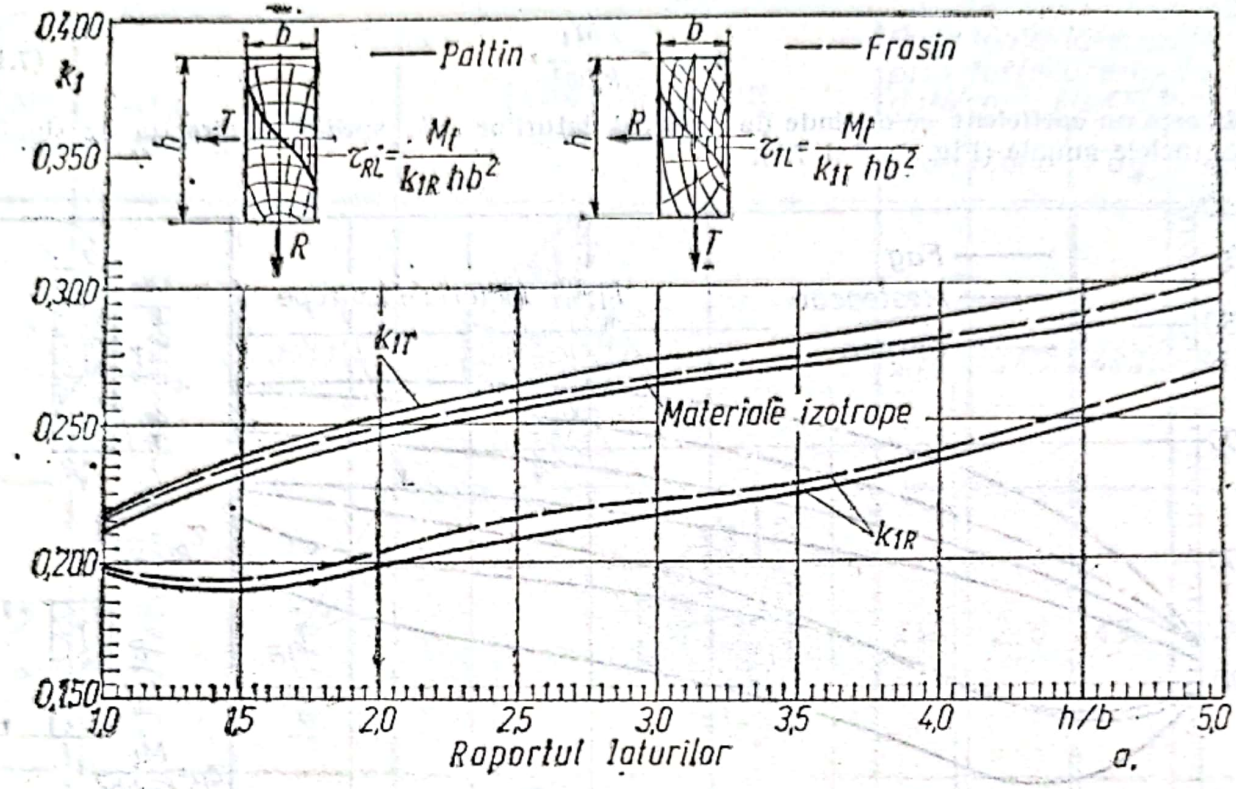
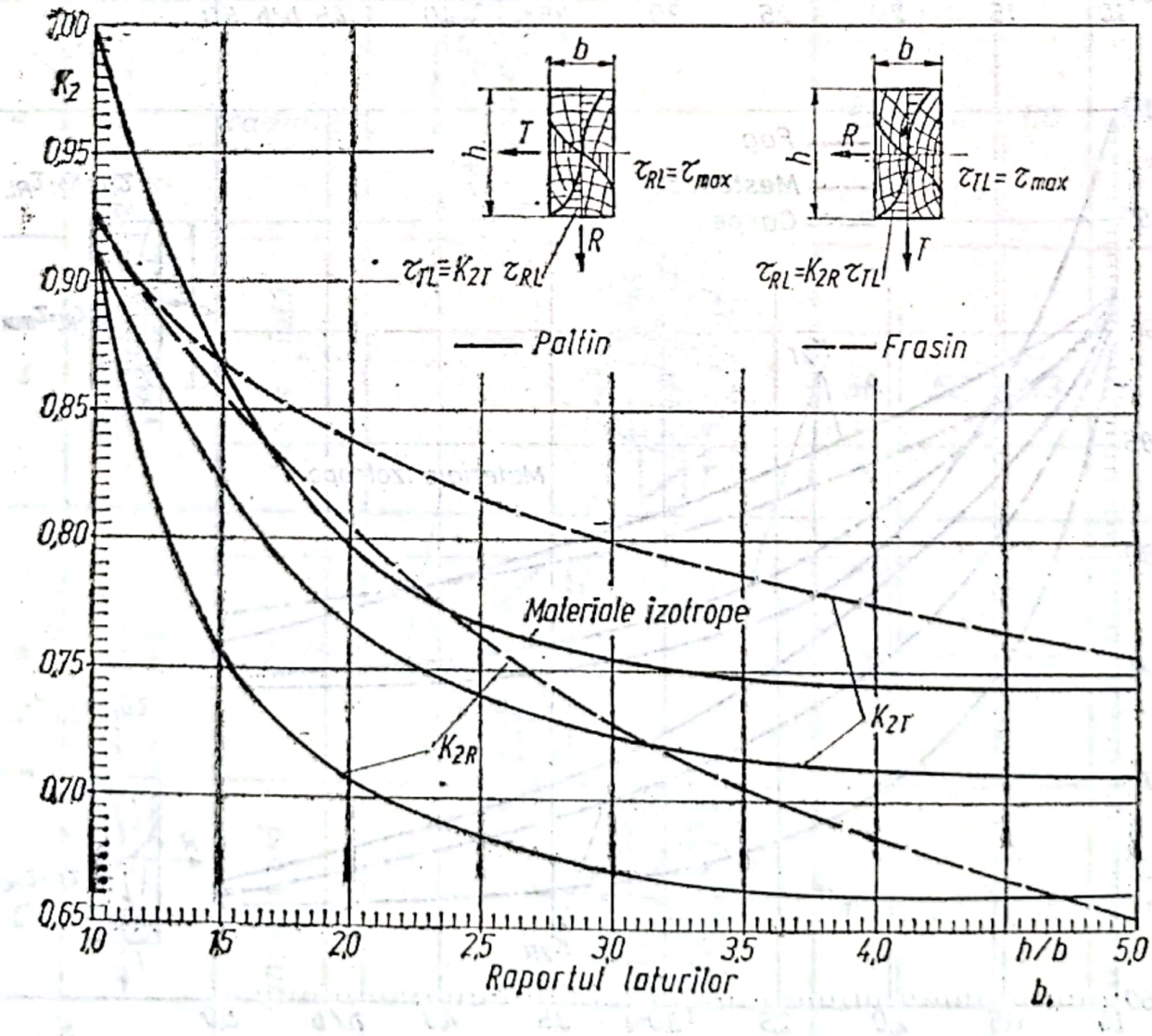


Fig. 7.f





Scanned with OKEN Scanner

La mijlocul laturii mici a dreptunghiului se produc tensiunile

$$\tau_b = k_2 \tau_{max}, \tag{7.20}$$

unde k_2 depinde de raportul laturilor h/b, specie și direcția tensiunilor față de inelele anuale (Fig. 7. *f* și 7. *g*).

Unghiul de torsiune specifică este dat de relația

$$\theta = \frac{M_t}{khb^3 G_t} \text{ [rad]}, \tag{7.21}$$

unde G_t este modulul de elasticitate la torsiune (v. cap. 6);

k — un coeficient ce depinde de raportul laturilor și este

h/b	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	10,00	∞
k	0,141	0,172	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333

La *încovoierea pură* a pieselor de lemn se produc tensiuni normale iar la *încovoierea simplă* (cînd există momente încovoietoare M_t și forța tăietoare T) pe lîngă tensiunile normale σ se produc și tensiuni tangențiale τ. Datorită tensiunilor tangențiale τ apare fenomenul de lunecare longitudinală. Pentru dimensionare la încovoiere se utilizează relația

$$W_{z\,nec} = \frac{K_s M_{t\,max}}{\sigma_{at}}, \tag{7.22}$$

unde K_s este un coeficient ce apreciază slăbirile grinzii datorită unor îmbinări, $K_s = 1{,}1 \ldots 1{,}5$; pentru grinzi fără slăbiri $K_s = 1{,}0$.

W_z — modulul de rezistență axial, în cm³; $W_z = I_z/y_{max}$ (v. cap. 2); în tabelele 7.*h* și 7.*i* sînt date modulele de rezistență axiale pentru cele mai uzuale forme de secțiuni ale pieselor de lemn (v. și tab. 2.*b*).

$M_{t\,max}$ — momentul încovoietor maxim, în daN · cm;

σ_{at} — rezistența admisibilă la încovoiere, în daN/cm².

Pentru verificare se utilizează relația

$$\sigma_{tf} = \frac{M_{t\,max}}{W_z^{net}} \leqslant \sigma_{at}, \tag{7.23}$$

iar momentul încovoietor capabil este dat de relația

$$M_{t\,cap} = \sigma_{at} W_z^{net}. \tag{7.24}$$

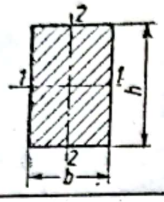
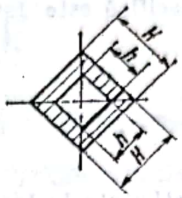
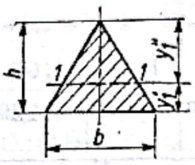
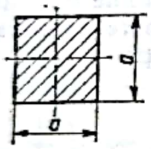
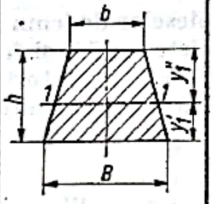
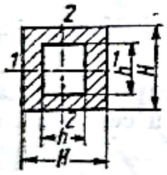
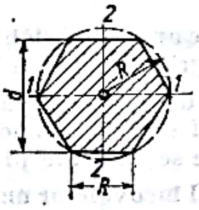
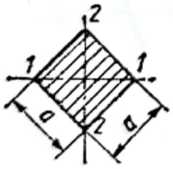
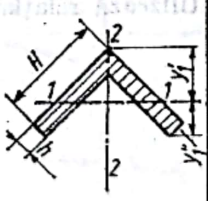
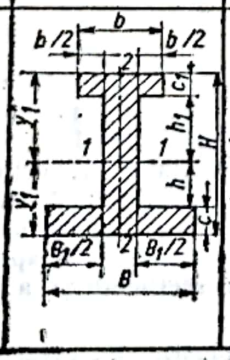
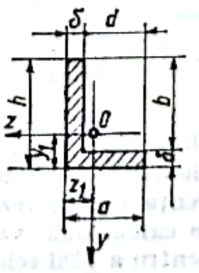
Cu creșterea momentului încovoietor tensiunile normale depășesc limita de proporționalitate trecînd în zona elastoplastică și apoi ajung în stadiul de rupere (fig. 7. *h*). Aliura tensiunii este determinată și de diferența dintre rezistența la compresiune și întindere a lemnului. În cazul sarcinilor mobile se calculează valoarea momentului *maximum maximorum* apoi se fac calculele de încovoiere. Pentru a găsi relativ ușor valorile eforturilor secționale și a reacțiunilor se trasează și liniile de influență.

Date privind comportarea lemnului în domeniul elasto-plastic și plastic sînt prezentate în detaliu în lucrarea [50].

Scanned with OKEN Scanner

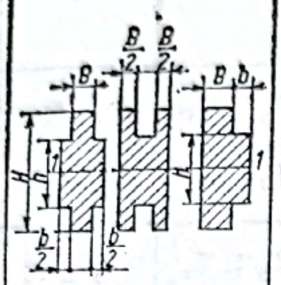
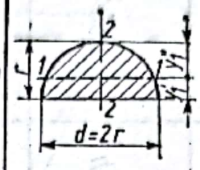
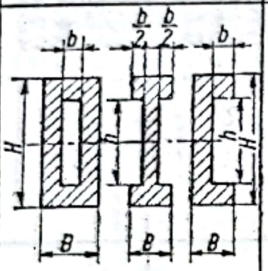
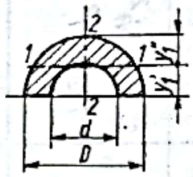
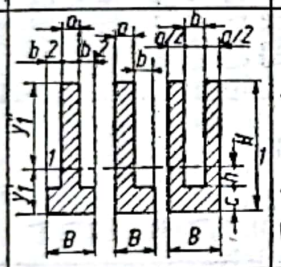
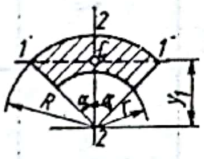
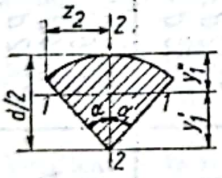
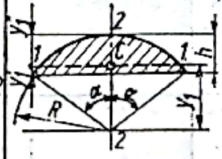
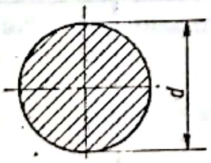
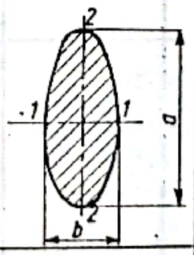
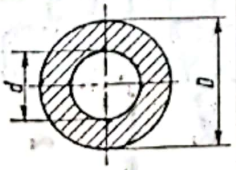
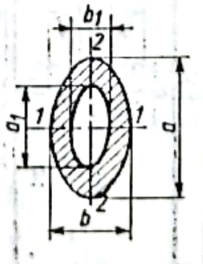
Momentele de inerţie şi modulele de rezistenţă pentru diverse suprafeţe

A — aria secţiuni ; I — momentul de inerţie, W — modulul de rezistenţă

1		$A=bh$; $I_1=\frac{bh^3}{12}$; $I_2=\frac{hb^3}{12}$; $W_1=\frac{bh^2}{6}$; $W_2=\frac{hb^2}{6}$; $i_1=0{,}289\,h$; $i_2=0{,}289\,b$	7		$A=H^2-h^2$; $I=\frac{1}{12}(H^4-h^4)$; $W=0{,}118\,\frac{H^4-h^4}{H}$; $i=0{,}289\sqrt{H^2-h^2}$
2		$A=bh$; $y_1=\frac{1}{2}(h\cos\alpha+b\sin\alpha)$; $I_1=\frac{bh}{12}(h^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)$; $W_1=I_1/y_1$; $i_1=0289\sqrt{b^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)}$	8		$A=0{,}5\,bh$; $y_1'=\frac{h}{3}$; $y_1''=\frac{2}{3}h$; $I_1=\frac{bh^3}{36}$; $W'=\frac{bh^2}{12}$; $W''=\frac{bh^2}{24}$; $i_1=0{,}236\,h$
3		$A=a^2$; $I=a^4/12$; $W=a^3/6$; $i=0{,}289\,a$;	9		$A=\frac{B+b}{2}h$; $y_1'=\frac{B+2b}{3(B+b)}h$; $I_1=\frac{h^3(B^2+4Bb-b^2)}{36(B+b)}$; $i_1=\frac{h}{6(B+b)}\sqrt{2(B^2+4Bb+b^2)}$; $W_1'=I_1/y$; $W_1''=I_1/y_1''$.
4		$A=H^2-h^2$; $I=\frac{1}{12}(H^4-h^4)$; $W=(H^4-h^4)/6H$; $i=0{,}289\sqrt{H^2-h^2}$;	10		$A=0{,}866\,d^2$; $I_1=I_2=0{,}541\,R^4=0{,}06\,d^4$; $W_1=0{,}625\,R^3=0{,}12\,d^3$; $W_2=0{,}541\,R^3$; $i=0{,}456\,R=0{,}263\,d$..
5		$A=a^2$; $I_1=I_2=\frac{a^4}{12}$; $W_1=W_2=0{,}118\,a^3$; $i=0{,}289\,a$..	11		$A=h(2H-h)$; $y_1'=\frac{H^2+hH-h^2}{a(2H-h)\cos 45°}$; $I_1=\frac{1}{3}\left[2c^4-2(c-h)^4+h(H-2c+\frac{h}{2})^3\right]$; $c=y_1'\cos 45°$; $W_1'=I_1/y_1'$; $W_1''=I_1/y_1''$.
6		$b-b_1=a$; $y_1''=H-y'$; $A=bc_1+a(h-h_1)+Bc$; $y_1'=\frac{aH^2+B_1c^2+b_1c_1(2H-c_1)}{2(aH+B_1c+b_1c_1)}$; $I=\frac{1}{3}(By_1'^3-B_1h^3+by_1'^3-b_1h_1^3)$; $W_1'=I_1/y_1'$; $W_1''=I_1/y_1''$	12		$A=\delta(a+b)$; $z_1=\frac{a^2+b\delta}{2(a+b)}$; $y_1=\frac{h^2+d\delta}{2(h+d)}$; $I_z=\frac{1}{3}\left[\delta(h-y_1)^3+ay_1^3-d(y_1-\delta)^3\right]$; $I_y=\frac{1}{3}\left[\delta(h-z_1)^3+hz_1^3-b(z_1-\delta)^3\right]$; $I_{zy}=-\frac{abd\delta h}{4(a+b)}$; $W_y=I_y/(a-z_1)$; $W_z=I_z/(h-y_1)$.

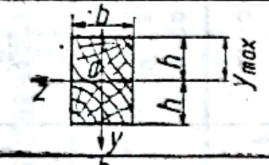
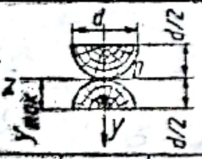
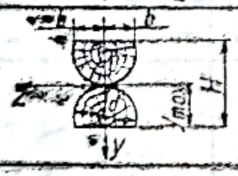
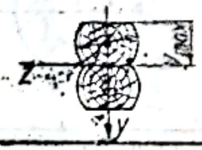
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7,h (continuare)

13		$A=BH+bh$; $I_1=\frac{BH^3+bh^3}{12}$; $W_1=\frac{BH^3+bh^3}{6H}$; $i=0{,}289\sqrt{\frac{BH^3+bh^3}{BH+bh}}$	19		$A=\frac{\pi d^2}{8}$; $y_1'=0{,}2122\,d$; $y_1''=0{,}2878\,d$; $I_1=0{,}00686d^4$; $I_2=\frac{\pi d^4}{128}\simeq$ $\simeq 0{,}025d^4$; $W_1=0{,}2587\,r^3$; $W_2=0{,}1908\,r^3$.
14		$A=BH-bh$; $I_1=\frac{BH^3-bh^3}{12}$; $W_1=\frac{BH^3-bh^3}{6H}$; $i=0{,}289\sqrt{\frac{BH^3-bh^3}{BH-bh}}$.	20		$A=\frac{\pi}{8}(D^2-d^2)$; $y_1''=\frac{D}{2}-y_1'$; $y_1'=\frac{2}{3\pi}\cdot\frac{D^2+Dd+d^2}{D+d}$; $I_1=0{,}00686(D^4-d^4)-$ $-\frac{0{,}0177d^2D(D-d)}{D+d}$; Dacă peretele este subțire cu grosimea peretelui δ $I_1\approx 0{,}038\,\delta\left(\frac{D+d}{2}\right)^3$.
15		$A=aH+bc$; $y_1'=\frac{1}{2}\cdot\frac{aH^2+bc^2}{aH+bc}$; $y_1''=H-y_1'$; $I_1=\frac{1}{3}(By_1'^3-bh^3+ay_1''^3)$; $W_1'=I_1/y_1'$; $W_1''=I_1/y_1''$.	21		$A=\alpha(R^2-r^2)$; $y_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{(R^3-r^3)\sin\alpha}{(R^2-r^2)\alpha}$; $I_1=\frac{R^4-r^4}{4}(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)$; $I_2=\frac{R^4-r^4}{4}(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$.
16		$A=\alpha d^2/4$; $y_1'=d\frac{\sin\alpha}{3\alpha}$; $y_1''=d(0{,}5-\frac{\sin\alpha}{3\alpha})$; $I_1=\frac{d^4}{64}[\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\frac{16\sin\alpha}{9\alpha}]$; $I_2=\frac{d^4}{64}[\alpha-\sin\alpha\cos\alpha]$; $W_1'=I_1/y_1'$; $W_1''=I_1/y_1''$.	22		$A=\frac{R^2}{2}(2\alpha-\sin 2\alpha)$; $y_1=\frac{4}{3}\cdot\frac{R\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha}$; $y_1'=y_1-R\cos\alpha$; $y_1''=h-y_1'$); $I_1=\frac{AR^2}{4}[1+\frac{2\sin^3\alpha\cos\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}]$; $I_2=\frac{AR^2}{4}[1-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}]$.
17		$A=\frac{\pi d^2}{4}$; $I=\frac{\pi d^4}{64}\simeq 0{,}05\,d^4$; $W=\frac{\pi d^3}{32}\simeq 0{,}1\,d^3$; $r=d/4$.	23		$A=\frac{\pi}{4}ab$; $I_1=\frac{\pi a^3b}{64}$; $I_2=\frac{\pi}{64}ab^3$; $W_1=\frac{\pi a^2b}{32}$; $W_2=\frac{\pi ab^2}{32}$; $i_1=0{,}25\,a$; $i_2=0{,}25\,b$
18		$A\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$; $\alpha=d/D$; $I=\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)\simeq 0{,}05D^4(1-\alpha^4)$; $W=\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)-0{,}1D^4(1-\alpha^4)$; $i=\frac{1}{4}\sqrt{D^2+d^2}$.	24		$A=\frac{\pi}{4}(ab-a_1b_1)$; $I_1=\frac{\pi}{64}(a^3b-a_1^3b_1)$; $I_2=\frac{\pi}{64}(b^3a-b_1^3a_1)$; $W_1=\frac{\pi}{32a}(a^3b-a_1^3b_1)$; $W_2=\frac{\pi}{32b}(ab^3-a_1b_1^3)$.

Tabelul 7,1

Caracteristici geometrice şi mecanice pentru secţiuni simple, compuse şi bile elopilte

Nr. crt.	Forma secţiunii	Lăţimea b	Înălţimea H	Aria secţiunii A	y_{max}	$S_{z1/2}$	I_z	W_z	i_z
1		b	2h	2 bh	h	$0{,}5\ bh^2$	$0{,}666\ bh^3$	$0{,}666\ bh^2$	0,578 b
2		b	3h	3 bh	1,5 h	$S_{1-1}=0{,}5\ bh^2$ $1{,}125\ bh^2$	$2{,}25\ bh^3$	$1{,}5\ bh^2$	—
3		d	2d	$1{,}57\ d^2$	d	$0{,}393\ d^3$	$0{,}49\ d^4$	$0{,}49\ d^3$	—
4		d	d	$0{,}785\ d^2$	0,5 d	$0{,}1144\ d^3$	$0{,}08\ d^4$	$0{,}16\ d^3$	—
5		0,25 d 0,333 d 0,5 d	1,968 d 1,942 d 1,855 d	$1{,}566\ d^2$ $1{,}558\ d^2$ $1{,}528\ d^2$	0,948 d 0,971 d 0,933 d	$0{,}390\ d^3$ $0{,}386\ d^3$ $0{,}370\ d^3$	$0{,}484\ d^4$ $0{,}478\ d^4$ $0{,}448\ d^4$	$0{,}493\ d^3$ $0{,}492\ d^3$ $0{,}480\ d^3$	—
6		0,25 d 0,333 d 0,5 d	1,936 d 1,884 d 1,732 d	$1{,}562\ d^2$ $1{,}546\ d^2$ $1{,}48\ d^2$	0,968 d 0,942 d 0,866 d	$0{,}378\ d^3$ $0{,}365\ d^3$ $0{,}320\ d^3$	$0{,}460\ d^4$ $0{,}434\ d^4$ $0{,}355\ d^4$	$0{,}475\ d^3$ $0{,}461\ d^3$ $0{,}410\ d^3$	—

Scanned with OKEN Scanner

În cazul încovoierii simple tensiunile tangențiale τ se calculează cu relația lui Jurawski

$$\tau_z = \frac{TS_z}{bI_z}, \qquad (7.25)$$

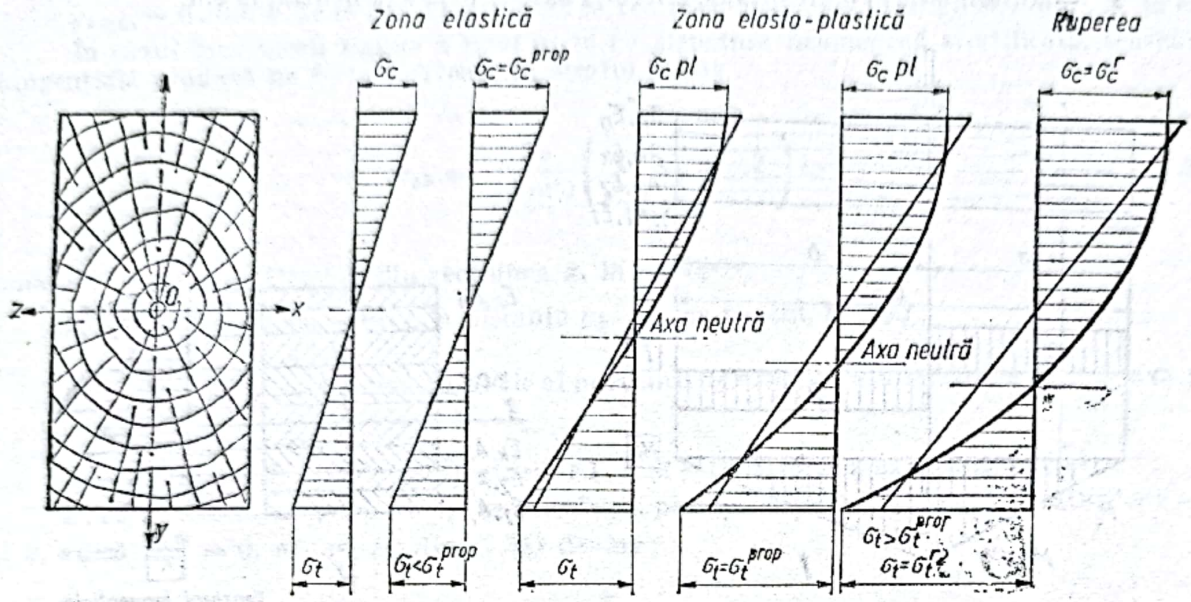


Fig. 7.h

în care T este forța tăietoare în secțiunea cea mai solicitată, în daN;

I_z — momentul de inerție al întregii secțiuni, în cm⁴.

S_z — momentul static al ariei care alunecă, calculat în raport cu axa Oz, în cm³;

b — lățimea secțiunii în planul în care se calculează tensiunea, în cm.

Pentru secțiunile circulară și dreptunghiulară, admițind o variație parabolică a tensiunii τ pe înălțime (fig. 7.*i*), tensiunile maxime sînt:

$$\tau_{max}^{cerc} = \frac{4}{3}\cdot\frac{T}{A}; \quad \tau_{max}^{drept} = \frac{3}{2}\,\frac{T}{A}. \qquad (7.26)$$

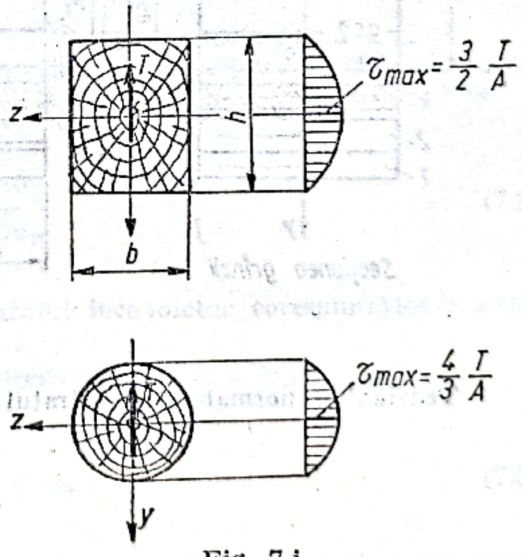


Fig. 7.i

Verificarea la lunecare longitudinală a pieselor de lemn apare ca necesară la elemente cu deschidere mică și încărcări mari, precum și în cazul sarcinilor concentrate mari din apropierea reazemelor.

Forța de lunecare longitudinală pe distanța l_{12} este

$$N_l = \tau_z b l_{12} = \frac{TS_z}{I_z} l_{12}. \qquad (7.27)$$

Elementele de îmbinare a grinzilor compuse din lemn se calculează la strivire și forfecare.

În cazul pieselor din *lemn cu structura neomogenă stratificată*, tensiunile σ și τ variază în salturi de la un strat la altul (fig. 7. *h*)

Prima operație, în cazul calculului la încovoiere a pieselor de lemn cu structură neomogenă, stratificată, este determinarea poziției axei neutre cu relația (fig. 7. *j*):

$$e = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} E_k A_k e_k}{\sum_{k=1}^{k=n} E_k A_k}, \qquad (7.28)$$

unde E_k este modulul de elasticitate al stratului k, în daN/cm²;

A_k — aria secțiunii stratului k, în cm²;

e_k — distanța de la o dreaptă de referință oarecare la centrul de greutate al suprafeței A_k, în cm;

e — distanța de la o dreaptă de referință oarecare la axa neutră, în cm.

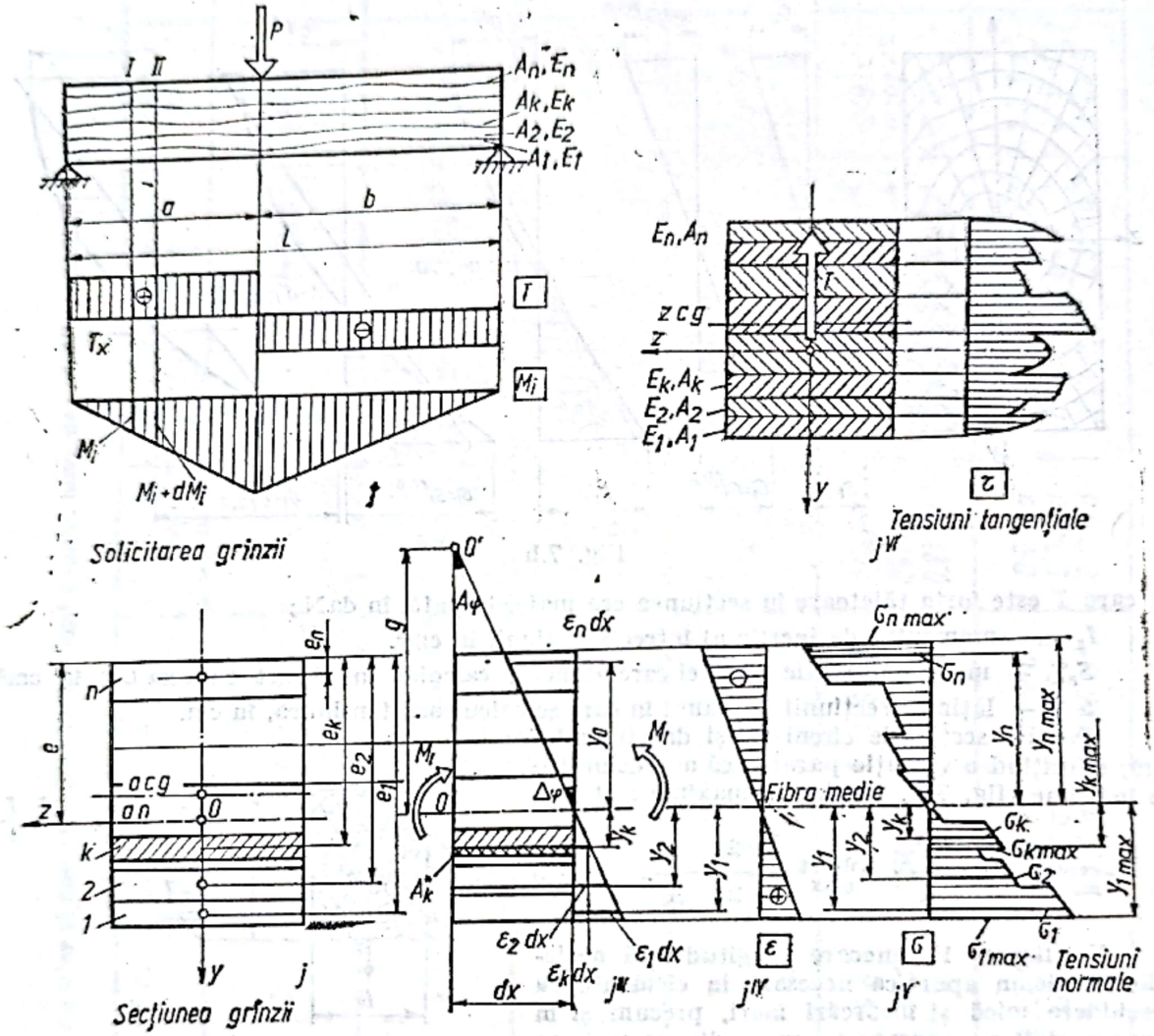


Fig. 7.j

Tensiunile normale din stratul k sînt

$$\sigma_k = \frac{M_i}{R_i^{(k)}} y_k, \tag{7.29}$$

cu valoarea maximă.

$$\sigma_{k\,max} = \frac{M_i}{W_k} \tag{7.30}$$

unde y_k este distanța de la axa neutră la fibra considerată din stratul k, în cm;

$R_i^{(k)} = R_i / E_k$; $R_i = \sum_1^n E_k I_k$ = modulul de rigiditate la încovoiere al secțiunii neomogene stratificată;

Scanned with OKEN Scanner

$I_k = \int_{Ak} y_k^2 \, dA$ = momentul de inerție al suprafeței A_k față de axa neutră, în cm⁴ ;

$W_k = \frac{1}{E_k y_{k\max}} \cdot \sum_1^n E_k I_k = R_i^{(k)} / y_{k\max}$ = modul de rigiditate al secțiunii neomogene, în cm³ ;

$y_{k\max}$ — distanța de la axa neutră pînă la cea mai îndepărtată fibră a stratului k, în cm.

În cazul încovoierii simple a unei piese cu structura neomogenă stratificată, tensiunea tangențială produsă de forța tăietoare în stratul k este

$$\tau_{zk} = \frac{T_x}{b_k^* R_i^{(k)}} \left(\sum_{k=1}^{k-1} S_k + S_k^* \right), \tag{7.31}$$

unde T_x este forța tăietoare din secțiunea x, în daN ;

b_k^* — lățimea secțiunii k la distanța y_k de axa neutră, în cm ;

$S_k^* = \int_{A_k^*} y_k dA$ = momentul static al porțiunii de arie A_k din stratul k față de axa neutră, în cm³ ;

S_k — momentul static al straturilor $1 \ldots (k-1)$ față de axa neutră, în cm³.

Dacă tensiunea tangențială τ_{zk} se calculează pe suprafața de separație a straturilor $k-1$ și k, adică $A_k^* = 0$, atunci relația (7.31) devine :

$$\tau_{zk} = \frac{T_x}{b_k^* R_i^{(k)}} \sum_{k=1}^{k-1} S_k. \tag{7.32}$$

Forța de lunecare longitudinală între două abscise x_1 și x_2 este

$$N_l = \int_{x_1}^{x_2} \frac{T_x}{R_i^{(k)}} \left(\sum_{k=1}^{k-1} S_k + S_k^* \right) dx. \tag{7.33}$$

În cazul *încovoierii oblice și strîmbe* (cînd direcția momentului încovoietor nu coincide cu direcția unei axe principale a secțiunii) tensiunea totală în punctele cele mai depărtate de axă se determină cu relația

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{M_y}, \tag{7.34}$$

unde M_z și M_y reprezintă componentele momentului încovoietor corespunzătoare axelor principale Oz și Oy ;

W_z și W_y — modulele de rezistență axiale în raport cu axele Oz și Oy .

Condiția de rezistență în acest caz este

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leqslant \sigma_a. \tag{7.35}$$

Pentru dimensionare în cazul încovoierii oblice trebuie cunoscută o relație între dimensiunile secțiunii, respectiv între modulele de rezistență W_z și W_y.

Pentru efectuarea calculului pieselor de lemn în funcție de rigiditate, este necesară determinarea mărimii deformațiilor acestora.

Dintre metodele cel mai des utilizate se amintesc :

— *Metoda analitică* de integrare a ecuației diferențiale a fibrei medii deformate (fig. 7. *k*).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_i}{EI_z}, \tag{7.36}$$

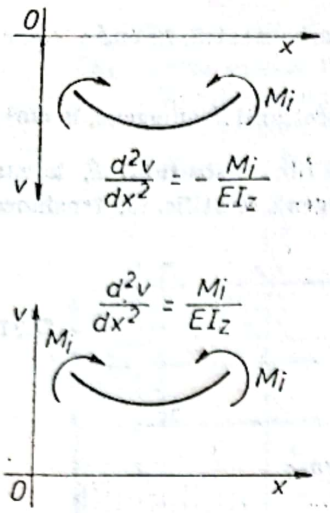


Fig. 7.k

care, în cazul pieselor cu structura neomogenă stratificată are expresia

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_i}{\sum_1^n E_k I_k}. \qquad (7.37)$$

— *Metoda suprapunerii efectelor* constă în însumarea algebrică a săgeților v și rotirilor φ, produse de fiecare sarcină în parte. Pentru cazurile simple, mai des întîlnite în practică se pot utiliza valorile prezentate în tabelul 7.*j*.

— *Metoda ecuației celor trei săgeți* (Clapeyron) permite determinarea săgeții într-o secțiune cînd se cunosc valorile din alte două secțiuni, respectiv (fig. 7.*l*) :

$$6E\left(\frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2}\right) = M_1\frac{l_1}{I_1} + 2M_2\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) + M_3\frac{l_2}{I_1} + 6\left(\frac{A_1 d_1}{l_1 I_1} + \frac{A_2 d_2}{l_2 I_2}\right), \qquad (7.38)$$

unde : v_1, v_2 și v_3 sînt săgețile în secțiunile *1*, *2* și *3* ;

l_1 și l_2 — deschiderile între secțiunile *1—2* și *2—3* ;

M_1, M_2 și M_3 — momentele încovoietoare în secțiunile *1*, *2* și *3* ;

I_1 și I_2 — momentele de inerție ale secțiunilor grinzii pe cele două deschideri ;

A_1 și A_2 — suprafețele diagramelor de momente ale grinzilor *1—2* și *2—3* considerate ca grinzi simplu rezemate la capete ;

d_1 și d_3 — distanțele de la centrele de greutate ale suprafețelor momentelor încovoietoare ale grinzilor *1—2* și *2—3* la secțiunile *1* și respectiv *3*, (fig. 7.*l*).

În cazul *încovoierii oblice* săgeata totală se obține însumînd vectorial săgețile după cele două principale de inerție, respectiv

$$f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (7.39)$$

Săgețile astfel calculate se compară cu cele admisibile (tabelul 7. *k*).

În cazul *solicitării compuse* de întindere cu încovoiere, aplicînd metoda suprapunerii efectelor tensiunea totală este

$$\sigma = \frac{N}{A} + K_1\frac{M_i}{W} \leqslant \sigma_{at}, \qquad (7.40)$$

unde $K_1 = \sigma_{at}/\sigma_{at}$.

De regulă $\sigma_{at} = \sigma_{at}$ și $K_1 = 1$.

În cazul încovoierii cu compresiune relația de verificare este

$$\sigma_f = \frac{N}{A_n} + \frac{M_i}{\xi W_n} \leqslant \sigma_{ac}, \qquad (7.41)$$

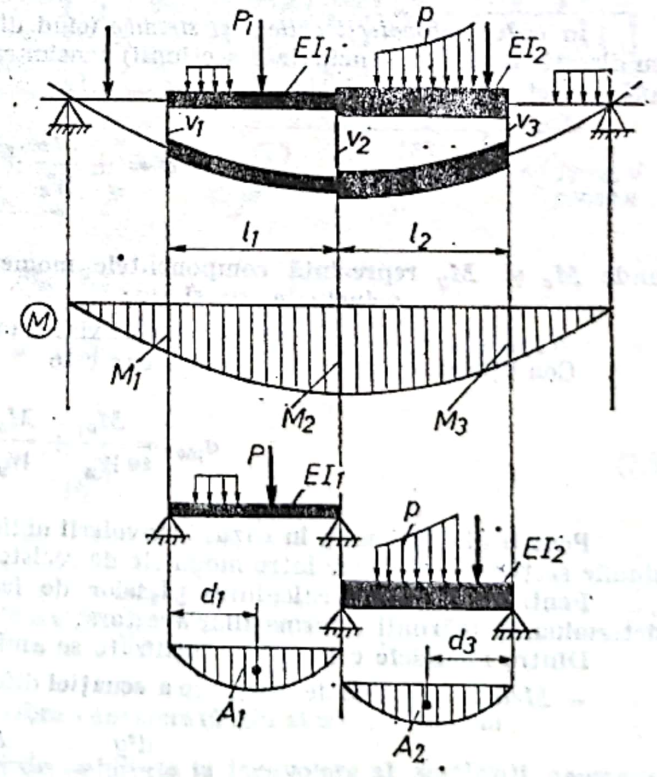
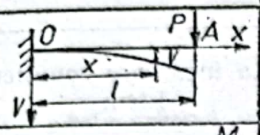
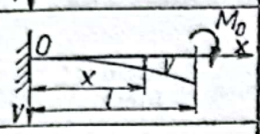
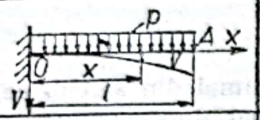
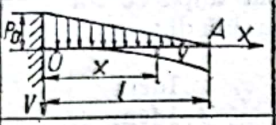
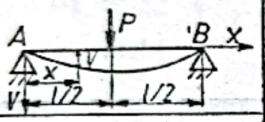
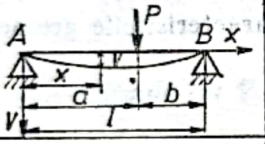
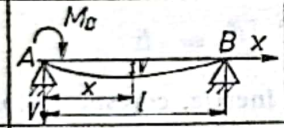
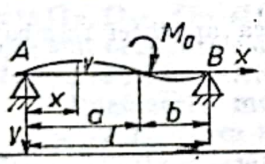
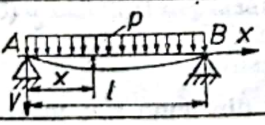
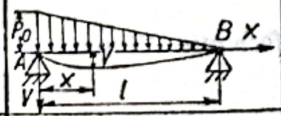
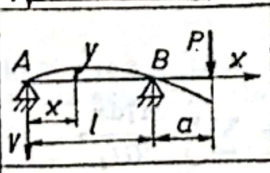
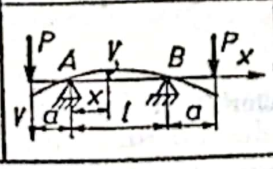


Fig. 7.l

Nr.	Încărcarea grinzii	Ecuația fibrei medii deformate	Săgeata maximă	Rotirea
1		$v=\frac{Pl^3}{6EI}\left(3\frac{x^2}{l^2}-\frac{x^3}{l^3}\right)$	$v_A=\frac{Pl^3}{3EI}$ $x=l$	$\varphi_A=\frac{Pl^2}{2EI}$ $x=l$
2		$v=\frac{M_0x^2}{2EI}$	$v_A=\frac{M_0l^2}{2EI}$ $x=l$	$\varphi_A=\frac{M_0l}{EI}$ $x=l$
3		$v=\frac{pl^4}{24EI}\left(6\frac{x^2}{l^2}-4\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$	$v_A=\frac{pl^4}{8EI}$ $x=l$	$\varphi_A=\frac{pl^3}{6EI}$ $x=l$
4		$v=\frac{p_0l^4}{120EI}\left(10\frac{x^2}{l^2}-10\frac{x^3}{l^3}+5\frac{x^4}{l^4}-\frac{x^5}{l^5}\right)$	$v_A=\frac{p_0l^4}{30EI}$ $x=l$	$\varphi_A=\frac{p_0l^3}{24EI}$ $x=l$
5		$v=\frac{Pl^3}{16EI}\left(\frac{x}{l}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$	$v_P=\frac{Pl^3}{48EI}$ $x=0{,}5l$	$\varphi_A=-\varphi_B=\frac{Pl^2}{16EI}$
6		$0<x<a;\ v=\frac{Pa^2b^2}{6lEI}\left(2\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x^3}{a^2b}\right)$ $a<x<l;\ v=\frac{Pal^2}{6EI}\left[-\frac{a^2}{l^2}+\left(2+\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{x}{l}-3\frac{x^2}{l^2}+\frac{x^3}{l^3}\right]$	$v_{max}=\frac{Pb\sqrt{(l^2-b^2)^3}}{9\sqrt{3}lEI}$ $x=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$	$\varphi_A=\frac{Pab}{6lEI}(l+b)$ $\varphi_B=-\frac{Pab}{6lEI}(l+a)$
7		$v=\frac{M_0l^2}{6EI}\left(2\frac{x}{l}-3\frac{x^2}{l^2}+\frac{x^3}{l^3}\right)$	$v_{max}=\frac{M_0l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x=0{,}423l$	$\varphi_A=\frac{M_0l}{3EI}$ $\varphi_B=\frac{M_0l}{6EI}$
8		$0<x<a;\ v=\frac{M_0l^2}{6EI}\left(2\frac{x}{l}-6\frac{ax}{l^2}+3\frac{a^2x}{l^3}+\frac{x^3}{l^3}\right)$ $a<x<l;\ v=\frac{M_0l^2}{6EI}\left(-3\frac{a^2}{l^2}+2\frac{x}{l}+3\frac{a^2x}{l^3}-3\frac{x^2}{l^2}+\frac{x^3}{l^3}\right)$	Dacă $a>b$ $x=\sqrt{2al-a^2-\frac{2}{3}l^2}$	$\varphi_A=\frac{M_0l}{6EI}\left(2-6\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2}\right.$
9		$v=\frac{pl^4}{24EI}\left(\frac{x}{l}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$	$v_{max}=\frac{5pl^4}{384EI}$ $x=0{,}5l$	$\varphi_A=-\varphi_B=\frac{pl^3}{24EI}$
10		$v=\frac{p_0l^4}{360EI}\left(8\frac{x}{l}-20\frac{x^3}{l^3}+15\frac{x^4}{l^4}-3\frac{x^5}{l^5}\right)$	$v_{max}=0{,}0065\frac{p_0l^4}{EI}$ $x\cong0{,}48l$	$\varphi_A=\frac{p_0l^3}{45EI}$ $\varphi_B=-\frac{7p_0l^3}{360EI}$
11		$0<x<l;\ v=\frac{Pal^2}{6EI}\left(-\frac{x}{l}+\frac{x^3}{l^3}\right)$ $l<x<l+a;\ v=\frac{Pl^3}{6EI}\left(1+\frac{a}{l}-3\frac{x}{l}-4\frac{ax}{l^2}+3\frac{x^2}{l^2}+3\frac{ax^2}{l^3}-\frac{x^3}{l^3}\right)$	$v_{max}=\frac{Pal^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x=0{,}577l$ $v=\frac{Pa^2(l+a)}{3EI}$ $x=l+a$	$\varphi_A=-\frac{\varphi_B}{2}=-\frac{Pal}{6EI}$ $\varphi_{max}=\frac{Pa}{6EI}(2l+3a)$
12		$0<x<l;\ v=\frac{Pal^2}{2EI}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{x}{l}\right)$ $l<x<l+a;\ v=\frac{Pl^3}{6EI}\left(1-3\frac{x}{l}-3\frac{ax}{l^2}+3\frac{x^2}{l^2}+3\frac{ax^2}{l^3}-\frac{x^3}{l^3}\right)$	$v=-\frac{Pal^2}{8EI}$ $x=0{,}5l$ $v=\frac{Pa^2(3l+2a)}{6EI}$ $x=l+a$	$\varphi_A=-\frac{Pal}{2EI}$ $\varphi_{max}=\frac{Pa}{2EI}(l+a)$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7, k

Elemente de construcție	Valoarea maximă (f: l) la construcții		Observații
	definitive	provizorii	
Elemente din planșeele intermediare	1/250	1/200	La încărcare completă
Elemente din planșeele podurilor la clădiri	1/200	1/150	Idem
Elemente de șarpante (grinzi principale, pene, căpriori etc.) la acoperișuri cu învelitoare din carton, eternit, tablă, țiglă etc.	1/200	1/150	Idem
Astereală	1/150	1/150	Idem
Elementele doliilor unde este posibilă stagnarea apei	1/400	1/300	Idem
Planșee de lemn între etaje	1/600	1/600	Idem
Elemente de planșee cu tavane tencuite	1/350	1/350	Numai din sarcini ce apar după ce s-a tencuit
Grinzi principale la podurile de cale ferată	1/500	—	Sarcini din convoi
Poduri de drumuri cu circulație auto			
Grinzi cu zăbrele și grinzi principale	1/300	1/250	Idem
Elementele căii	1/180	1/120	Idem
Grinzi principale și elementele căii, cînd calea este acoperită cu asfalt	1/250	—	Idem

unde M_i, N, A_n și W_n sînt momentul încovoietor, forța axială și caracteristicile geometrice ale secțiunii considerate, iar

$$\xi = 1 - \frac{\lambda^2}{3100}\,\frac{\sigma_c}{\sigma_{ac}},$$

în care λ este coeficientul de zvelteță în raport cu axa principală de inerție, corespunzătoare solicitării de încovoiere; iar $\sigma_c = N_c/A_{brut}$.

Pentru excentricități mici, efectul compresiunii cu posibilitatea apariției flambajului este mai puternic iar verificarea se face cu relația:

$$\sigma = \frac{N_c}{\varphi A} + \frac{M_i}{W} \leqslant \sigma_{ac}. \tag{7.42}$$

În calculul deformațiilor structurilor produselor finite, realizate din lemn sau materiale pe bază de lemn se utilizează *metodele energetice*:

a — *Metoda egalării lucrului mecanic exterior cu energia de deformație* (Clapeyron) are expresia analitică

$$L_{ext} = U,$$

respectiv

$$\sum \frac{P_i \delta_i}{2} + \sum \frac{C_i \varphi_j}{2} = \sum \int \frac{N^2\,dx}{2EA} + \int \alpha \cdot \frac{T^2\,dx}{2GA} + \sum \int \frac{M_i^2 dx}{2EI_z} + \sum \int \frac{M_i^2 dx}{2GI_t}, \tag{7.43}$$

unde P_i și C_i sînt forțele, respectiv cuplurile exterioare;

δ_i și φ_j — deplasarea, respectiv rotirea și direcția forțelor P_i și cuplurilor C_j;

N, T, M_i și M_t — eforturile din secțiunea curentă;

α — coeficient ce ține cont de forma secțiunii (pentru dreptunghi $\alpha = 1{,}2$ iar pentru cerc $\alpha = 1{,}185$).

Scanned with OKEN Scanner

b — *Metoda lui Castigliano*, care arată că deplasarea în punctul și pe direcția unei forțe este egală cu derivata parțială a lucrului mecanic în raport cu acea forță, respectiv,

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} = \sum \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F_k} dx + \sum \int \alpha \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial F_k} dx + \\ + \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial F_k} dx + \sum \int \frac{M_t}{GI_k} \frac{\partial M_t}{\partial F_k} dx, \tag{7.44}$$

unde F_k este sarcina generalizată (forța sau cuplu) din punctul și pe direcția deplasării căutate.

În cazul cînd într-un punct al unei structuri, unde se calculează deplasarea sau rotirea, lipsește forța F_k se pune una fictivă $F_0 = 0$, iar deplasarea va fi:

$$\Delta_k = \left(\frac{\partial U}{\partial F_0} \right)_{F_0=0}. \tag{7.45}$$

c — *Metoda lui Mohr-Maxwell*, a cărei expresie este

$$\Delta_k = \sum \int \frac{N n_k}{EA} dx + \sum \int \alpha \frac{T t_k}{GA} dx + \sum \int \frac{M_i m_{ik}}{EI_z} dx + \sum \int \frac{M_t m_{tk}}{GI_t}, \tag{7.46}$$

unde n_k, t_k, m_{ik} și m_{tk} sînt eforturile, forță axială, forța tăietoare, moment încovoietor și moment de torsiune din secțiunea curentă produse de o sarcină unitară, forță sau cuplu, ce acționează în punctul și pe direcția deplasării căutate.

d — *Regula lui Vereșceaghin* de înmulțire a diagonalelor respectiv

$$\Delta_k = \sum \frac{\Omega_N n_{kG}}{EA} + \sum \frac{\Omega_T t_{kG}}{GA} + \sum \frac{\Omega_{Mi} m_{ikG}}{EI_z} + \sum \frac{\Omega_{Mt} m_{tkG}}{GI_t}, \tag{7.47}$$

în care Ω_N, Ω_{Mi}, Ω_T și Ω_{Mt} sînt suprafețele diagramelor de eforturi secționale iar n_{kG}, t_{kG}, m_{ikG} și m_{tkG} sînt ordonatele diagramelor de eforturi datorită sarcinii unitare în punctul și pe direcția deplasării căutate, calculate în dreptul centrelor de greutate a diagramelor de eforturi.

Pe lîngă aceste metode se utilizează cu succes și metoda forțelor, metoda deplasărilor ș.a.

Pentru ridicarea nedeterminărilor sistemelor de bare se utilizează aceleași metode ca și pentru calculul deplasărilor.

În cazul solicitărilor dinamice cu șoc, se utilizează metoda, coeficientului de impact ψ, respectiv mărimile dinamice (tensiuni, deformații, deplasări) se obțin din cele statice înmulțite cu coeficientul ψ a cărei expresie este

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{st}}}, \tag{7.48}$$

unde H este înălțimea de cădere a sarcinii iar f_{st} este săgeata statică produsă de sarcina care cade dar acționînd static.

II. APLICAȚII

7.1. Pentru sprijinirea unei stavile se folosesc stîlpi înclinați din lemn de secțiune circulară cu diametrul $d = 15$ cm (fig. 7.1). Să se calculeze distanța dintre stîlpi știind că se admite $\sigma_{ac} = 25$ daN/cm². În calcule se neglijează posibilitatea pierderii stabilității stîlpilor.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Presiunea maximă exercitată de apă este

$$p_{max} = \gamma H = 1000 \cdot 3 = 3000 \text{ daN/cm}^2 = 30000 \text{ N/m}^2.$$

Dacă se consideră distanța dintre stîlpi ca fiind x, forța rezultantă exercitată de presiunea apei este

$$F_p = \frac{1}{2} \cdot 30000 \cdot 3 \cdot x = 45000\, x[\text{N}] = 4500\, x \text{ [daN]}.$$

și acționează la 1 m de la baza stăvilarului.

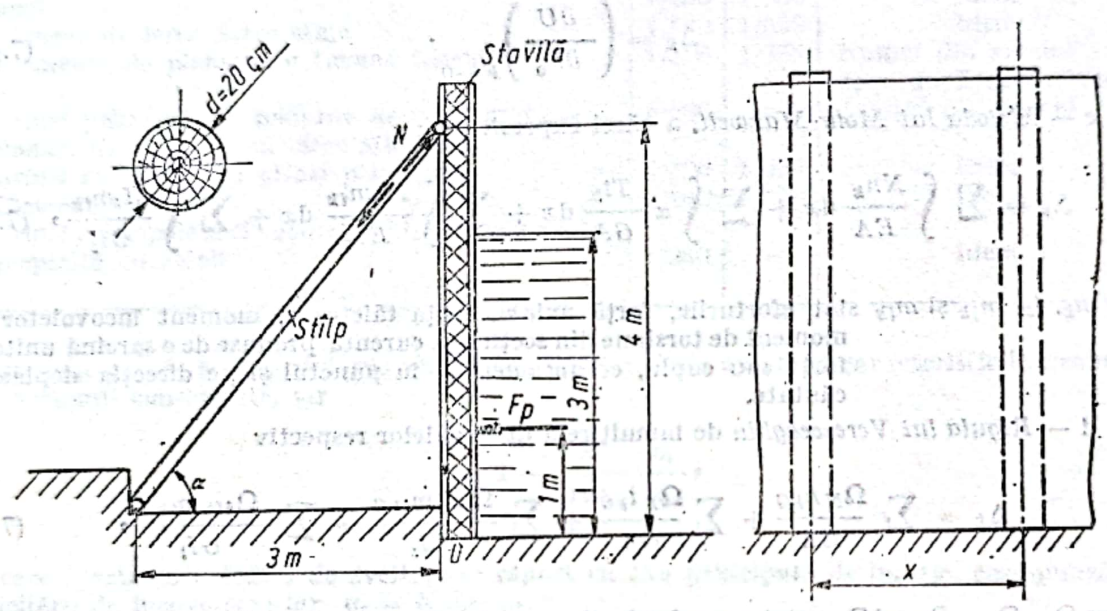


Fig. 7.1

Din suma de momente față de punctul O se obține

$$N_l \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 4500\, x \cdot 1,$$

unde $N_l = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_{ac}$ este forța capabilă a unui stîlp.

După înlocuiri rezultă $x = 1{,}88$ m.

În relația de mai sus s-a înlocuit $\cos \alpha = 3/5 = 0{,}6$.

7.2. Sprijinirea unui batardou se realizează cu stîlpi de lemn de lungime mică așezați din 3 în 3 m (fig. 7.2). Se cere să se calculeze diametrul stîlpilor dacă se dă $\sigma_{ac} = 30$ daN/cm². În calcule se neglijează posibilitatea pierderii stabilității stîlpilor.

Rezolvare. Presiunea maximă a apei este la baza batardoului și este egală cu

$$p_{max} = \gamma H = 1000 \cdot 2 = 2000 \text{ daN/cm}^2 = 20000 \text{ N/m}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forța rezultantă produsă de apă pe distanța de 3 m între stîlpi este

$$F_p = \frac{1}{2} \cdot 20000 \cdot 2 \cdot 3 = 60000 \text{ N} = 6000 \text{ daN}.$$

Din suma de momente față de punctul O se obține

$$N \cdot 3 = F_p \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 6000 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 4000,$$

de unde rezultă $N = \frac{4000}{3}$ [daN].

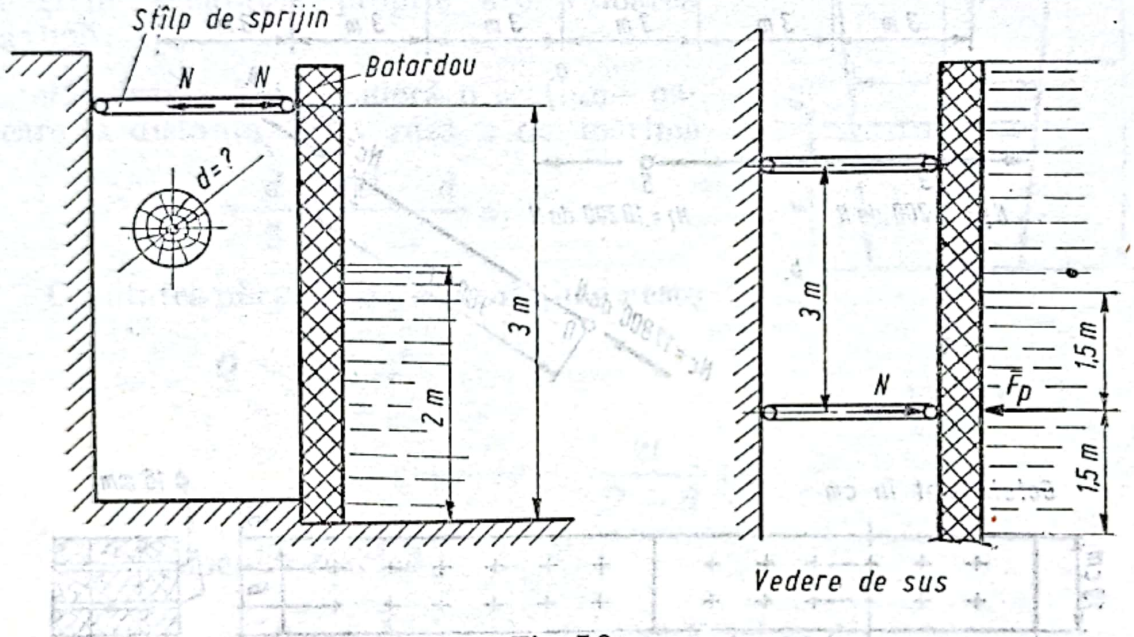


Fig. 7.2

În relația de mai sus s-a considerat N forța din stîlpul de sprijin iar forța F_p ca acționînd la distanța $H/3 = \frac{1}{3} \cdot 2$ m.

Stîlpii de sprijin sînt supuși la compresiune. Din condiția de rezistență la compresiune rezultă

$$A_{nec} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{N}{\sigma_{ac}} = \frac{4000}{3 \cdot 30} = 44{,}5 \text{ cm}^2,$$

de unde se obține $d \geq 7{,}5$ cm.

7.3. Să se dimensioneze talpa inferioară a grinzii cu zăbrele din figura 7.3, la efortul din panoul *3—8* și să se verifice în zona slăbirii maxime din dreptul îmbinării de prelungire a tălpii inferioare.

Rezolvare. Dimensionarea tălpii din panoul 3—8.

Aria necesară este

$$A_{nec} = k_{sl} \frac{N_t}{\sigma_{at}},$$

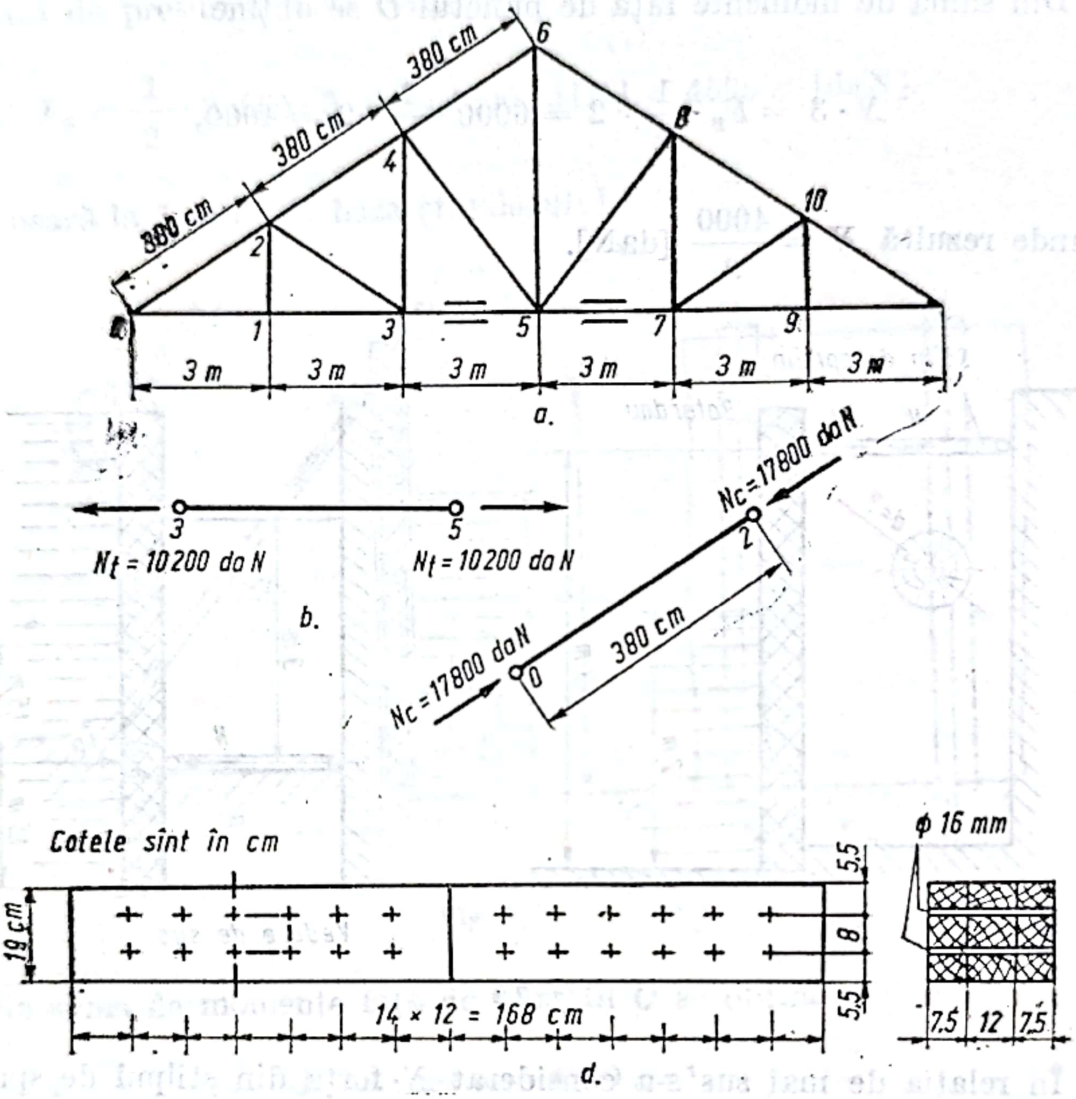


Fig. 7.3

unde $k_{sl} = 1{,}5$ (coeficient ce ţine cont de slăbirea secţiunii). Înlocuind se obţine

$$A_{nec} = 1{,}5 \frac{10200}{70} = 219 \text{ cm}^2.$$

Se alege secţiunea 12.19 cm² cu $A_{ef} = 228$ cm².

Verificarea la zona slăbirilor maxime.

Ca urmare a buloanelor de fixare aria se micşorează

$$A_{net} = A_{br} - A_{sl} = 12 \cdot 19 - 4.1{,}6 \cdot 12 = 151{,}2 \text{ cm}^2.$$

Tensiunea efectivă va fi

$$\sigma_{ef} = \frac{N_t}{A_{net}} = \frac{10200}{151{,}2} = 67 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{at} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Slăbirile s-au calculat pe 20 cm luînd în considerare patru buloane care se cumulează pe această distanţă.

7.4. O bară dreaptă confecţionată dintr-un buştean, care şi-a păstrat conicitatea naturală, are lungimea l şi diametrele bazelor d şi D şi este solicitată axial de o forţă P (fig. 7.4). Materialul are greutatea specifică γ. Se cere să se determine raza secţiunii în care tensiunea normală produsă atît de forţa P cît şi de greutatea proprie are valoarea maximă.

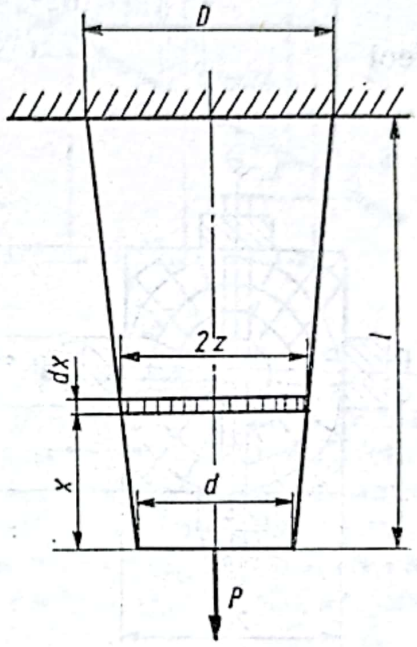


Fig. 7.4

Rezolvare. Se consideră o secţiune oarecare la distanţa x cu raza z de mărime

$$z = \frac{d}{2} + \frac{D-d}{2l}\,x.$$

Greutatea părţii de bară de înălţime x este

$$Q = \pi\gamma \int_0^x z^2\,\mathrm{d}x,$$

unde $dx = \dfrac{2l}{D-d}\,\mathrm{d}z.$

După înlocuiri rezultă

$$Q = \frac{2\pi\gamma l}{D-d} \int_{d/2}^{z} z^2\,\mathrm{d}x = K(8z^3 - d^3),$$

unde s-a notat

$$K = \frac{\pi\gamma l}{12(D-d)}.$$

În secţiunea x forţa axială este $N = P + Q$ iar tensiunea normală are expresia

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P+Q}{\pi z^2} = \frac{P - Kd^3}{z^2} + \frac{8K}{\pi}\,z.$$

Condiţia de extrem pentru tensiunea σ este

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi}\left[8K - 2\,\frac{P - Kd^3}{z^3}\right] = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se obține

$$z = \sqrt[3]{\frac{P - d^3K}{4K}}.$$

Condiția de maxim este îndeplinită, căci

$$\frac{d^2\sigma}{dz^2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{6(P - Kd^3)}{z^4}\right] > 0,$$

deci

$$P > Kd^3.$$

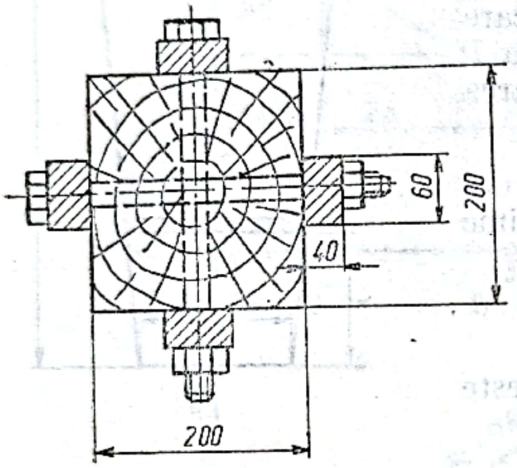


Fig. 7.5

7.5. Un stîlp de înălțime mică are de suportat o sarcină de compresiune centrică $P = 1300$ kN. Stîlpul este alcătuit din lemn de secțiune $20 \cdot 20$ cm² și din patru șine de oțel, fiecare avînd secțiunea 6.4 cm² (fig. 7.5). Asamblarea piesei de lemn cu cele metalice este făcută ca în figura 7.5, cu buloane de diametru $d = 2$ cm, astfel încît cele două materiale lucrează împreună. Se cere să se calculeze cum se împarte sarcina între secțiunile de oțel și de lemn și tensiunile din cele două materiale. Se mai dau: $E_L = 10^5$ daN/cm² și $E_{OL} = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm².

Rezolvare. Secțiunea netă a lemnului este

$$A_L = 20(20 - 2) = 360 \text{ cm}^2,$$

iar a oțelului este egală cu

$$A_{OL} = 2.4 \cdot 6 + 2 \cdot 4(6 - 2) = 80 \text{ cm}^2,$$

căci dispunerea buloanelor este alternativă pe înălțimea piesei.

Sarcinile care le preiau cele două materiale vor fi :

$$P_L = P\frac{A_L E_L}{A_L E_L + A_{OL} E_{OL}} = 132000\frac{360 \cdot 10^5}{360 \cdot 10^5 + 80 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} = 22\,300 \text{ daN};$$

$$P_{OL} = P\frac{A_{OL} E_{OL}}{A_L E_L + A_{OL} E_{OL}} = 13\,2000\frac{80 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{360 \cdot 10^5 + 80 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} = 108\,700 \text{ daN}.$$

Tensiunile normale din cele două materiale vor fi egale cu

$$\sigma_L = \frac{P_L}{A_L} = \frac{22\,300}{360} = 64{,}7 \text{ daN/cm}^2 \text{ și } \sigma_{OL} = \frac{P_{OL}}{A_{OL}} = \frac{108\,700}{80} =$$

$$= 1\,360 \text{ daN/cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.6. Grinda orizontală a unei rampe de descărcare a bușteniloi (fig. 7.6) are rigiditatea la încovoiere foarte mare ($EI \to \infty$) și la început se sprijinea numai pe reazemul 1 și stîlpul 4 din fontă cu secțiunea $A_4 = 100$ cm². Se montează apoi cei doi stîlpi de lemn 2 și 3, de secțiune circulară cu diametrul $d = 25$ cm. Cu cîte procente va putea să crească acum forța P, pentru ca stîlpul de fontă să rămînă la fel de solicitat? Se dau $E_{Fc} = 10^6$ daN/cm² și $E_L = 10^5$ daN/cm².

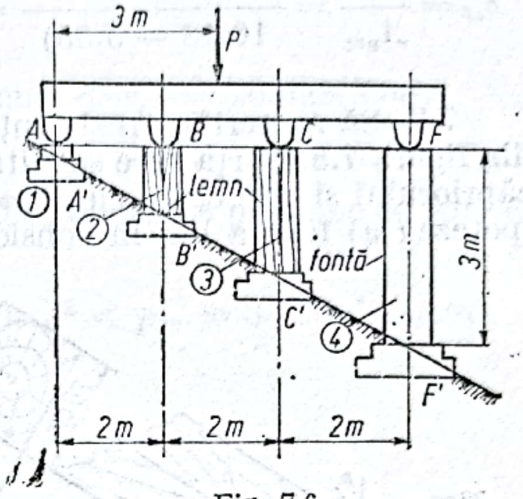


Fig. 7.6

R. $\Delta P = 49\%$.

7.7. Se consideră două grinzi din lemn de brad de lățime 16 cm, îmbinate cap la cap cu ajutorul altor bare de legătură, de aceeași lățime cu grinzile. Îmbinarea se face cu ajutorul unor pene de stejar. Asupra acestei îmbinări acționează forța $P = 8000$ daN (fig. 7.7). Să se determine cotele a, b și c și să se verifice celelalte dimensiuni ale îmbinării. Se dau: pentru brad, rezistența la tracțiune paralelă cu fibrele $\sigma_{at\parallel} = 100$ daN/cm²; rezistența la forfecare în lungul fibrelor $\tau_{af\parallel} = 8$ daN/cm²; presiunea admisibilă de strivire în lungul fibrelor, $p_{a\parallel} = 100$ daN/cm²; iar pentru stejar, rezistența la forfecare perpendicular pe fibre, $\tau_{a\perp} = 10$ daN/cm² și presiunea admisibilă de strivire perpendicular pe fibre $p_{a\perp} = 30$ daN/cm².

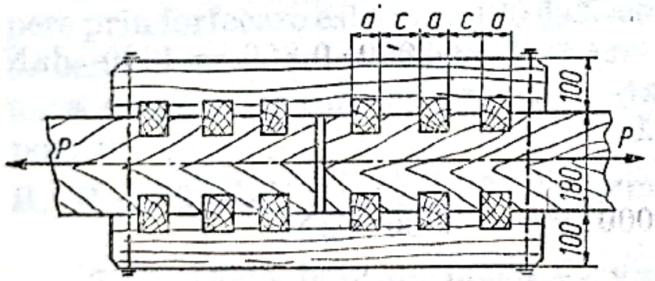


Fig. 7.7

Rezolvare. Dimensiunea a se obține din condiția de rezistență la forfecare a penelor de stejar:

$$A_1 = 6 \cdot a \cdot 16 = \frac{P}{\tau_{a\perp}} =$$

$$= \frac{8000}{10} = 800 \text{ cm}^2,$$

de unde rezultă $a = 8{,}33$ cm

Din condiția de rezistență la strivire a penelor se obține cota b:

$$A_2 = 6 \cdot 0{,}5\ b \cdot 16 = \frac{P}{p_{a\perp}} = \frac{8000}{30} = 267 \text{ cm}^2,$$

de unde rezultă $b \cong 5{,}55$ cm.

Pentru ca grinda de brad să nu se foarfece între două pene se obține cota c, respectiv:

$$A_3 = 6 \cdot c \cdot 16 = \frac{P}{\tau_{a\parallel}} = \frac{8000}{8} = 1000 \text{ cm}^2,$$

de unde rezultă $c = 10{,}41$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

În secțiunea slăbită de lăcașele pentru pene, prin solicitarea de tracțiune apare o tensiune egală cu

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A_{net}} = \frac{8000}{16(18 - 5{,}55)} = 40{,}16 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{a||} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

7.8. Să se verifice rezistența îmbinării prin chertare cu prag simplu din figura 7.8. Forța care solicită îmbinarea este dirijată în lungul fibrelor căpriorului și este egală cu $P = 5000$ daN. Verificarea se va face în două ipoteze : a) fără a lua în considerare forța de frecare și b) cu luarea în considerare a forței de frecare ; coeficientul de frecare fiind $\mu_0 = 0{,}5$. Se cunosc rezistențele admisibile la forfecarea paralelă cu fibrele $\tau_{0||} = 8$ daN/cm², la strivire paralelă cu fibrele $p_{a||} = 40$ daN/cm², iar pe direcție perpendiculară $p_{a\perp} = 20$ daN/cm².

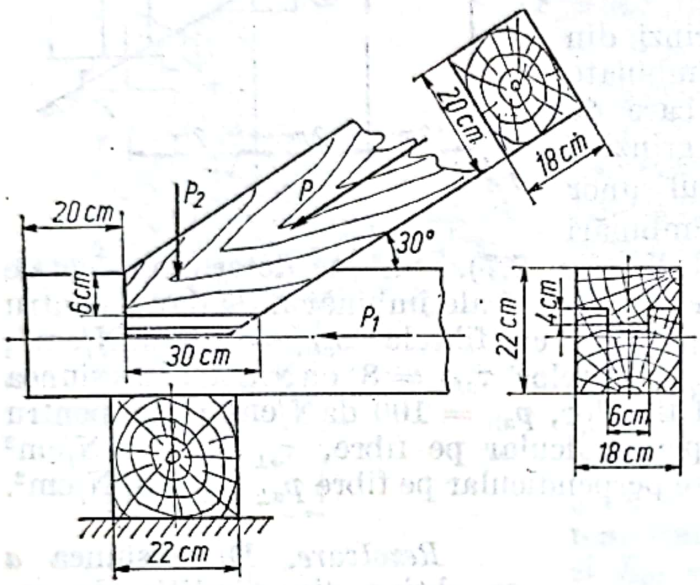


Fig. 7.8

Rezolvare. Forța P_1 ce solicită îmbinarea în lungul grinzii este

$$P_1 = P \cos 30° = 5000 \cdot 0{,}866 = 4330 \text{ daN},$$

iar în direcție normală pe grindă

$$P_2 = P \sin 30° = 5000 \cdot 0{,}5 = 2500 \text{ daN}.$$

a. Tensiunea tangențială, care apare ca urmare a solicitării de forfecare a pragului, este

$$\tau_{||} = \frac{P_1}{A_{1f}} = \frac{4330}{(18 + 4 + 4)\,20} = 8{,}32 \text{ daN/cm}^2 > \tau_{a||} = 8 \text{ daN/cm}^2.$$

b. Dacă se ține cont de frecare, forța ce produce forfecarea pragului va fi

$$P_1' = P_1 - \mu_0 P_2 = 4330 - 0{,}5 \cdot 2500 = 3080 \text{ daN},$$

iar tensiunea tangențială

$$\tau_{||}' = \frac{P_1'}{A_{1f}} = \frac{3080}{520} = 5{,}97 \text{ daN/cm}^2 < \tau_{a||} = 8 \text{ daN/cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că în cazul în care se ține cont de forța de frecare nu este depășită tensiunea admisibilă de forfecare a lemnului în lungul fibrelor.

Între căprior și grindă forța P_2 produce o strivire, presiunea maximă fiind :

$$p_{max\perp} = \frac{P_2}{A_2} = \frac{2500}{12 \cdot 30} = 6{,}94 \text{ daN/cm}^2 < p_{a\perp} = 20 \text{ daN/cm}^2.$$

Totodată forța P_1 produce pe suprafața pragului o presiune de contact

$$p_\alpha = \frac{P_1}{A_3} = \frac{4330}{18 \cdot 6 + 6 \cdot 4} = 32{,}8 \text{ daN/cm}^2 < p_{a\alpha} = 35{,}55 \text{ daN/cm}^2.$$

În relația de mai sus s-au înlocuit

$$p_{a\alpha} = \frac{p_{a\parallel}}{1 + \left(\frac{p_{a\parallel}}{p_{a\perp}} - 1\right) \sin^3 \alpha} = \frac{40}{1 + \left(\frac{40}{20} - 1\right) \sin^3 30^\circ} = 35{,}55 \text{ daN/cm}^2.$$

7.9. Pentru încercarea la forfecare a lemnului în lungul fibrelor se utilizează epruvete de forma celor prezentate în figura 7.9. Știind că tensiunea de rupere prin forfecare este $\tau_{fr} = 120$ daN/cm² se cere să se calculeze forța P și presiunea de contact dintre epruvetă și dispozitiv.

R. $P = 720$ daN ; $p_{s\,max} = 360$ daN/cm².

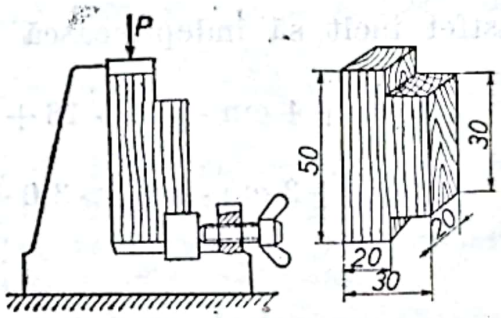


Fig. 7.9

7.10. Două bare de molid de dimensiuni $h \cdot b$, solicitate de forța P, sînt îmbinate ca în figura 7.10. Se cere să se calculeze forța P și dimensiunea a. Se dau : $h = 16$ cm, $b = 12$ cm, rezistența la tracțiune paralelă cu fibrele $\sigma_{at\parallel} = 100$ daN/cm², rezistența la forfecare paralelă cu fibrele $\tau_{af\parallel} = 8$ daN/cm² și presiunea de contact (strivire) $p_{a\parallel} = 100$ daN/cm².

R. $P = 4800$ daN : $a = 50$ cm.

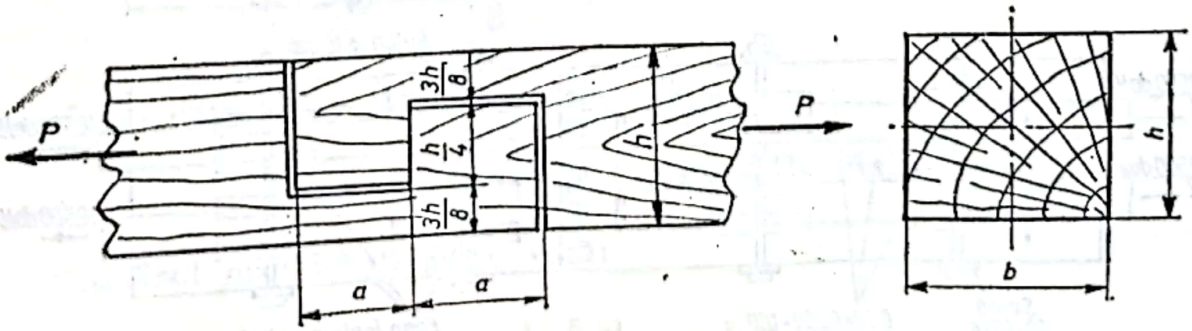


Fig. 7.10

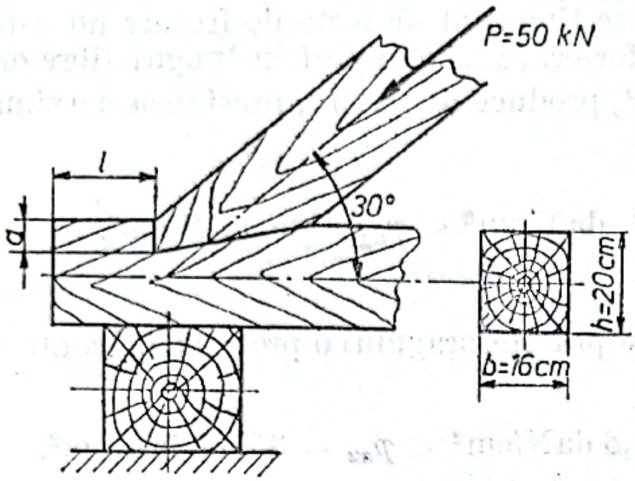


Fig. 7.11

7.11. Îmbinarea unei grinzi cu căpriorul unui acoperiș este solicitată de forța $P = 50$ kN (fig. 7.11). Se cere să se calculeze dimensiunile a și b ale îmbinării, știind că $p_{a30°} = 80$daN/cm² iar $\tau_{af\|} = 10$ daN/cm².

R. $a = 3{,}4$ cm; $l = 27$ cm.

7.12. Să se calculeze îmbinarea de prelungire a tălpii inferioare de la ferma cu zăbrele din figura 7.12, *a*. Îmbinarea se realizează în două variante : a) cu pene inelare netede (fig. 7.12, *c* și b) cu buloane (fig. 7.12, *d*).

Rezolvare. a. În cazul utilizării penelor netede (fig. 7.12, *c*) acestea se iau de dimensiuni :

$$d_p = 16 \text{ cm}; \; b_p = 3{,}0 \text{ cm}, \text{ și } t_p = 0{,}35 \text{ cm},$$

astfel încît să îndeplinească condițiile constructive [32] :

$$h \geqslant d_p + 4 \text{ cm} \rightarrow h > 16 + 4 = 20 \text{ cm}; \text{ deci } h = 30 \text{ cm} > 20 \text{ cm};$$

$$h_0 \geqslant b_p + 3 \text{ cm} \rightarrow h_0 > 3{,}0 + 3{,}0 = 6{,}0 \text{ cm}; \; h_0 = 6{,}8 \text{ cm} > 6{,}0 \text{ cm}$$

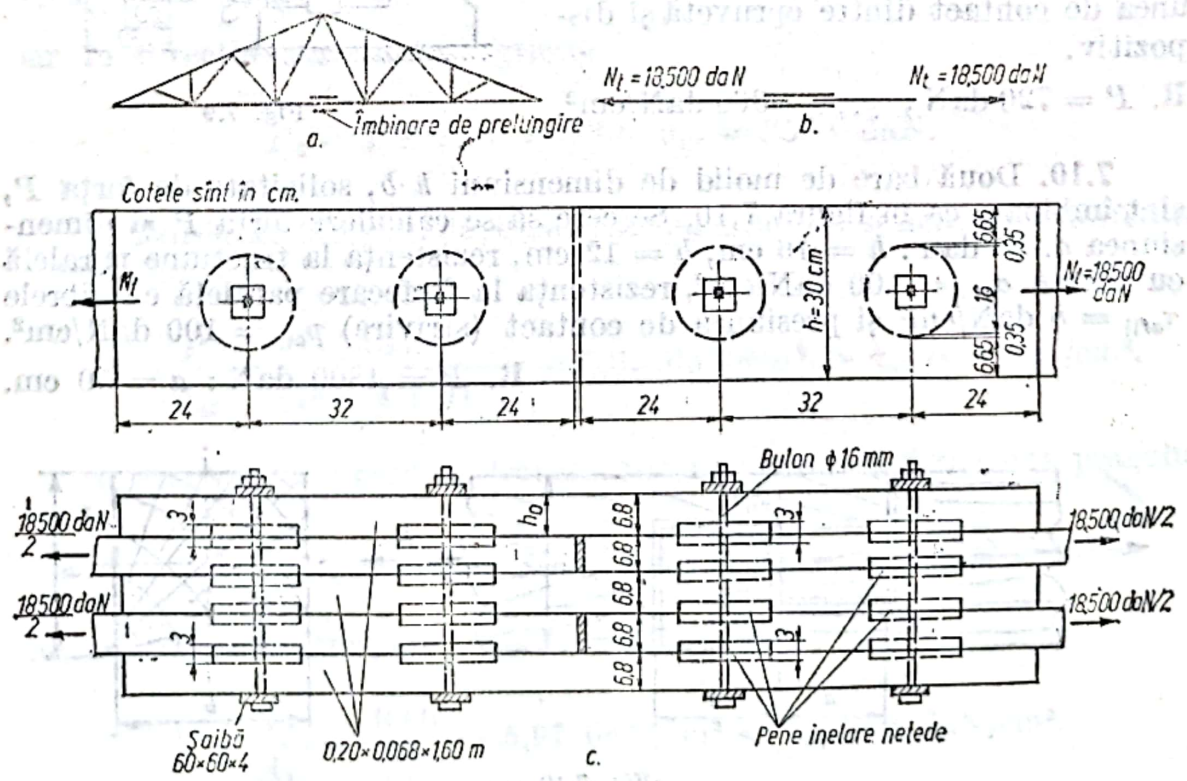


Fig. 7.12 *a*, b. c

Pentru strîngerea penelor se aleg buloane de 16 mm diametru cu şaibe 60 ·60 ·4 mm.

Pentru a calcula numărul de pene se calculează forţa capabilă a unei pene.

Forţa capabilă a unei pene inelare din condiţia de strivire a lemnului este

$$F_{1ps} = b_p d_p p_{sa} = 3 \cdot 16 \cdot 80 = 3840 \text{ daN}.$$

Forţa capabilă a unei pene inelare din condiţia de forfecare a lemnului este dată de

$$F_{1pf} = \frac{\pi d_p^2}{2} \cdot \tau_a,$$

unde $d_p = 16$ cm; $\tau_a = \dfrac{\tau_{af}}{1 + \beta l_f / e}$;

τ_{af} este rezistenţa la forfecare în lungul fibrelor;

β — coeficient de neuniformitate a distribuţiei tensiunilor tangenţiale pe suprafaţa de forfecare şi care este $\beta = 0{,}125$ pentru îmbinările care transmit eforturi de compresiune şi $\beta = 0{,}250$ pentru îmbinările care transmit eforturi de întindere;

l — lungimea planului de forfecare, în cm, care de regulă se ia $l_f = d_p$;

e — braţul de pîrghie al cuplului de forfecare, în cm, care se ia: $e = 0{,}5$ b pentru dulapi cu pene inelare netede pe o singură parte şi $e = 0{,}25$ b pentru dulapi cu pene inelare netede pe ambele părţi; b fiind grosimea dulapului.

În cazul analizat $\tau_{af} = 20$ daN/cm²; $\beta = 0{,}25$; $l_f = d_p = 16$ cm; $e = 0{,}25 \cdot 6{,}8 = 1{,}7$ cm şi

$$\tau_a = \frac{20}{1 + 0{,}25 \dfrac{16}{1{,}7}} = 5{,}98 \text{ daN/cm}^2$$

iar

$$F_{1pf} = \frac{\pi \cdot 16^2}{2} \cdot 5{,}98 = 2410 \text{ daN}.$$

Deci forţa capabilă a unei pene este

$$F_{1p\,cap} = \min (F_{1ps}, F_{1pf}) = 2410 \text{ daN}.$$

Numărul necesar de pene va fi

$$n = \frac{N_t}{F_{1p\,cap}} = \frac{18\,500}{2410} \cong 7{,}70 \cong 8 \text{ pene}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Datorită slăbirii tensiunea maximă din talpa inferioară este

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{net}},$$

unde

$$N_t = 18\,500 \text{ daN}; \quad A_{net} = A_{brut} - A_{slab} = 2 \cdot 6{,}8 \cdot 30 - 4 \cdot 25 - 1{,}6 \cdot 6{,}8 \cdot 2 = 286{,}2 \text{ cm}^2,$$

deci

$$\sigma_{max} = \frac{18500}{286{,}2} = 64{,}7 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{at} = 70 \text{ daN/cm}^2.$$

Penele se amplasează pe un singur rînd la distanța $e_p = 2d_p = 2 \cdot 16 = 32$ cm. Distanța de la centrul penelor pînă la marginea ecliselor se ia $1{,}5\ d_p = 1{,}5 \cdot 16 = 24$ cm.

b. În cazul utilizării buloanelor (fig. 7.12, *d*) diametrul acestora se recomandă să fie

$$d_b = \left(\frac{1}{30} \ldots \frac{1}{40}\right) b_s,$$

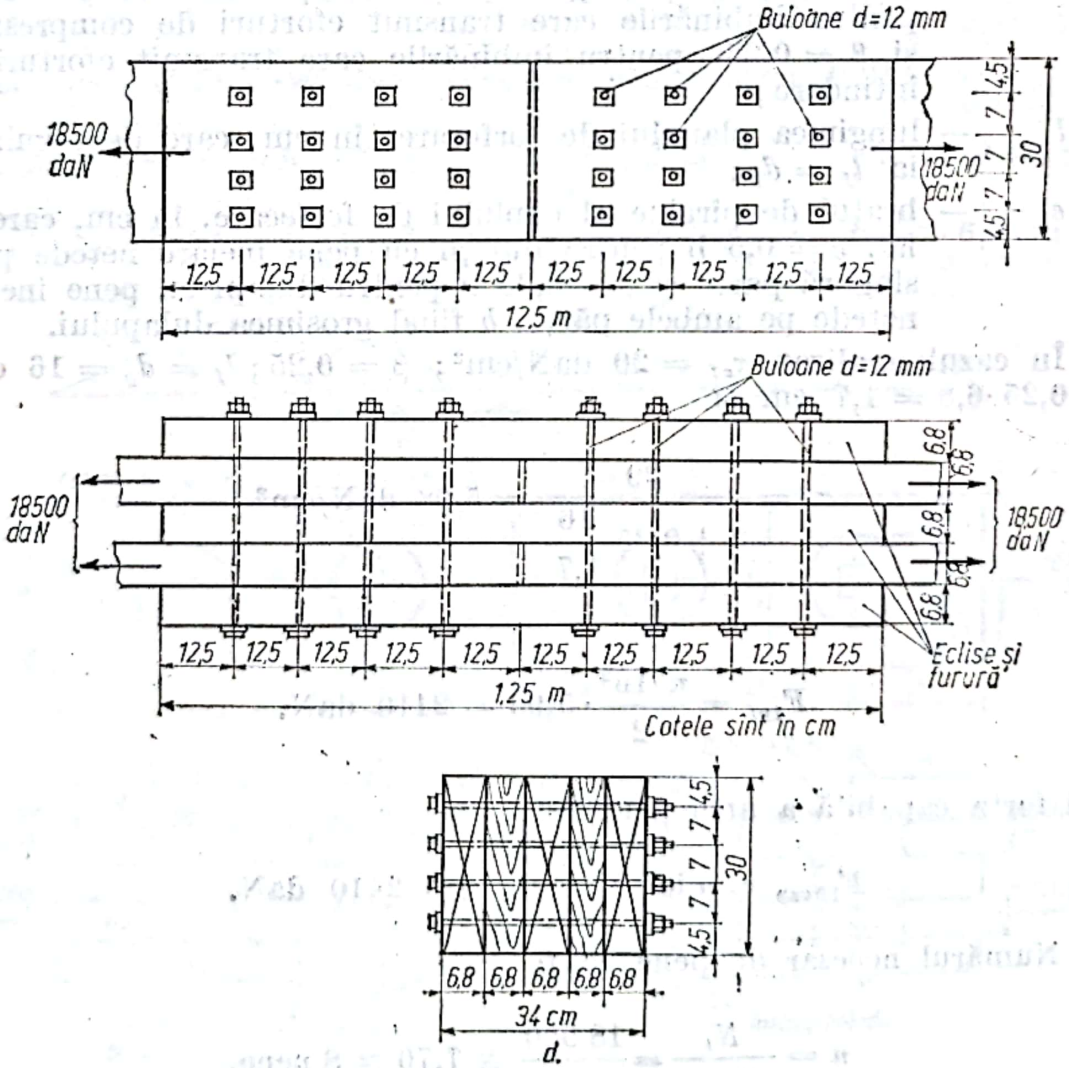


Fig. 7.12.d

unde b_s este grosimea pachetului strîns ; $b_s = 5 \cdot 6{,}8 = 34$ cm, deci

$$d_b = \left(\frac{1}{30} \ldots \frac{1}{40}\right) 34 = 1{,}13 \ldots 0{,}85 \text{ cm.}$$

Se adoptă $d_b = 12$ mm.

Forța capabilă a unei tije a bulonului este :

— din condiția de rezistență la strivire a elementelor centrale

$$F_{1bs}^{c} = 40\ cd_b = 40 \cdot 6{,}8 \cdot 1{,}2 = 326 \text{ daN} ;$$

— din condiția de rezistență la strivire a elementelor marginale

$$F_{1bs}^{m} = 50\ ad_b = 50 \cdot 6{,}8 \cdot 1{,}2 = 408 \text{ daN} ;$$

— din condiția de încovoiere a tijei bulonului

$$F_{1b}^{f} = 200\ d_b^2 = 200 \cdot 1{,}2^2 = 288 \text{ daN},$$

unde c este grosimea cea mai mică a piesei centrale, în cm;

a — grosimea celei mai subțiri piese marginale, în cm.

Deci forța capabilă a unui bulon într-o secțiune este

$$F_{1b}^{cap} = \min\ (F_{1bs}^{c},\ F_{1bs}^{m},\ F_{1b}^{f}) = 288 \text{ daN},$$

în cazul analizat sînt patru secțiuni, deci

$$F_{1b\,tot}^{cap} = 4 \cdot 288 = 1152 \text{ daN},$$

Numărul necesar de buloane va fi

$$n = \frac{N_t}{F_{1b\,tot}^{cap}} = \frac{18\,500}{1\,152} = 15{,}9 \cong 16 \text{ buloane}$$

Amplasarea buloanelor este prezentată în figura 7.12, *d*, unde sînt respectate următoarele prescripții :

— distanța între axele tijelor în lungul fibrelor $l_1 = 7d = 7 \cdot 1{,}2 = 8{,}4$ cm ;

— distanța din axa tijei extreme la marginea piesei $l_2 = 7d = 8{,}4$ cm ;

— distanța între axele tijelor, tranversînd pe fibre $l_3 = 3{,}5\ d = 4{,}2$ cm ;

— distanța fibrei externe la marginea piesei $l_4 = 3d = 3{,}6$ cm.

Prin executarea găurilor pentru buloane se slăbește talpa inferioară a fermei, tensiunea maximă fiind

$$\sigma_{max} = \frac{N_t}{A_{net}} = \frac{18\,500}{2 \cdot 6{,}8 \cdot 30 - 8 \cdot 1{,}2 \cdot 6{,}8} \cong 54 \text{ daN/cm}^2 < 70 \text{ daN/cm}^2 \text{ [32]}$$

Scanned with OKEN Scanner

7.13. Să se dimensioneze îmbinarea pieselor din lemn de molid reprezentate în figura 7.13, cunoscînd că forța $P = 5250$ daN, $b = 10$ cm, $h = 18$ cm și $\alpha = 34°$.

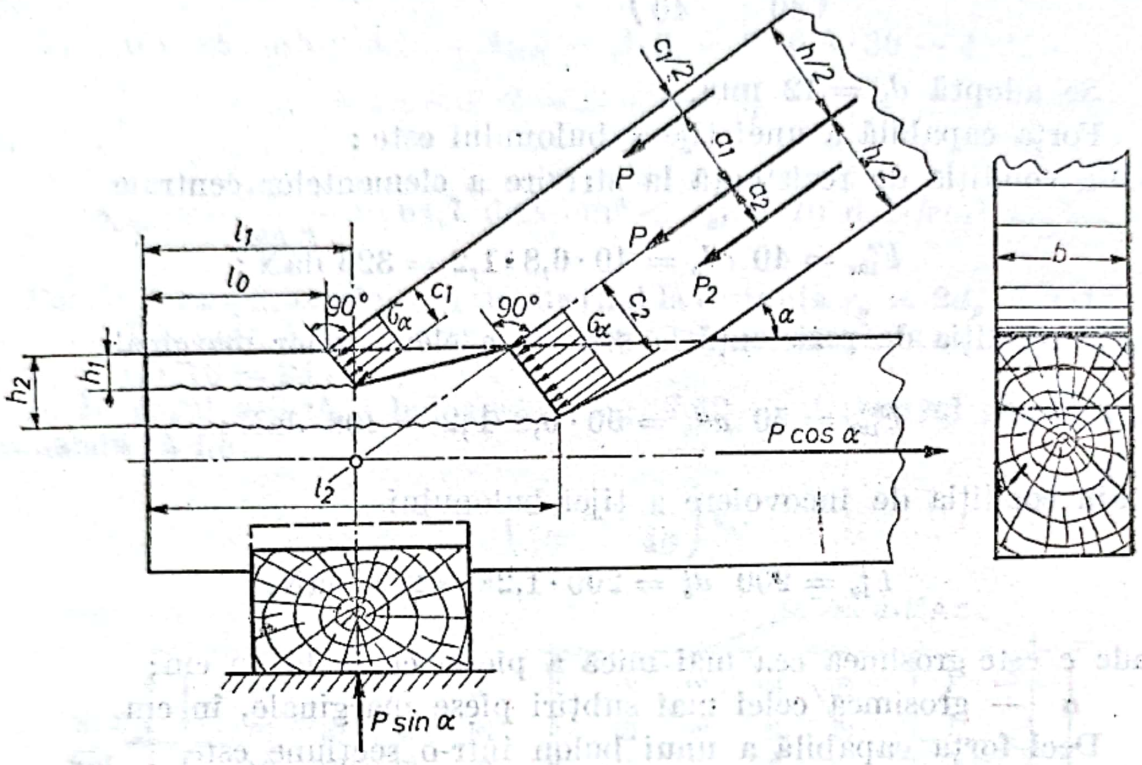


Fig. 7.13

Rezolvare. Efortul N se descompune în componentele paralele P_1 și P_2 care acționează normal asupra celor două praguri, avînd suprafețele bc_1 și bc_2. Admițînd că $c_2 = \lambda c_1$, unde $\lambda > 1$, și că presiunile sînt egale și distribuite uniform pe cele două praguri, rezultă:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{c_2}{c_1} = \lambda.$$

Pe de altă parte $P_2/P_1 = a_2/a_1$, așa încît $a_1 = \lambda_2 a_2$.
Cunoscînd că $a_1 = (h - c_1)/2$ și $a_2 = c_2/2$, rezultă din relația de mai sus

$$c_1 = \frac{h}{\lambda^2 + 1},$$

componentele efortului pe pragul c_1 fiind

$$P_1 = \frac{P}{\lambda + 1}.$$

Pragurile executate în piesa orizontală sînt supuse la strivire oblică față de fibrele lemnului. Conform prescripțiilor oficiale, se ia pentru rezistența admisibilă valoarea

$$\sigma_{a,\alpha} = \frac{100}{1 + \frac{17}{3}\sin^3\alpha} = 50 \text{ daN/cm}^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

presiunea efectivă fiind

$$\sigma_\alpha = \frac{P_1}{bc_1} = \frac{P_2}{bc_2}.$$

Luînd $\sigma_\alpha = \sigma_{a\alpha}$ şi ţinînd cont de expresiile P_1 şi c_1 găsite mai sus, rezultă ecuaţia

$$\lambda^2 - 1{,}714\ \lambda - 0{,}714 = 0,$$

de unde se obţine $\lambda \cong 2$.

Deci: $c_1 = 18/5 = 3{,}6$ cm; $c_2 = 2 \cdot 3{,}6 = 7{,}2 < h/2 = 9$ cm, $h_1 = c_1 \cos\alpha = 3{,}0$ cm; $h_2 = 6{,}0$ cm, $P_1 = 5250/3 = 1750$ daN; $P_2 = 2 \cdot 1750 = 3500$ daN iar presiunea efectivă are valoarea

$$\sigma_\alpha = 48{,}6 < 50 \text{ daN/cm}^2.$$

Îmbinarea se poate distruge şi prin forfecarea piesei orizontale, paralel cu fibrele lemnului, aşa cum indică liniile ondulate din figură. Admiţînd că tensiunile tangenţiale sînt distribuite uniform în cuprinsul suprafeţelor de forfecare şi luînd $\tau_a = 10$ daN/cm², rezultă

$$l_1 \geqslant \frac{P_1 \cos\alpha}{b\tau_a} = \frac{1450}{10 \cdot 10} = 14{,}5 \text{ cm}, \quad l_2 = 2l_1 \geqslant 29 \text{ cm}.$$

Lungimea l_0 trebuie să verifice relaţiile $l_0 = l_1 - c_1 \sin\alpha > 12{,}5$ cm şi $l_0 = l_2 - c_2 \sin\alpha - \dfrac{h}{2\sin\alpha} \geqslant 9$ cm; aşadar $l_0 = 12{,}5$ cm.

7.14. Să se dimensioneze modul de reazem al fermei din figura 7.14, utilizînd o îmbinare prin chertare frontală cu prag dublu [32].

Rezolvare. Suprafeţele pragurilor sînt supuse la strivire. Aria totală de strivire necesară este

$$A_{s.\,tot}^{nec} = \frac{N_s}{p_{sa\,\alpha}},$$

unde $N_s = N_c = 20\,720$ daN,

$$p_{as} = \frac{p_{as}}{1 + \left(\dfrac{p_{as\parallel}}{p_{as\perp}} - 1\right)\sin^3\alpha} = \frac{100}{1 + \left(\dfrac{100}{25} - 1\right)0{,}36^3} = 87{,}7 \text{ daN/cm}^2.$$

După înlocuire se obţine

$$A_{s.\,tot}^{nec} = \frac{20\,720}{87{,}7} = 236 \text{ cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înălțimea celor două praguri este

$$h_{1p} + h_{2p} = \frac{A_{s.tot}^{nec} \cdot \cos \alpha}{b} = \frac{236 \cdot 0{,}93}{25} = 8{,}77 \text{ cm}.$$

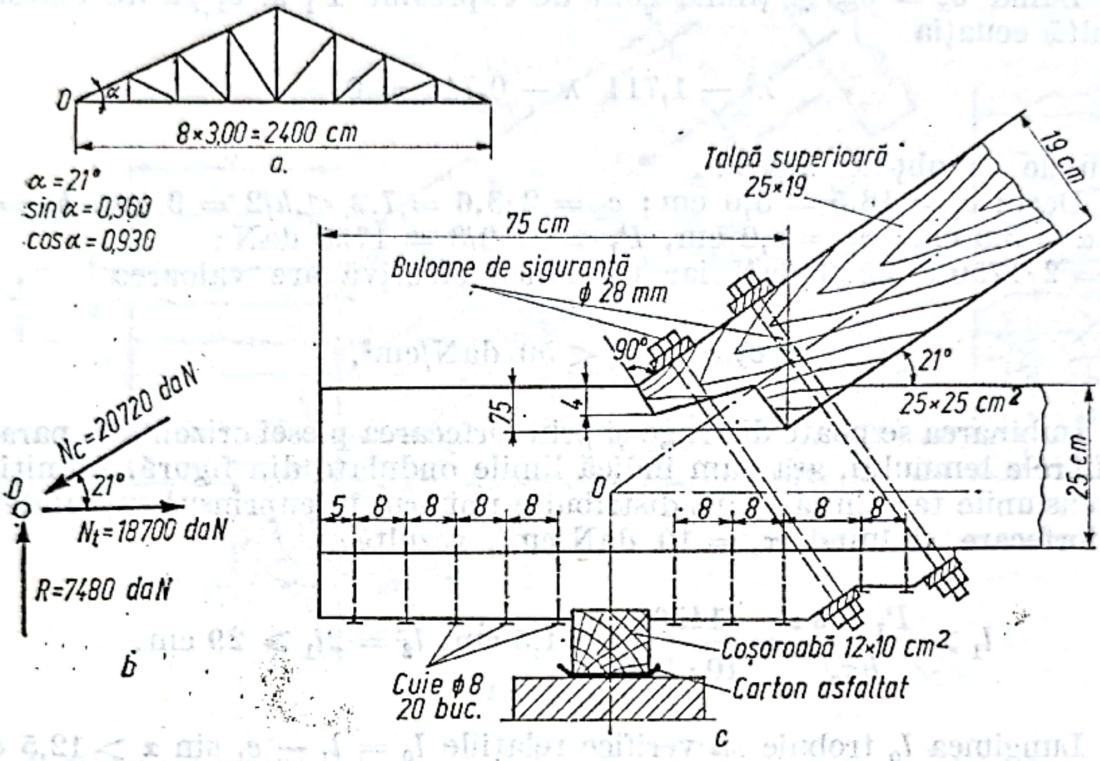


Fig. 7.14

Se aleg

$h_{1p} = 4$ cm și $h_{2p} = 6$ cm, care respectă condițiile $h_{1p} \geqslant 2$ cm; $h_{2p} - h_{1p} \geqslant 2$ cm și $h_{2p} < h/3$.

În planele de forfecare ale pragurilor se produc tensiunile

$$\tau_1^{ef} = \frac{T_{1f}}{A_{1f}} \text{ și } \tau_2^{ef} = \frac{T_f}{A_{2f}},$$

unde:

$$T_{1f} = N_{1s} \cos \alpha = N_s \frac{A_{1s}}{A_{1s} + A_{2s}} \cdot \cos \alpha = 20\,720 \frac{4 \cdot 25 : 0{,}93}{4 \cdot 25 : 0{,}93 + 6 \cdot 25 : 0{,}93} \times$$

$$\times\ 0{,}93 = 7700 \text{ daN};$$

$$T_f = N_s \cdot \cos \alpha = 20720 \cdot 0{,}93 = 18700 \text{ daN}; \quad A_{1f} = l_{1p} \cdot b;$$

lungimea pragului l_{1p} se alege maximum 10 h_{1p} sau maximum $2h$, deci

$$l_{1p} = 40 \text{ cm}; \quad b = 25 \text{ cm}; \quad A_{2f} = b l_{2p}; \quad l_{2p} = 10\ h_{2p} = 60 \text{ cm și}$$

$$\tau_{af\,II} = 10 \text{ daN/cm}^2.$$

După înlocuiri se obține

$$\tau_1^{ef} = \frac{7700}{40 \cdot 25} = 7{,}7 \text{ daN/cm}^2 \text{ și } \tau_2^{ef} = \frac{18700}{60 \cdot 25} =$$

$$= 12{,}46 \text{ daN/cm}^2 > 10 \text{ daN/cm}^2.$$

Avînd în vedere faptul că se depășește tensiunea admisibilă τ_{af} se modifică lungimile pragurilor prin adîncirea chertării acestora, respectiv se vor alege $h_{1p} = 4$ cm și $h_{2p} = 7{,}5$ cm ceea ce vor duce la $l_{1p} = 10\ h_{p1} = 40$ cm și $l_{2p} = 10\ h_{2p} = 10 \cdot 75 = 7{,}5$ cm iar

$$T_{1f} = 20720 \frac{4}{11{,}5} \cdot 0{,}93 = 6700 \text{ daN};$$

$$\tau_1^{ef} = \frac{6700}{40 \cdot 25} = 6{,}7 \text{ daN/cm}^2 < \tau_{af||} = 10 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\tau_2^{ef} = \frac{18700}{75 \cdot 25} = 9{,}96 \text{ daN/cm}^2 < \tau_{af||} = 10 \text{ daN/cm}^2.$$

Întrucît centrarea nodului este după axa netă a tălpii inferioare, verificarea se face cu relația ($d_b = 2{,}8$ cm și sînt două într-un plan):

$$\tau_{ef} = \frac{N_t}{A_{net}} = \frac{18700}{(b - 2d)(h - h_{2p})} = 55{,}2 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{at||} = 70 \text{ daN/cm}^2.$$

Suprafața de contact dintre subgrindă și cosoroabă este supusă la strivire. Lățimea cosoroabei este

$$b_c = \frac{R}{bp_{as\perp}} = \frac{7480}{25 \cdot 25} = 11{,}95 \text{ cm}.$$

Se alege o cosoroabă cu dimensiunile $12 \cdot 10$ cm².

7.15. O bară confecționată din lemn de fag este supusă la torsiune de un moment $M_t = 150$ daN · cm. Se cere să se calculeze tensiunile maxime din bară în ipoteza că este realizată în două variante de dispunere a inelelor anuale (fig. 7.15, *a* și *b*). Dimensiunile barei sînt $b = 40$ mm și $h = 80$ mm.

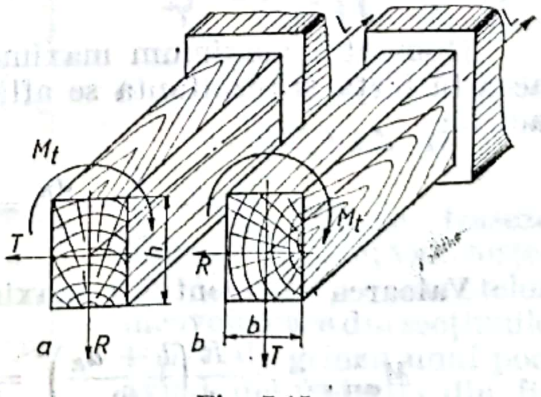


Fig. 7.15

Rezolvare. Tensiunile maxime se produc la mijlocul laturii mari și sînt egale cu :
cazul a),

$$\tau_{max} = \tau_h = \tau_{TL}^h = \frac{M_t}{k_{1R} h b^2} = \frac{150}{0{,}167 \cdot 8 \cdot 4^2} \cong 7 \text{ daN/cm}^2 <$$

$$< \tau_{af||} = 10 \text{ daN/cm}^2;$$

cazul b),

$$\tau_{max} = \tau_h = \tau_{TL}^h = \frac{M_t}{k_{1T} h b^2} = \frac{150}{0{,}255 \cdot 8 \cdot 4^2} \cong 4{,}6 \text{ daN/cm}^2 < \tau_{af||}.$$

La mijloacele laturilor mici se produc tensiunile
cazul a),

$$\tau_b = \tau_{TL}^b = k_{2T} \tau_{RL}^h = 0{,}86 \cdot 7 \cong 6 \text{ daN/cm}^2 < \tau_{af||};$$

cazul b),

$$\tau_b = \tau_{RL} = k_{2R} \tau_{TL}^h = 0{,}79 \cdot 4{,}6 = 3{,}63 \text{ daN/cm}^2 < \tau_{af||}.$$

Valorile coeficienților k_{1R}, k_{1T}, k_{2T} și k_{2R} pentru lemnul de fag au fost luate din figura 7.*f* pentru $h/b = 80/40 = 2$.

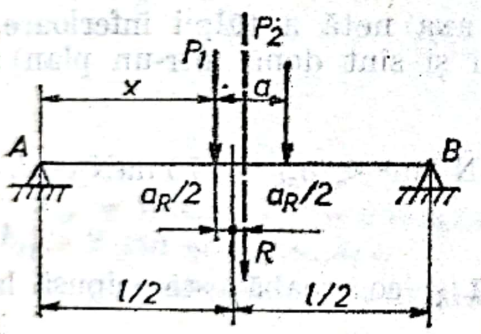


Fig. 7.16

7.16. Căruciorul unui pod rulant pentru manipularea butucilor pe rampa de cojit și secționat are distanța între role $a = 2$ m și se deplasează pe grinda $A-B$ (fig. 7.16) de lungime $l = 6$ m. Cele două forțe de la roți sînt $P_1 = 5$ kN și $P_2 = 2$ kN. Să se determine poziția și valoarea momentului încovoietor maximum maximorum.

Rezolvare. Valoarea și poziția rezultantei sînt

$$R = \sum P_i = 8 \text{ kN}; \quad a_R = \frac{\sum P_i a_i}{\sum P_i} = \frac{2 \cdot 2}{8} = 0{,}5 \text{ m}.$$

Momentul maximum maximorum are loc în dreptul forței P_1, cînd această forță și rezultanta se află la aceeași distanță de mijlocul grinzii, adică :

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a_R}{2} = 3 - 0{,}25 = 2{,}75 \text{ m}.$$

Valoarea momentului maximum maximorum este

$$M_{max\,max} = \frac{R}{l}\left(\frac{l - a_R}{2}\right)^2 = \frac{8}{6}\left(\frac{6 - 0{,}5}{2}\right)^2 = 10{,}1 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.17. Pe grinda $A - B$ de lungime $l = 16$ m a unui pod se deplasează un convoi de forțe concentrate $P_1 = 5$ kN, $P_2 = 20$ kN, $P_3 = 25$ kN, $P_4 = 18$ kN și $P_5 = 14$ kN, avînd între ele distanțele menționate în figura 7.17. Să se determine poziția și valoarea momentului maximum maximorum.

Rezolvare. Se determină valoarea și poziția rezultantei:

$$R = \sum_1^5 P_i = 82 \text{ kN}; \quad M_R = \sum_1^5 M_i = 5 \cdot 9 + 20 \cdot 7{,}5 + 25 \cdot 4{,}5 + 18 \cdot 2{,}5 = 82 \cdot a_0,$$

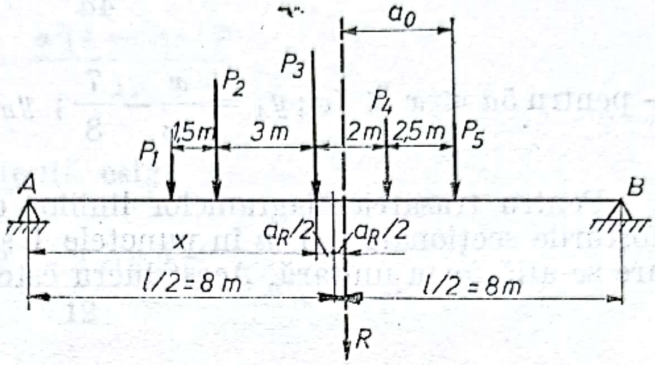


Fig. 7.17

de unde rezultă

$$a_0 = 4{,}3 \text{ m} \text{ și } a_R = 4{,}5 - 4{,}3 = 0{,}2 \text{ m}.$$

Momentul încovoietor cel mai mare are loc în dreptul forței P_3, cînd această forță și rezultanta R se află la aceeași distanță de mijlocul grinzii, adică

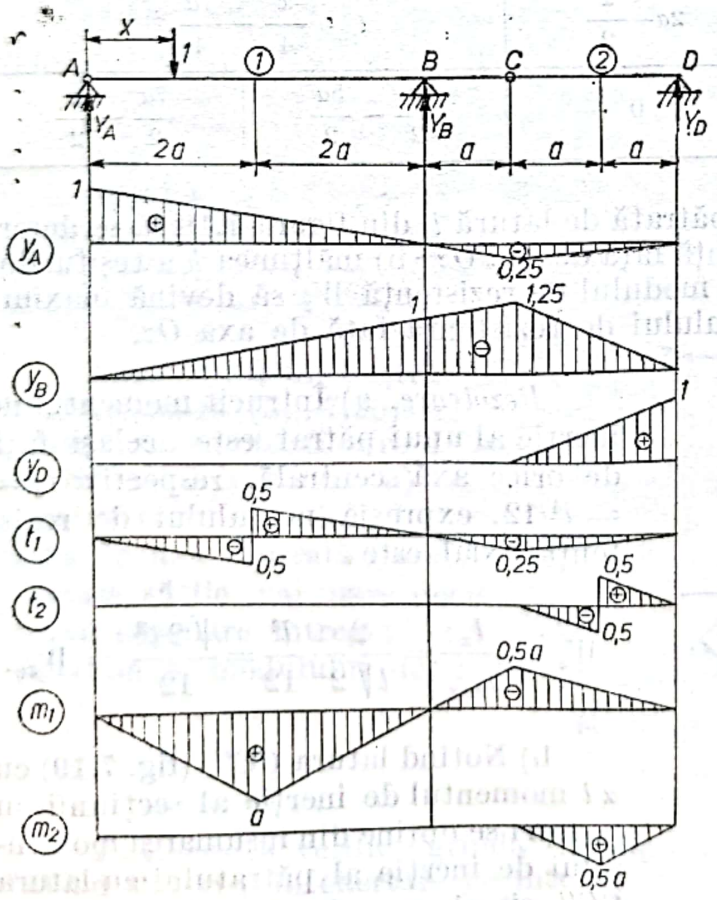


Fig. 7.18

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a_R}{2} = 8 - 0{,}1 = 7{,}9 \text{ m}$$

Valoarea momentului încovoietor maxim maximorum este

$$M_{\max\max} = \frac{R}{l}\left(\frac{l - a_R}{2}\right)^2 - \sum_1^2 P_i a_i = \frac{82}{16}\left(\frac{16 - 0{,}2}{2}\right)^2 - 5 \cdot 4{,}5 - 20 \cdot 3 = 237{,}5 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

7.18. Să se traseze liniile de influență ale forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare din secțiunile 1 și 2 ale grinzii unui pod avînd deschiderile din figura 7.18.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se înlocuiesc legăturile exterioare cu reacţiunile corespunzătoare şi se află valorile acestora pe intervale :

$$- \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 5a;\ y_A = 1 - \frac{x}{4a};\ y_B = \frac{x}{4a};\ y_D = 0;$$

$$- \text{pentru } 5a \leqslant x \leqslant 7a;\ y_A = \frac{x}{8a} - \frac{7}{8};\ y_B = \frac{35}{8} - \frac{5x}{8a};\ y_D = \frac{x}{7a} - \frac{5}{7}.$$

Pentru trasarea diagramelor liniilor de influenţă trebuie exprimate eforturile secţionale t şi m în punctele 1 şi 2 pentru diferite intervale în care se află forţa unitară. Acest lucru este prezentat în tabelul 7.18.

Tabelul 7.18

efort \ x	$0 \leqslant x \leqslant 2a$	$2a \leqslant x \leqslant 5a$	$5a \leqslant x \leqslant 6a$	$6a \leqslant x \leqslant 7a$
t_1	$-\frac{x}{4a}$	$1-\frac{x}{4a}$	$\frac{x}{8a}-\frac{7}{8}$	
t_2	0	0	$\frac{5}{2}-\frac{x}{2a}$	$\frac{7}{2}-\frac{x}{2a}$
m_1	$\frac{x}{2}$	$2a-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{4}-\frac{7a}{4}$	
m_2	0	0	$\frac{x}{2}-\frac{5a}{2}$	$\frac{7a}{2}-\frac{x}{2}$

7.19. Pentru secţiunea pătrată de latură l, din figura 7.19 să se determine : a) modulul de rezistenţă faţă de axa Oz ; b) înălţimea h a teşiturilor vîrfurilor B şi B' pentru ca modulul de rezistenţă W_z să devină maxim ; c) valoarea maximă a modulului de rezistenţă faţă de axa Oz.

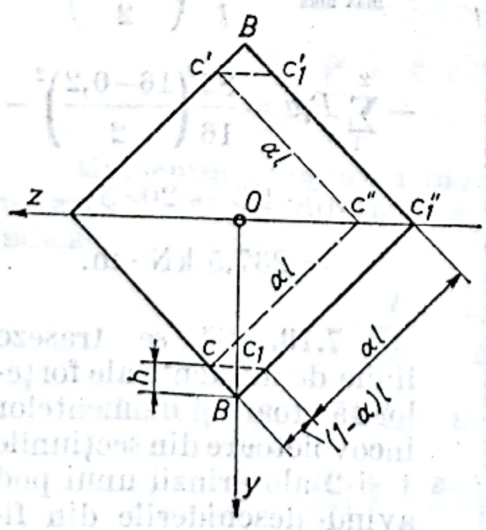


Fig. 7.19

Rezolvare. a) Întrucît momentul de inerţie al unui pătrat este acelaşi faţă de orice axă centrală, respectiv $I_z = l^4/12$, expresia modulului de rezistenţă axial este

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{2}{l\sqrt{2}} \cdot \frac{l^4}{12} = \frac{\sqrt{2}\, l^3}{12} = W_{z0}.$$

b) Notînd latura CC'' (fig. 7.19) cu $\alpha\, l$ momentul de inerţie al secţiunii cu teşituri se obţine din însumarea momentului de inerţie al pătratului cu latura CC'' şi al suprafeţei $CC''C'C_1'C_1''C_1C$.

Rezultă

$$I_z = \frac{(\overline{CC''})^4}{12} + \frac{\overline{CC_1} \cdot \overline{CC'}^3}{12} = \frac{(\alpha l)^4}{12} + \frac{(1-\alpha)\, l\sqrt{2}\,(\alpha l\sqrt{2})^3}{12} =$$

$$= \frac{\alpha^3(4-3\alpha)\, l^4}{12}.$$

Expresia modulului de rezistență este

$$W_z = \frac{2I_z}{\alpha l\sqrt{2}} = \frac{\alpha^2(4-3\alpha)\sqrt{2}\, l^3}{12} = \alpha^2(4-3\alpha)\ W_{zo}.$$

Pentru a găsi maximul modulului de rezistență W_z se calculează

$$\frac{dW_z}{d\alpha} = \alpha(8-9\alpha)\, W_{zo} = 0,$$

de unde rezultă $\alpha = 8/9$ și deci $h = (1-\alpha)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ l = \dfrac{\sqrt{2}}{18} l = 0{,}0785\ l.$

c) Cu valoarea lui $\alpha = 8/9$ se obține

$$W_{z\,\max} = 1{,}053\ W_{zo}.$$

Adică teșind vîrfurile patratului cu cantitatea $h = 0{,}0785\ l$ se obține o secțiune avînd modulul de rezistență cu 5,3% mai mare.

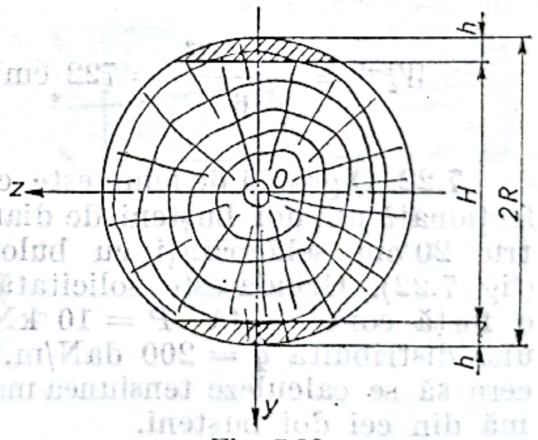


Fig. 7.20

7.20. Dintr-un buștean de secțiune circulară (fig. 7.20) se îndepărtează două calote, fiecare de înălțime h. Să se determine: a) valoarea h pentru care modulul de rezistență față de axa centrală Oz al secțiunii rămase să fie mai mare decît al secțiunii circulare întregi; b) valoarea maximă a modulului de rezistență față de axa Oz.

R. a) $0 \leqslant h \leqslant 0{,}045\ R$;

b) $h = 0{,}02\ R$; $W_{z\,\max} = 0{,}79\ R^3$

7.21. Să se verifice grinda din figura 7.21 supusă la încovoiere și avînd slăbiri prin chertare pe întreaga lățime a grinzii și pe o adîncime de 3 cm. Încărcarea pe grindă este de 600 daN/m.

Rezolvare. Verificarea grinzii se face în secţiunea de efort maxim (1 — 1) şi în secţiunea de W_{min} (2—2).

Momentele încovoietoare din secţiunile cele mai solicitate sînt egale cu

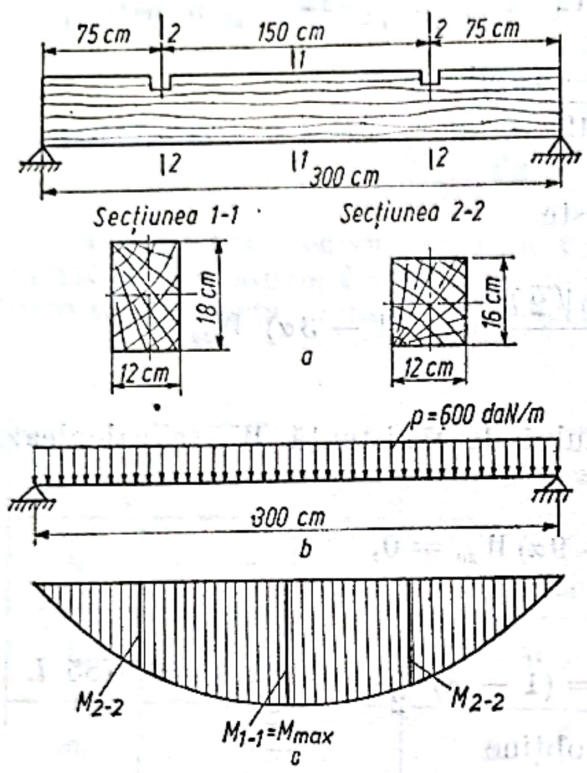


Fig. 7.21

$$M_{1-1} = \frac{600 \cdot 3^2}{8} = 675 \text{ daN} \cdot \text{m} =$$

$$= 6{,}75 \cdot 10^4 \text{ daN} \cdot \text{cm};$$

$$M_{2-2} = \frac{600 \cdot 3}{2} \cdot 0{,}75 - \frac{600 \cdot 0{,}75^2}{2} =$$

$$= 506 \text{ daN} \cdot \text{m} = 5{,}06 \cdot 10^4 \text{ daN} \cdot \text{cm}$$

Tensiunile maxime din secţiunile 1 — 1 şi 2 — 2 sînt

$$\sigma_{max}^{1-1} = \frac{M_{1-1}}{W_z^{1-1}} = \frac{6{,}75 \cdot 10^4}{722} =$$

$$= 93 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{max}^{2-2} = \frac{M_{2-2}}{W_z^{2-2}} = \frac{5{,}06 \cdot 10^4}{512} =$$

$$= 99 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

În relaţiile de mai sus s-au înlocuit

$$W_z^{1-1} = \frac{12 \cdot 19^2}{6} = 722 \text{ cm}^3 \text{ şi } W_z^{2-2} = \frac{12 \cdot 16^2}{6} = 512 \text{ cm}^3.$$

7.22. O grindă de lemn este confecţionată din doi buşteni de diametru 20 cm solidarizaţi cu buloane (fig. 7.22). Grinda este solicitată de o forţă concentrată $P = 10$ kN şi una distribuită $q = 200$ daN/m. Se cere să se calculeze tensiunea maximă din cei doi buşteni.

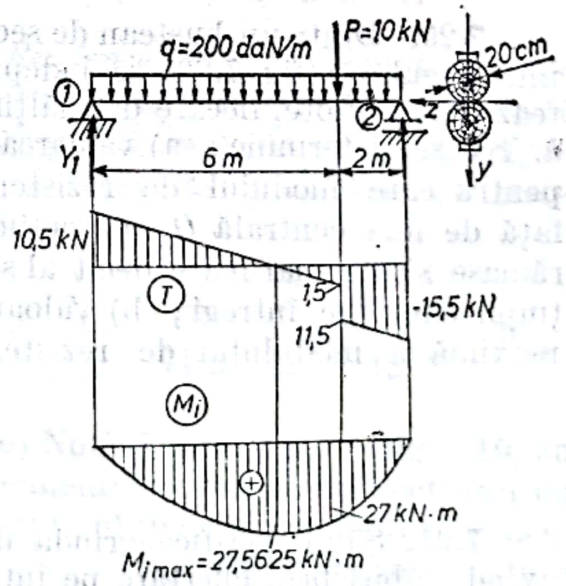


Fig. 7.22

Rezolvare. Datorită sarcinilor ce solicită grinda în secţiunile acesteia se produc forţe tăietoare T şi momente încovoietoare.

Din ecuaţiile de echilibru static

$$\sum M_{(A)} = 0;\ 8Y_2 - 6 \cdot 10 - 8 \cdot 2 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_{(2)} = 0;\ 8Y_1 - 20 - 64 = 0;$$

rezultă

$$Y_1 = 10{,}5 \text{ kN} \quad \text{și} \quad Y_2 = 15{,}5 \text{ kN}.$$

În figura 7.22 sînt trasate diagramele de variație a forței tăietoare T și momentului încovoietor M_i. Se observă că $M_{i\,\max} = 27{,}5625$ kN·m = $= 275625$ daN·cm.

Neglijînd slăbirea secțiunii datorită elementelor de solidarizare rezultă

$$I_z = 2\left(\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{d^2}{4}\right) = \frac{5\pi d^4}{32}$$

și

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{5\pi d^3}{32} = \frac{5\pi\cdot 20^3}{32} \cong 4\,000 \text{ cm}^3.$$

Tensiunea maximă din buștean va fi

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{i\,\max}}{W_z} = \frac{275\,625}{4\,000} \cong 69 \text{ daN/cm}^2.$$

7.23. O grindă confecționată dintr-un buștean este solicitată de o forță P, ca în figura 7.23. Se cere să se calculeze: poziția secțiunii unde tensiunea normală este maximă $\sigma_{\max}$; de cîte ori este mai mare această tensiune față de tensiunea din grinda de secțiune constantă cu diametrul maxim $3d$.

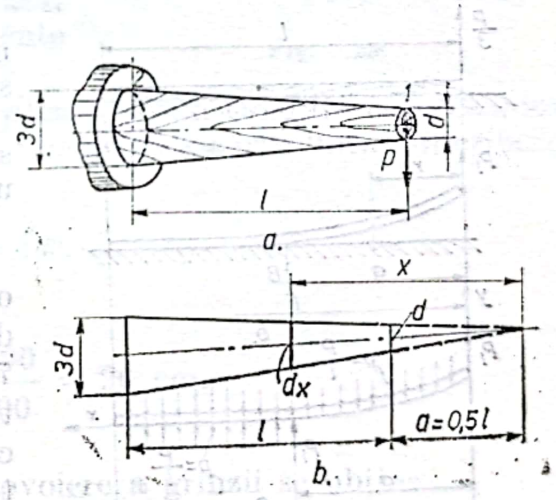


Fig. 7.23

Rezolvare. Vîrful conului din care este confecționată grinda se găsește la distanța $a = 0{,}5\ l$ de secțiunea 1. Față de vîrf, la distanța x, diametrul grinzii este (fig 7.23, b)

$$d_x = 2\frac{d}{l}x$$

și modulul de rezistență axial

$$W_{zx} = \frac{\pi d_x^2}{32} = \frac{\pi}{32}\cdot 8\cdot\frac{d^3}{l^3}x^3 = \frac{\pi}{4}\frac{d^3}{l^3}x^3.$$

Tensiunea în secțiunea x este

$$\sigma_x = \frac{M_{ix}}{W_{zx}} = \frac{P(x - 0{,}5\ l)}{\frac{\pi}{4}\frac{d^3}{l^3}x^3} = \frac{4Pl^3}{\pi d^3}(x^{-2} - 0{,}5\ l\ x^{-3}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunea este maximă unde

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{4Pl^3}{\pi d^3}(-2x^3 + 1{,}5\, l\, x^{-4}) = 0$$

de unde rezultă $x = 0{,}75\ l$.

Pentru $x = 0{,}75\ l$ valoarea tensiunii maxime este

$$\sigma_{max} = \frac{64}{27\pi}\frac{Pl}{d^3}$$

Dacă secţiunea grinzii ar fi constantă de diametru $3d$ atunci

$$\sigma'_{max} = \frac{32Pl}{\pi(3d)^3} = \frac{32}{27\pi}\frac{Pl}{d^3}.$$

Se observă că $\sigma_{max}/\sigma'_{max} = 2$.

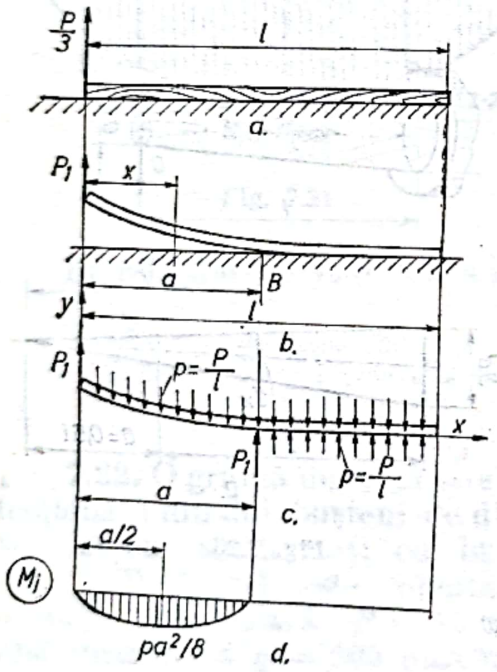


Fig. 7.24

7.24. O scîndură de lemn de lungime l şi greutate P este aşezată pe o suprafaţă rigidă. Se cere să se calculeze tensiunile din scîndură pentru cazul solicitării acesteia de o forţă $P/3$ la unul din capete (fig. 7.24, *a*).

Rezolvare. Solicitînd scîndura cu o forţă P_1 la capătul din stînga scîndura se va ridica pe lungimea a (fig. 7.24, *b*) iar partea din dreapta va continua să rămînă dreaptă şi în contact cu suprafaţa de sprijin. Ca atare în toate secţiunile cuprinse între a şi l momentul încovoietor va fi nul.

Considerînd greutatea scîndurii ca fiind uniform distribuită de intensitate $p = P/l$, pentru secţiunea $x = a$ se poate scrie (fig. 7.24, *c*):

$$P_1 a = \frac{P}{l}\frac{a^2}{2}, \text{ respectiv } a = \frac{2P_1}{P}\, l.$$

În secţiunea $B\left(x = \frac{a}{2}\right)$ valoarea momentului încovoietor maxim este

$$M_{iB} = \frac{pa^2}{8} = \frac{Pa^2}{8l} = \frac{P}{8l}\frac{4P_1^2}{P}l^2 = \frac{P_1^2 l}{2P}.$$

Pentru $P_1 = P/3$ se obține

$$M_{i\,max} = \frac{Pl}{18},\quad \sigma_{max} = \frac{Pl}{18\,W_z} \text{ și } a = \frac{2}{3}l.$$

7.25. O grindă de lemn, de secțiune dreptunghiulară $b \times h$, este așezată pe pământ și suportă două sarcini concentrate $P = 60$ kN (fig. 7.25, *a*). Se cere să se dimensioneze grinda, știind că pământul admite o presiune $p_a = 1$ daN/cm² iar grinda o rezistență admisibilă $\sigma_a = 100$ daN/cm². În calcule se va considera că presiunea dintre grindă și pământ se distribuie uniform (fig. 7.25, *b*).

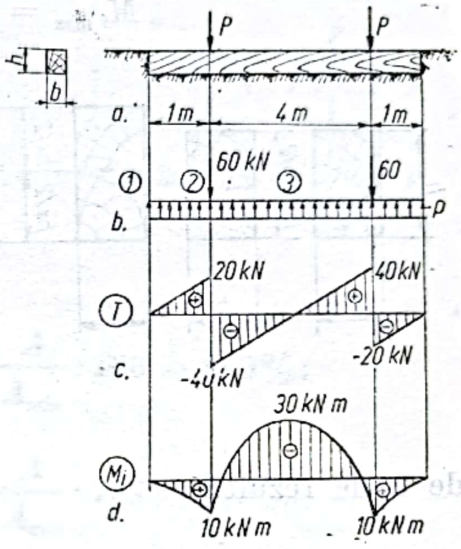


Fig. 7.25

Rezolvare. Datorită acțiunii forțelor $P = 60$ kN, între grinda de lemn și pământ apare o presiune $p = 2P/l = 2 \cdot 60/6 = 20$ kN. cm.

În figurile 7.25, *c* și *d* s-au trasat diagramele de forțe tăietoare și momente încovoietoare pentru grinda de lemn.

Lățimea b a grinzii de lemn se determină din condiția ca presiunea de contact dintre lemn și pământ să nu depășească presiunea admisibilă, respectiv

$$p_a l b = 2P,$$

de unde rezultă

$$b = \frac{2P}{p_a l} = \frac{12000}{1.600} = 20 \text{ cm}.$$

Din condiția de rezistență la încovoiere a grinzii se obține

$$W_{z\,nec} = \frac{M_{i\,max}}{\sigma_a} = \frac{3 \cdot 10^5}{10^2} = 3000 \text{ cm}^3,$$

de unde rezultă

$$h = \sqrt{\frac{6W_z}{b}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 3000}{20}} = 30 \text{ cm}.$$

7.26. Pentru grinda de lemn, de secțiune dreptunghiulară de dimensiuni b și h și rezistența admisibilă σ_a (fig. 7.26, *a*) se cere să se calculeze sarcina capabilă P. De cîte ori s-ar micșora valoarea sarcinii capabile, dacă grinda ar fi confecționată din alte două grinzi suprapuse, fără să fie îmbinate, de dimensiuni b. 0,5 h (fig. 7.26, *b*)? Cît trebuie să fie înălțimea h_x, a

celor două grinzi suprapuse (fig. 7.26, *c*) astfel încît forţa capabilă să rămînă la aceeaşi valoare ca în cazul a?

Rezolvare. Pentru cazul *a*, forţa capabilă se obţine din condiţia

$$M_{i\,max} = \frac{P'l}{4} = \sigma_a W_z = \sigma_a \frac{bh^2}{6},$$

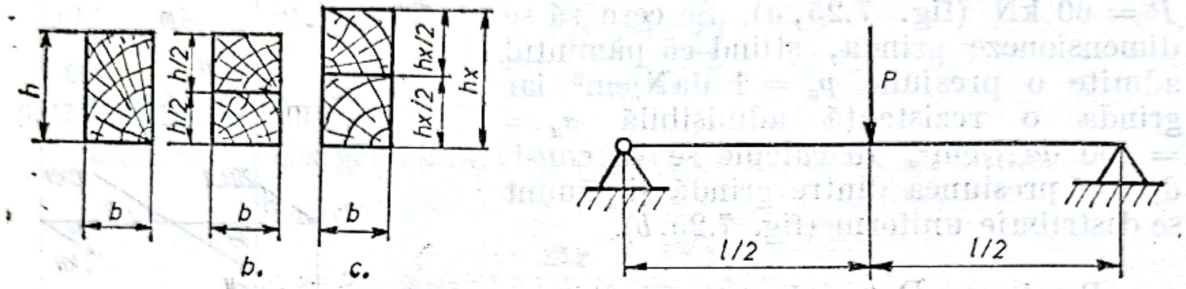


Fig. 7.26

de unde rezultă

$$P' = \frac{2}{3} \frac{bh^2}{l} \sigma_a.$$

În cazul *b*, valoarea forţei capabile se obţine din relaţia

$$M_{i\,max} = \frac{P''l}{4} = 2\sigma_a W_z = 2\sigma_a \frac{bh^2}{6 \cdot 4}$$

de unde rezultă

$$P'' = \frac{1}{3} \frac{bh^2}{l} \sigma_a$$

adică valoarea forţei se micşorează de $P'/P'' = 2$ ori.

Din condiţia ca sarcina capabilă să fie aceeaşi în cazurile *a* şi *c*, respectiv

$$P' = \frac{2}{3} \frac{bh^2}{l} \sigma_a = P'' = \frac{1}{3} \frac{bh_x^2}{l} \sigma_a$$

se obţine $h_x^2 = 2h^2$, de unde rezultă $h_x = 1{,}41\ h$.

7.27. O grindă de lemn poate avea secţiuni diferite, ca în figura 7.27. Se cere să se calculeze dimensiunile b şi h ale acestor secţiuni în ipoteza că grinda este solicitată în fiecare caz de acelaşi moment încovoietor $M_i = 36\,000$ daN.cm. Tensiunea admisibilă este $\sigma_a = 120$ daN/cm² iar raportul $b/h = 0{,}75$. Pentru grinzile astfel dimensionate să se facă o

Scanned with OKEN Scanner

comparație între ariile secțiunilor, luînd ca referință secțiunea cea mai mică.

R. Pentru cazul 1. $h = 14{,}7$ cm; $A = 163$ cm²; $\frac{A}{A_{min}} \cdot 100 = 374\,\%$;

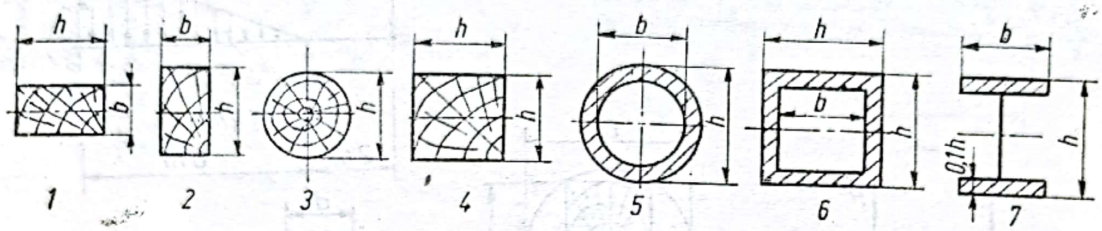


Fig. 7.27

2. $h = 13{,}4$ cm; $A = 135$ cm²; $\frac{A}{A_{min}} \cdot 100 = 310\,\%$;

3. $h = 14{,}5$ cm; $A = 165$ cm²; $\frac{A}{A_{min}} \cdot 100 = 378\,\%$.

4. $h = 12{,}2$ cm; $A = 148$ cm; $\frac{A}{A_{min}} \cdot 100 = 340\,\%$;

5. $h = 16{,}5$ cm; $A = 93$ cm²; $\frac{A}{A_{min}} \cdot 100 = 213\,\%$;

6. $h = 13{,}8$ cm; $A = 83$ cm²; $\frac{A}{A_{min}} \cdot 100 = 190\,\%$;

7. $h = 17$ cm; $A = 44$ cm²; $\frac{A}{A_{min}} \cdot 100 = 100\,\%$.

7.28. O grindă este confecționată din mai multe bare de lemn de secțiune 20×24 cm² (fig. 7.28). Să se calculeze numărul necesar de bare pentru ca grinda să reziste sarcinilor care o solicită. Se dă $\sigma_a = 90$ daN/cm²

R. $n = 4$ bucăți.

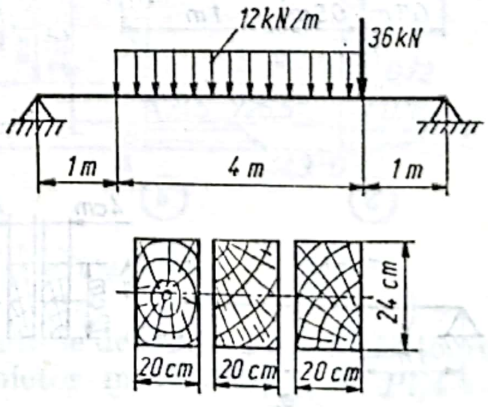


Fig. 7,28

7.29. Grinda de lemn din figura 7.29 este solicitată de forțele $P = 5$ kN. Cunoscînd $\sigma_a = 100$ daN/cm², se cere să se calculeze diametrul bușteanului

din care poate fi confecționată grinda astfel, încît modulul de rezistență al secțiunii dreptunghiulare de dimensiuni $b.h$ să fie maxim.

R. $D = 22{,}7$ cm.

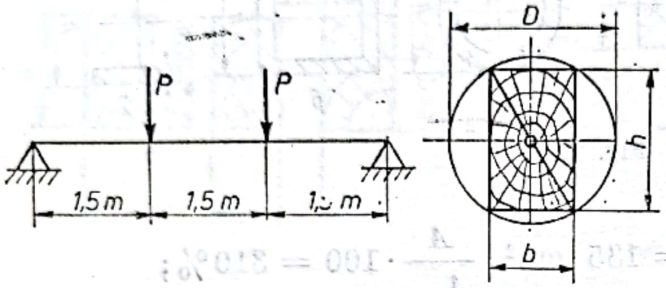


Fig. 7.29

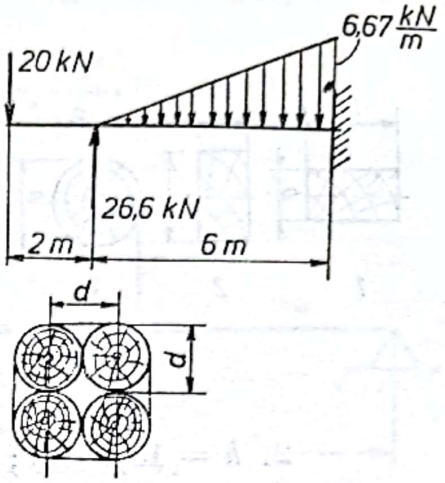


Fig. 7.30

7.30. Patru bușteni de diametru d sînt solidarizați între ei cu sîrmă de oțel astfel încît, supuși solicitării de încovoiere (fig. 7.30) lucrează împreună. Se cere să se calculeze diametrul d dacă $\sigma_a = 100$ daN/cm².

R. $d \cong 16$ cm.

7.31. Pentru grinzile din figura 7.31 *a*, *b*, *c* și *d* se cere să se calculeze valoarea sarcinii capabile astfel încît în secțiunea periculoasă să nu depășească $\sigma_a = 100$ daN/cm².

R. a) $P = 1067$ daN;
b) $P = 1400$ daN;
c) $M_0 \cong 1{,}92$ kN.m;
d) $q = 3{,}30$ daN/cm.

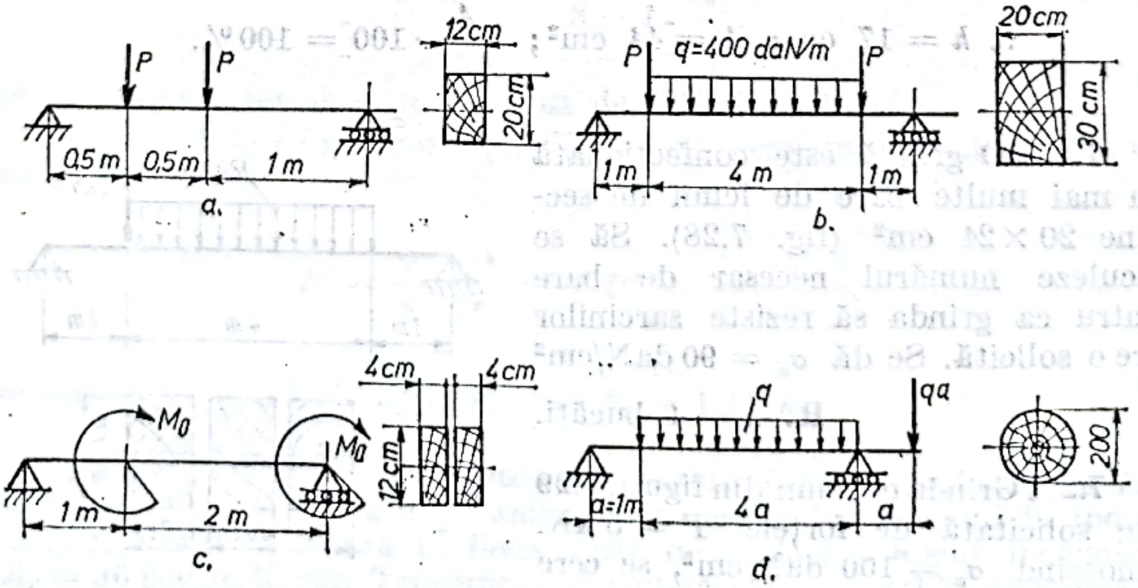


Fig. 7.31

7.32. Pentru grinzile din figura 7.32, *a* şi *b* confecţionate din buşteni de secţiune circulară se cere să se calculeze : 1) poziţia secţiunii în care tensiunea normală este maximă ; 2) de cîte ori este mai mare tensiunea

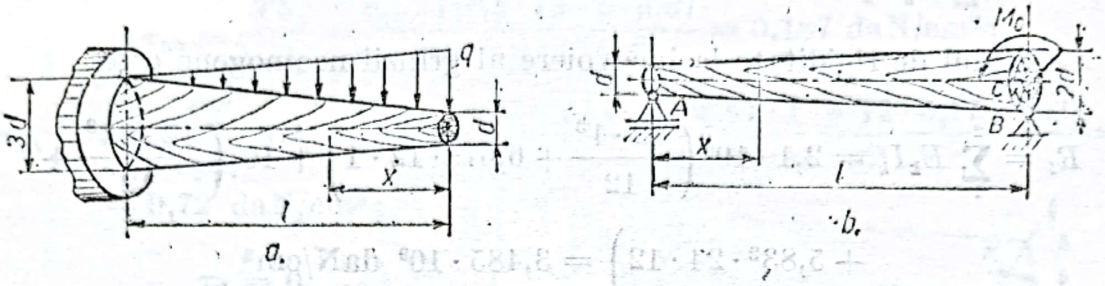


Fig. 7,32

maximă în aceste situaţii faţă de cazul grinzilor de secţiune constantă şi diametrele egale cu cele maxime din cazurile analizate.

R. a. 1) $x = \frac{2}{3} l$; 2) 1,1 ori ;

b. 2) $x = \frac{l}{2}$; 2) 32/27 ori.

7.33. O grindă simplu rezemată la capete, încărcată cu o forţă transversală P este formată dintr-o bară de lemn 2 de secţiune dreptunghiulară, solidarizată cu o platbandă de oţel 1, ca în figura 7.33. Se cere să se calculeze valoarea forţei P astfel, încît în nici unul din cele două materiale tensiunea maximă să nu depăşească tensiunea admisibilă. Să se traseze apoi diagramele tensiunilor σ şi τ pe înălţimea secţiunii periculoase. Se dau $l = 4$ m, $E_{OL} = E_1 = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm², $E_L = E_2 = 10^5$ daN/cm², $\sigma_{aOL} = \sigma_{a1} = 1500$ daN/cm² şi $\sigma_{aL} = \sigma_{a2} = 100$ daN/cm².

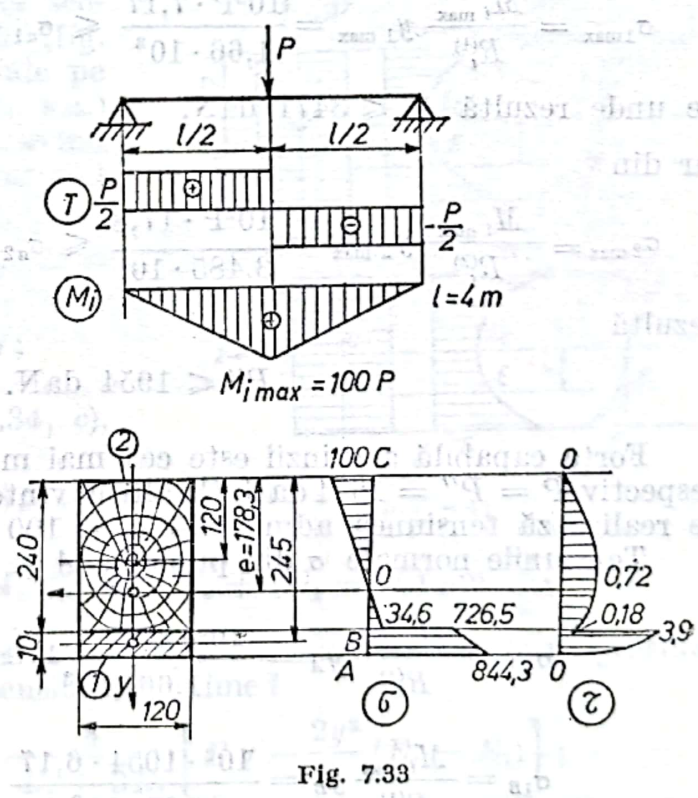


Fig. 7.33

Rezolvare. Sub acţiunea forţei P în grindă se dezvoltă o forţă tăietoare $T_{max} = P/2 = 0{,}5\ P$ şi un moment încovoietor maxim $M_{i\,max} = Pl/4 = 100\ P$ daN·cm.

Poziția axei neutre este dată de relația:

$$e = \frac{\sum E_k A_k e_k}{\sum E_k A_k} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 24{,}5 + 10^5 \cdot 24 \cdot 12 \cdot 12}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 12 + 10^5 \cdot 24 \cdot 12} 17{,}830 \text{ cm.}$$

Modulul de rigiditate la încovoiere al grinzii neomogene este

$$R_i = \sum_1^2 E_k I_k = 2{,}1 \cdot 10^6 \left(\frac{12 \cdot 1^3}{12} + 6{,}67^2 \cdot 12 \cdot 1 \right) + 10^5 \left(\frac{12 \cdot 24^3}{12} + \right.$$

$$\left. + 5{,}83^2 \cdot 24 \cdot 12 \right) = 3{,}485 \cdot 10^9 \text{ daN/cm}^2$$

Fie

$$R_i^{(1)} = R_i / E_1 = 3{,}485 \cdot 10^9 / 2{,}1 \cdot 10^6 = 1{,}66 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

și

$$R_i^{(2)} = R_i / E_2 = 3{,}485 \cdot 10^9 / 10^5 = 3{,}485 \cdot 10^4 \text{ cm}^4.$$

Pentru a determina valoarea forței P se pune condiția ca în nici un material să nu se depășească tensiunea admisibilă, respectiv

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{i\max}}{R_i^{(1)}} y_{1\max} = \frac{10^2 P \cdot 7{,}17}{1{,}66 \cdot 10^3} \leqslant \sigma_{a1} = \sigma_{aOL} = 1500 \text{ daN/cm}^2$$

de unde rezultă $P' \leqslant 3471$ daN,

iar din

$$\sigma_{2\max} = \frac{M_{i\max}}{R_i^{(2)}} y_{2\max} = \frac{10^2 P \cdot 17{,}8}{3{,}485 \cdot 10^4} \leqslant \sigma_{a2} = \sigma_{aL} = 100 \text{ daN/cm}^2$$

rezultă

$$P'' \leqslant 1954 \text{ daN.}$$

Forța capabilă a grinzii este cea mai mică dintre forțele P' și P'', respectiv $P = P'' = 1954$ daN. Cu alte cuvinte numai în lemn, în fibrele C, se realizează tensiunea admisibilă $\sigma_a = 100$ daN/cm² (fig. 7.33).

Tensiunile normale σ din punctele A și B sînt egale cu

$$\sigma_{1A} = \frac{M_{i\max}}{R_i^{(1)}} y_A = \frac{10^2 \cdot 1954 \cdot 7{,}17}{1{,}66 \cdot 10^3} = 844{,}35 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{1B} = \frac{M_{i\max}}{R_i^{(1)}} y_B = \frac{10^2 \cdot 1954 \cdot 6{,}17}{1{,}66 \cdot 10^3} = 726{,}59 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{2B} = \frac{M_{i\max}}{R_i^{(2)}} y_B = \frac{10^2 \cdot 1954 \cdot 6{,}17}{3{,}485 \cdot 10^4} = 34{,}6 \text{ daN/cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile tensiunilor tangențiale τ în diferite puncte ale secțiunii sînt :

$$\tau_A = 0\,; \quad \tau_{B1} = \frac{TS_1}{b_1 R_i^{(1)}} = \frac{0{,}5 \cdot 1954 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 6{,}67}{12 \cdot 1{,}66 \cdot 10^3} = 3{,}927 \text{ daN/cm}^2\,;$$

$$\tau_{B2} = \frac{TS_1}{b_2 R_i^{(2)}} = \frac{0{,}5 \cdot 1954 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 6{,}67}{12 \cdot 3{,}485 \cdot 10^4} = 0{,}187 \text{ daN/cm}^2\,;$$

$$\tau_{an} = \tau_z = \frac{T}{b_2 R_i^{(2)}}(S_1 + S_2^*) = \frac{0{,}5 \cdot 1954\,(12 \cdot 6{,}67 \cdot 1 + 12 \cdot 6{,}17 \cdot 3{,}03)}{12 \cdot 3{,}485 \cdot 10^4} =$$

$$= 0{,}72 \text{ daN/cm}^2\,;$$

$$\tau_C = 0.$$

În relațiile de mai sus S_1 este momentul static al secțiunii *1* față de axa neutră iar S_2^* este momentul static al porțiunii de secțiune *2* cuprinsă între punctele *O* și *B*.

În figura 7.33 sînt redate diagramele tensiunilor σ și τ.

7.34. Pentru barele de secțiune dreptunghiulară $b \cdot h$ (fig. 7.34, *a*) realizate din materiale pe bază de lemn (PAL, PFL ș.a.) solicitate la încovoiere pură, avînd modulul de elasticitate E variabil pe grosimea h după legile :

a. *liniară* (fig. 7.34, *b*), $E = E_c + \frac{2}{h}(E_1 - E_c)y$;

b. *parabolică* (fig. 7.34, *c*), $E = E_c + \frac{4}{h^2}(E_1 - E_c)y^2$;

c. *sinusoidală* (fig. 7.34, *d*), $E = E_c + (E_1 - E_c)\sin\frac{\pi y}{h}$.

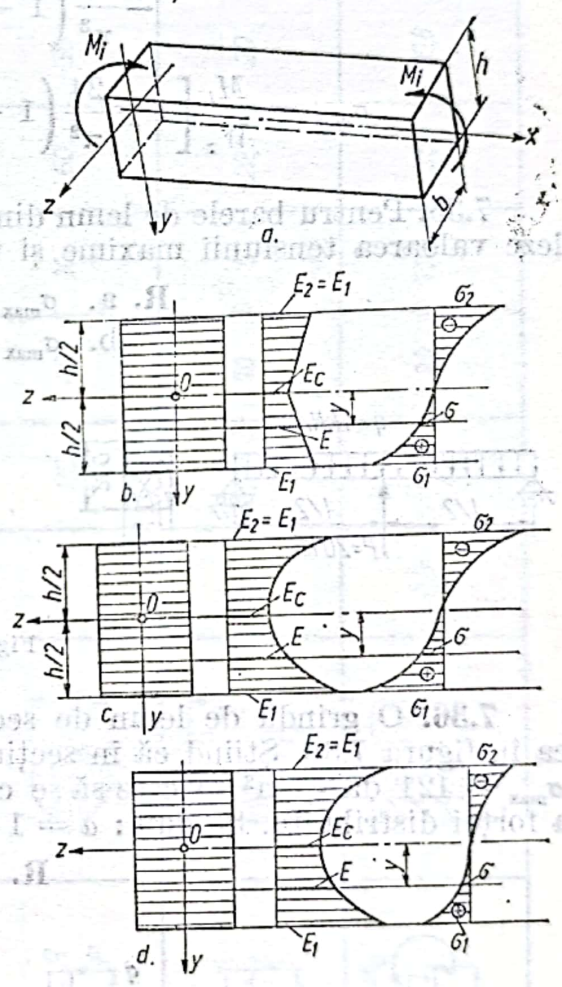


Fig. 7.34

se cere să se determine legea de variație a tensiunii normale pe grosimea piesei. Care este expresia tensiunii maxime?

R. a) $\sigma = \frac{M_i}{I_z} \cdot \frac{4}{E_c + 3E_1}\left[E_c y - \frac{2y^2}{h}(E_c - E_1)\right]$;

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{4}{3 + \frac{E_c}{E_1}} \cdot \frac{M_i}{W_z}\,; \quad I_z = \frac{bh^3}{12}\,; \quad W_z = \frac{bh^2}{6}\,;$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $$\sigma = \frac{M_i}{I_z}\cdot\left[\frac{E_c}{E_1}+\frac{4}{h^2}\left(1-\frac{E_c}{E_1}\right)y^2\right]\left[\frac{E_c}{E_1}+\frac{4}{25}\left(1-\frac{E_c}{E_1}\right)\right]^{-1} y;$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{M_i}{W_z}\cdot\left[\frac{E_c}{E_1}+\frac{4}{25}\left(1-\frac{E_c}{E_1}\right)\right]^{-1};$$

c) $$\sigma = \frac{M_i}{I_z}\left[\frac{E_c}{E_1}+\left(1-\frac{E_c}{E_1}\right)\sin\frac{\pi y}{h}\right]\left[1+\frac{24}{\pi^2}\left(1-\frac{E_c}{E_1}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{48}{\pi^3}\left(1-\frac{E_c}{E_1}\right)\right]^{-1} y;$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_i}{W_z}\left[1+\frac{24}{\pi^2}\left(1-\frac{E_c}{E_1}\right)-\frac{48}{\pi^3}\left(1-\frac{E_c}{E_1}\right)\right]^{-1}.$$

7.35. Pentru barele de lemn din figura 7.35, *a* și *b* se cere să se calculeze valoarea tensiunii maxime și tensiunii din punctul *C*.

R. a. $\sigma_{max} = 150$ daN/cm²;

b. $\sigma_{max} \cong 93$ daN/cm²; $\sigma_c = -68$ daN/cm².

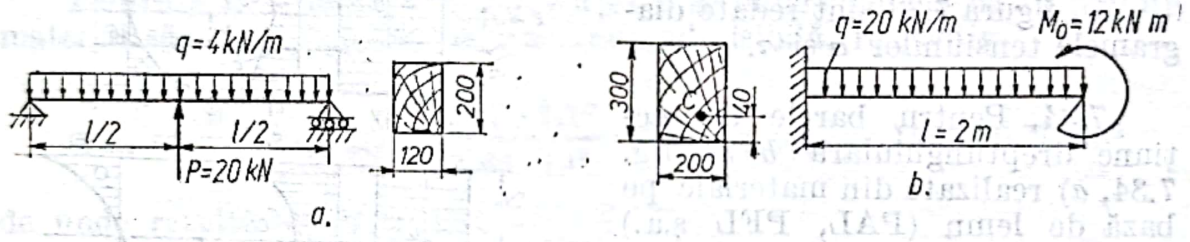


Fig. 7.35

7.36. O grindă de lemn de secțiune dreptunghiulară este solicitată ca în figura 7.36. Știind că în secțiunea periculoasă se produce tensiunea $\sigma_{max} = 121$ daN/cm² se cere să se calculeze valoarea intensității maxime a forței distribuite. Se dau: $a = 1$ m; $b = 12$ cm; și $h = 20$ cm.

R. $M_{i\,max} = 2{,}42\ qa^2$; $q = 400$ daN/m.

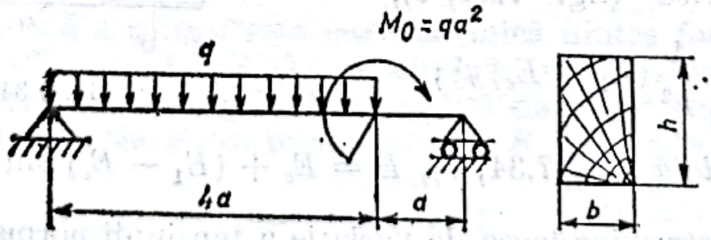


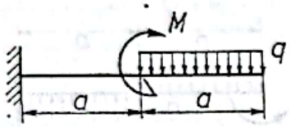
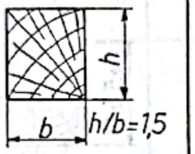
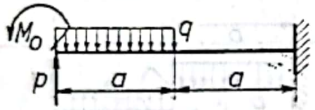
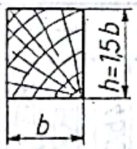
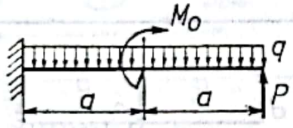
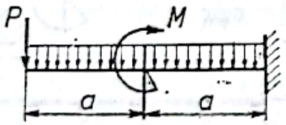
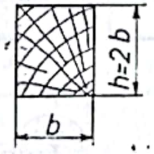
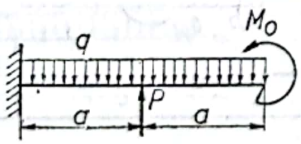
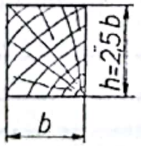
Fig. 7.36

7.37. Pentru grinzile de lemn reprezentate în tabelul 7.37 (pozițiile 1...20) se cere: a) să se traseze diagramele de eforturi T și M_i; să se dimensioneze știind că sînt de secțiune circulară sau dreptunghiulară (cu raportul h/b cunoscut). Se dă rezistența admisibilă $\sigma_a = 120$ daN/cm² (q în kN/m).

R. v. tabelul 7.37.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.37

Numărul variantei	Schema grinzilor și forțelor	Dimensiuni și sarcini: Secțiunea Raportul h/b	a	P	q	M_o	Răspuns: T	M_i	W_z	Cota b sau d
			m	kN	kNm	kNm	kN	.kNm	cm^3	cm
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1			1	10	20	10	10	−20	1670	b = 16,45
2			2	40	20	20	40	20	1670	b = 16,45
3			1	20	40	10	60	−30	2500	d = 29,4
4			1	2,5	10	5	−22,5	20	16,70	b = 13,6
5			0,5	10	20	125	35	−16,8	1355	b = 10,9

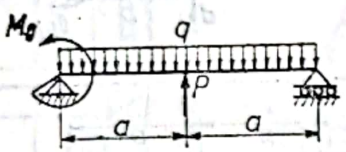
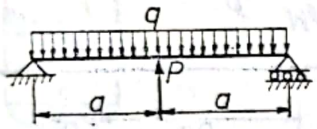
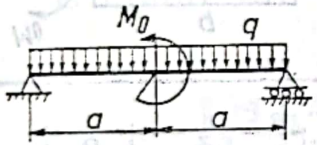
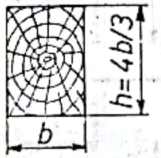
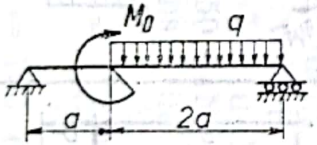
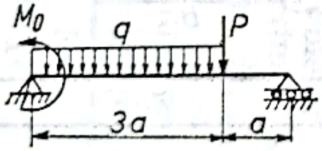
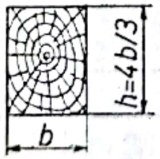
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.37. (*continuare*)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6			1	20	20	-20	20	10	833	$d=20,4$
7			1	20	20	10	-20	20	1670	$b=13,6$
8			2	20	20	20	20	20	1670	$b=17,8$
9			1	5	10	5	-1,5	10	833	$b=12,2$
10			1	10	10	10	20	30	2500	$d=29,4$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.37 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11			2	20	10	20	15	20	1670	b = 16,45
12			2	40	20	10	22,5	17,4	1450	d = 24,5
13			1	–	10	20	20	15	1250	b = 16,2
14			1	–	20	2,5	–27,5	19	158	b = 13,3
15			1	30	10	20	31,2	28,8	2400	b = 20,1

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.37 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
16			0,5	10	20	5	20	15	1250	$d=23,3$
17			1	20	20	10	23,4	10	833	$b=12,2$
18			1	50	20	20	46	28,9	2405	$b=20,1$
19			2	20	20	20	25	-20,6	1718	$d=25,8$
20			2	7,5	30	15	37,5	-15	1250	$b=14,9$

Scanned with OKEN Scanner

7.38. Traversele unei linii ferate ce trece peste un pod suportă forțele $P = 80$ kN (fig. 7.38). Știind că dimensiunile traverselor sînt $b = 21$ cm și $h = 28$ cm se cere să se calculeze tensiunile normale și tangențiale maxime din traversă.

Rezolvare. Sub acțiunea forțelor P în traversă se produce o forță tăietoare maximă $T_{max} = P$ și un moment încovoietor $M_{i\,max} = P_c = 8\,000 \cdot 20 = 160\,000$ daN·cm. Tensiunile normale maxime din traversă sînt

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i\,max}}{W_z} = \frac{160\,000 \cdot 6}{21 \cdot 28^2} =$$

$$= 58{,}3 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a =$$

$$= 100 \text{ daN/cm}^2,$$

iar tensiunile tangențiale maxime vor fi

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} = \frac{3 \cdot 8\,000}{2 \cdot 21 \cdot 28} =$$

$$= 20{,}4 \text{ daN/cm}^2 < \tau_{af} = 24 \text{ daN/cm}^2.$$

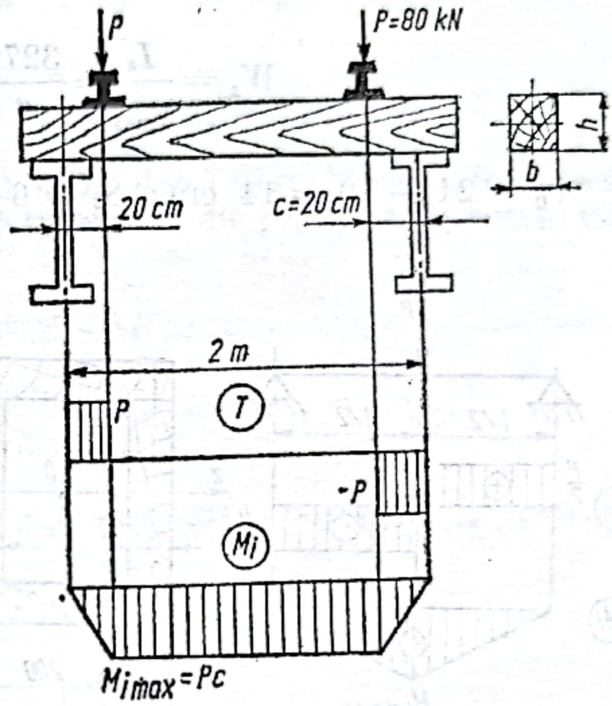
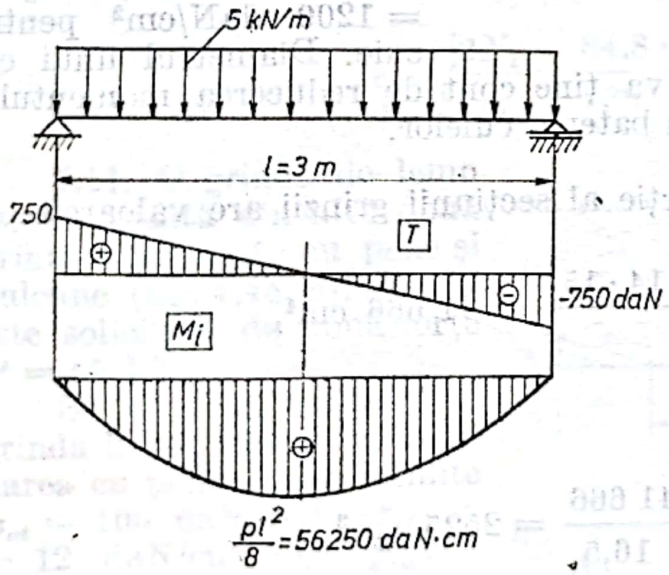


Fig. 7.38



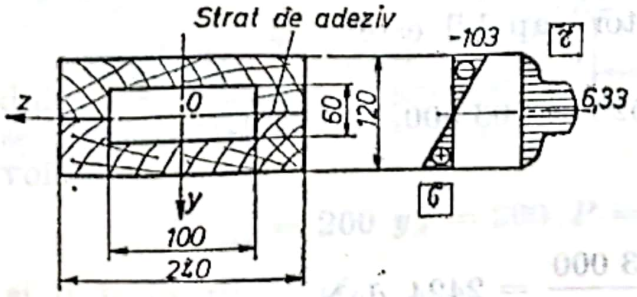


Fig. 7.39

7.39. O grindă de lemn este realizată prin încleiere din două elemente ca în figura 7.39. Grinda este supusă la încovoiere de o sarcină uniform distribuită $p = 5$ kN/m. Se cere să se calculeze tensiunile maxime din grindă și stratul de adeziv.

Rezolvare. Sub acțiunea forței distribuite în grindă se produce o forță tăietoare T și un moment încovoietor ale căror valori maxime sînt $T_{max} = 750$ daN și $M_{i\,max} = 56\,250$ daN·cm.

Tensiunile maxime vor fi:

$$\sigma_{i\,max} = \frac{M_{i\,max}}{W_z} = \frac{56\,250}{564} =$$

$$= 103 \text{ daN/cm}^2$$

și

$$\tau_{max} = \frac{TS_z}{bI_z} = \frac{750 \cdot 387}{14 \cdot 3276} =$$

$$= 6{,}33 \text{ daN/cm}^2$$

Scanned with OKEN Scanner

În relațiile de mai sus s-au înlocuit

$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12} = \frac{24 \cdot 12^3 - 10 \cdot 6^3}{12} = 3276 \text{ cm}^4;$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{3276}{6} = 564 \text{ cm}^3;$$

$$b_0 = 24 - 10 = 14 \text{ cm}; \quad S_z = 6 \cdot 24 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 387 \text{ cm}^3.$$

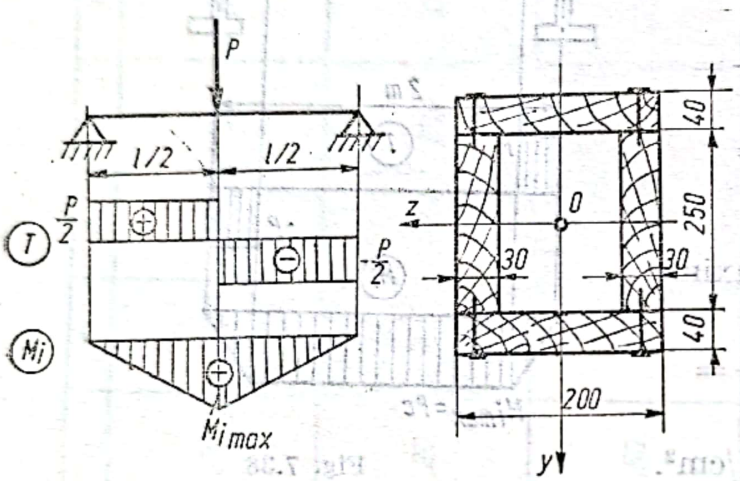


Fig. 7.40.

7.40. O grindă dreaptă, compusă din patru scînduri îmbinate cu cuie, ca în figura 7.40, are deschiderea $l = 5$ m și este simplu rezemată la capete. Grinda este solicitată de o forță P. Se cere să se determine valoarea forței P capabile și distanța e dintre cuiele de fixare a scîndurilor, dacă se admite $\sigma_a = 120$ daN/cm² pentru lemn și $\tau_a = 1200$ daN/cm² pentru cuie. Diametrul unui cui este de 3 mm. În calcule nu se va ține cont de reducerea momentului de inerție al secțiunii grinzii prin baterea cuielor.

Rezolvare. Momentul de inerție al secțiunii grinzii are valoarea

$$I_z = \frac{20 \cdot 33^3 - 14 \cdot 15^3}{12} = 41\,666 \text{ cm}^4,$$

iar modulul axial de rezistență

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{41\,666}{16{,}5} = 2525 \text{ cm}^3$$

Valoarea momentului încovoietor capabil este

$$M_i = \sigma_a W_z = 120 \cdot 2\,525 = 303\,000 \text{ daN} \cdot \text{cm},$$

de unde se obține

$$P = \frac{4M_i}{l} = \frac{4 \cdot 303\,000}{500} = 2424 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Datorită forţei tăietoare, forţa de lunecare pe unitatea de lungime, între scîndura de sus şi cele laterale este

$$n_l = \frac{TS_z}{I_z} = \frac{1212 \cdot 1160}{41666} = 33{,}7 \text{ daN/cm},$$

căci

$$T = 1212 \text{ daN} \quad \text{iar} \quad S_z = 20 \cdot 4(12{,}5 + 2) = 1160 \text{ cm}^3.$$

Forţa de lunecare longitudinală între două perechi de cuie, situate la distanţa e în lungul grinzii, şi care trebuie să fie preluată de aceste cuie este

$$N_l = n_l e = 2N_1,$$

de unde rezultă

$$e = 2N_1/n_l.$$

Pentru diametrul $d = 3$ mm, forţa capabilă a unui cui la forfecare este

$$N_1 = \frac{\pi d^2}{4} \tau_{af} = \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} \cdot 1200 = 84{,}8 \text{ daN}.$$

În acest caz distanţa maximă dintre cuie va fi egală cu

$$e = \frac{2N_1}{n_l} = \frac{84{,}8 \cdot 2}{33{,}7} \cong 5 \text{ cm}.$$

7.41. O grindă de lemn este realizată din alte două grinzi solidarizate cu pene şi buloane (fig. 7.45, *a*). Grinda este solicitată de două forţe $P = 45$ kN.

Se cere să se verifice grinda la încovoiere şi îmbinarea cu pene dacă se admite $\sigma_{at} = 100$ daN/cm², $\tau_{af\parallel} = 12$ daN/cm² şi $p_{sa\parallel} = 125$ daN/cm².

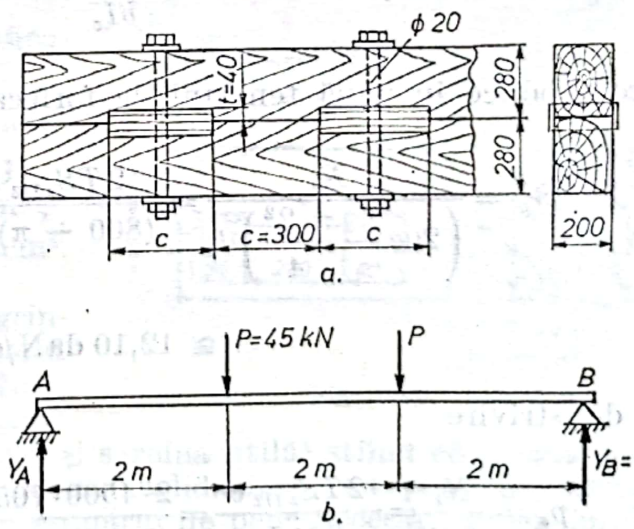


Fig. 7.41

Rezolvare. Datorită modului de solicitare în grindă se produce un moment încovoietor.

$$M_{i\,\max} = 200\, y_A = 200\, P = 200 \cdot 4500 = 9 \cdot 10^5 \text{ daN} \cdot \text{cm}$$

şi o forţă tăietoare

$$T = Y_A = P = 4500 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Caracteristicile geometrice ale secţiunii grinzii sînt:
— momentul de inerţie

$$I_z = \frac{(20 - 2)\cdot 56^3}{12} = 263\,424 \text{ cm}^4;$$

— modulul de rezistenţă axial

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{263\,424}{28} = 2408 \text{ cm}^3;$$

— momentul static al jumătăţii de secţiune

$$S_{z\,1/2} = (20 - 2)\cdot 28\cdot 14 = 18\cdot 28\cdot 14 = 7056 \text{ cm}^3.$$

Tensiunea normală din grindă datorită încovoierii este

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i\,max}}{W_z} = \frac{9\cdot 10^5}{9408} = 95{,}66 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ai} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Datorită forţei tăietoare $T = 4500$ daN, pe suprafaţa de reparaţie a celor două grinzi, între două pene, ia naştere o forţă de lunecare longitudinală

$$N_l = \tau\cdot b\cdot 2c = \frac{TS_{z\,1/2}}{bI_z}\, b\cdot 2c = 2\,\frac{TS_{z\,1/2}}{I_z}\, c,$$

care produce în pană tensiuni de forfecare

$$\tau_{fp} = \frac{N_l}{\left(20c - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\right) I_z} = \frac{2TS_{z\,1/2}\,c}{(800 - \pi)\,I_z} \cong \frac{2\cdot 4500\cdot 7056\cdot 40}{796{,}86\cdot 2{,}63\cdot 10^5} \cong$$

$$\cong 12{,}10 \text{ daN/cm}^2$$

şi de strivire

$$p_s = \frac{N_l}{20t} = \frac{2TS_{z\,1/2}\,c}{20t\,I_z} = \frac{2\cdot 4500\cdot 7056\cdot 40}{20\cdot 4\cdot 2{,}63\cdot 10^5} = 120{,}73 < p_{sa\,II} =$$

$$= 125 \text{ daN/cm}^2.$$

Se observă că grinda se încadrează în condiţiile de rezistenţă.

Scanned with OKEN Scanner

7.42. O grindă este alcătuită din două rigle de lemn masiv, de secțiune variabilă, încleiate cu două foi de placaj ca în figura 7.42. Pe grindă acționează forța $P = 5$ kN. Se cere să se calculeze tensiunea maximă din grindă.

R. $\sigma_{max} \cong 121{,}5$ daN/cm².

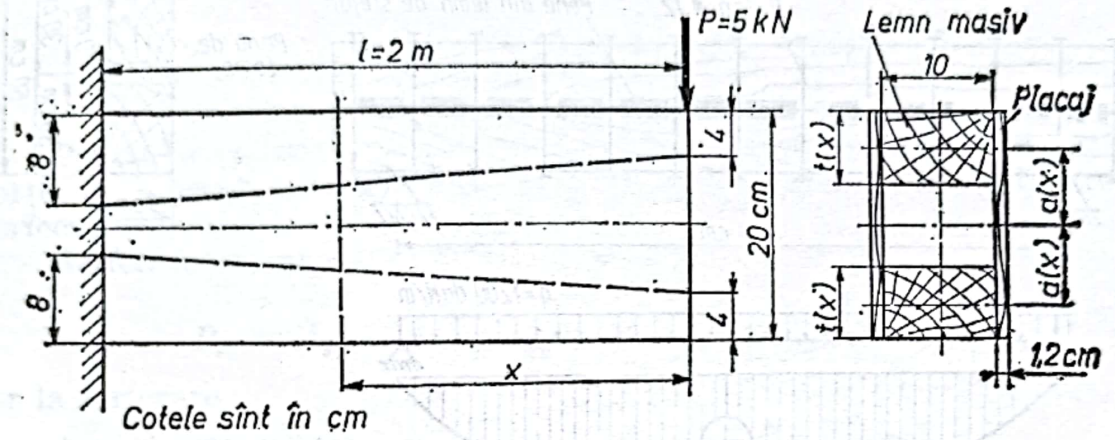


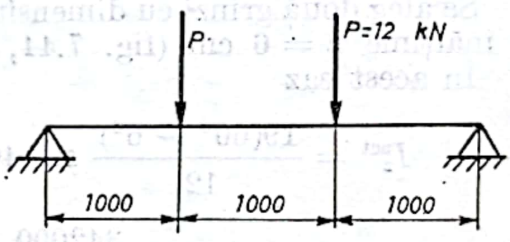
Fig. 7.42

7.43. Pentru o grindă de lemn confecționată din alte două grinzi cu dimensiunile 12 ×20 cm², îmbinate cu pene și solicitate de forțele $P = 12$ kN (fig. 7.43), se cere :

a) tensiunile de forfecare din pene și grinzi (pe distanța dintre două pene) ;

b) presiunea de strivire pe pene ;

c) tensiunea maximă de încovoiere.



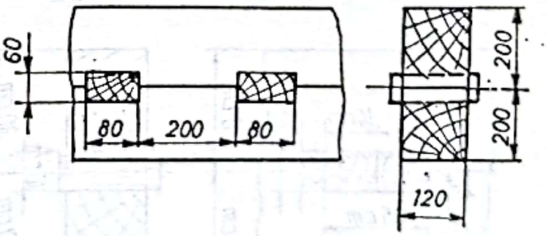


Fig. 7.43

R. a) $\tau_p = 12{,}5$ daN/cm² ;
$\tau_g = 5$ daN/cm² ;
b) $p_s = 33{,}3$ daN/cm² ;
c) $\sigma_{i\,max} = 37{,}5$ daN/cm².

7.44. Să se dimensioneze grinda principală a unui pod provizoriu din lemn de 8,00 m lungime (fig. 7.44, *a*), încărcată cu o sarcină distribuită $q = 1200$ daN/m (greutatea proprie și sarcina utilă) știind că grinda este formată din două elemente suprapuse solidarizate cu pene de stejar. Totodată se cere să se stabilească numărul de pene necesar, dimensiunile acestora și poziția lor de amplasare. În calcule se va ține cont de slăbirea grinzii prin fixarea penelor.

Rezolvare. Momentul maxim este la mijlocul grinzii și este egal cu

$$M_{i\,max} = ql^2/8 = 1200 \cdot 8^2/8 = 9600 \text{ daN} \cdot \text{m} = 9{,}6 \cdot 10^5 \text{ daN} \cdot \text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din condiţia de rezistenţă la încovoiere rezultă

$$W_{i\,nec}^{net} = \frac{M_{i\,max}}{k_w \sigma_{at}} = \frac{9{,}6 \cdot 10^5}{0{,}9 \cdot 100} = 10660 \text{ cm}^3.$$

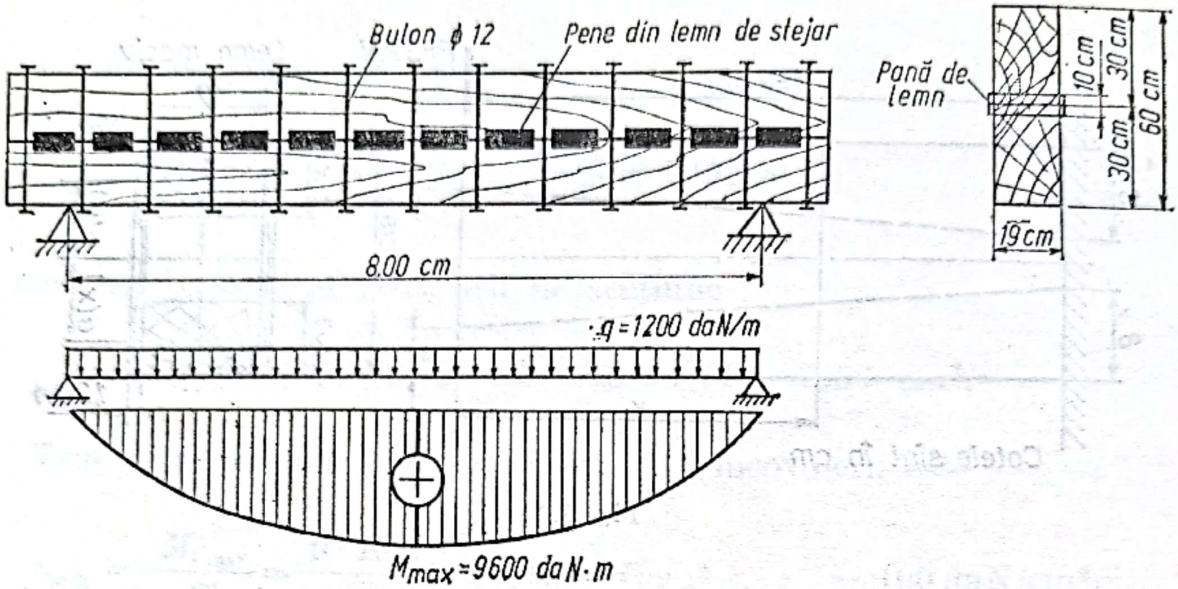


Fig. 7.44a

În calculul modulului de rezistenţă s-a considerat coeficientul $k_w = 0{,}9$.

Se aleg două grinzi cu dimensiunile 19 · 30 cm² şi penele de solidarizare de înălţime $h = 6$ cm (fig. 7.44, *a*).

În acest caz

$$I_z^{net} = \frac{19(60^3 - 6^3)}{12} \cong 340\,345 \text{ cm}^4 \text{ şi } W_z^{net} = \frac{I_z}{0{,}5\, h_{max}} =$$

$$= \frac{342000}{30} = 11345 \text{ cm}^3.$$

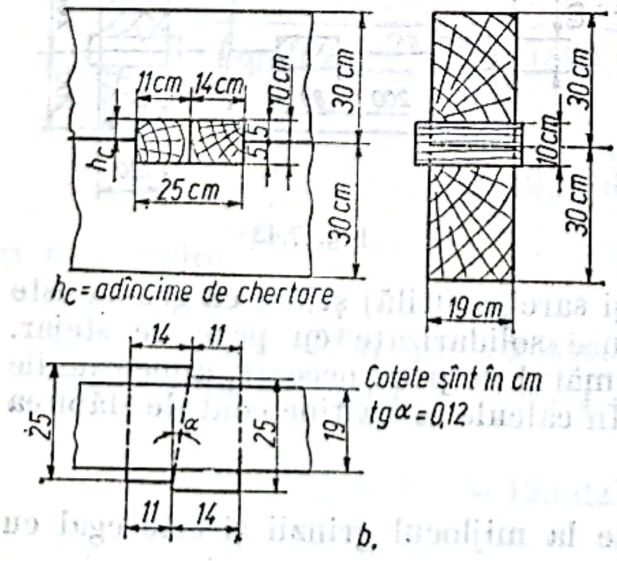


Fig. 7.44.b

Se observă că $W_z^{net} > W_{z\,nec}^{net}$.

Din punct de vedere al rigidităţii se verifică săgeata grinzii :

$$v_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI_{zef}^{net}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 1200 \cdot 10^{-2} \cdot 8^4 \cdot 10^8}{384 \cdot 10^5 \cdot 228241} =$$

$$= 2{,}92 \text{ cm} < v_a = \frac{l}{250} =$$

$$= \frac{800}{250} = 3{,}2 \text{ cm}.$$

unde $I_{z.ef}^{net} = I_z^{net} k_I = 342000 \cdot 0{,}7 =$
$= 22824 \text{ cm}^4$ şi $E = 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

Pentru solidarizarea grinzilor se aleg pene reglabile din stejar cu dimensiunile (fig. 7.44, *b*).

$$h_p = 10 \text{ cm}; \; l_p = 25 \text{ cm} \text{ și } b_p = 25 \text{ cm},$$

care respectă condițiile

$$h_c = h_p/2 < \frac{h}{8} = 30 : 5 = 6; \; l_p/h_c = 25/5 = 5.$$

Pentru a calcula numărul necesar de pene, care trebuie să reziste forței de lunecare se calculează forța capabilă a unei pene la strivire și forfecare.

Astfel, forța capabilă la strivire este

$$P_{s1} = A_s \sigma_{as\perp} = bh_c \sigma_{as\perp} = 19 \cdot 5 \cdot 50 = 4750 \text{ daN}$$

iar la forfecare

$$P_{f1} = A_f \tau_{af} = b_p l_p \tau_a = 25 \cdot 25 \cdot 10 = 6250 \text{ daN}$$

deci

$$P_{\min}(P_{f1} \text{ și } P_{s1}) = 4750 \text{ daN} = P_{cap1}.$$

Datorită forței distribuite în grindă se produce o forță tăietoare T a cărei variație este prezentată în figura 7.44, *c* și care produce tensiunea tangențială maximă

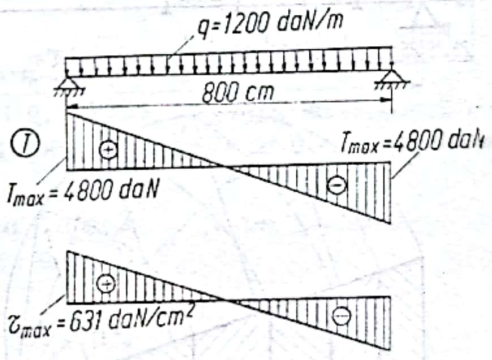


Fig. 7.44c

$$\tau_{\max} = \frac{TS_z}{bI_z} = \frac{4\,800 \cdot 8\,550}{19.\,342\,000} =$$

$$= 6{,}31 \text{ daN/cm}^2.$$

Forța de lunecare totală este

$$N_l^{tot} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau_{\max} \cdot b \cdot 0{,}5\, l = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6{,}31 \cdot 19 \cdot 0{,}5 \cdot 800 = 48000 \text{ daN}.$$

Numărul necesar de pene este

$$n_p^{nec} = \frac{N_l^{tot}}{P_{cap1}} = \frac{48000}{4750} = 10{,}08 \cong 10 \text{ pene}.$$

Așezarea penelor pe lungimea grinzii se poate face în felul următor [32, 48]:

— la distanțe egale (fig. 7.44, *d'*); în acest caz numărul de pene se majorează cu 50%, deci pe întreaga lungime a grinzii se așază 15 pene cu distanța între ele $e = 34$ cm;

Scanned with OKEN Scanner

— la distanțe egale pe $20.0{,}4.l$ din grindă și majorînd numărul de pene cu 20%; deci $n_p = 1{,}2.10 = 12$ pene cu distanța între ele $e = 39$ cm; pe distanța centrală de $0{,}2\ l$ unde eforturile de lunecare sînt mici nu se așază pene (fig. 7.44, *d''*);

— la distanțe inegale, prin împărțirea diagramei eforturilor de lunecare (fig. 7.44, *d'''*) în părți egale astfel încît toate penele să se încarce egal, rezultînd deci $e_1 = 25$ cm, $e_2 = 25$ cm, $e_3 = 35$ cm și $e_4 = 50$ cm.

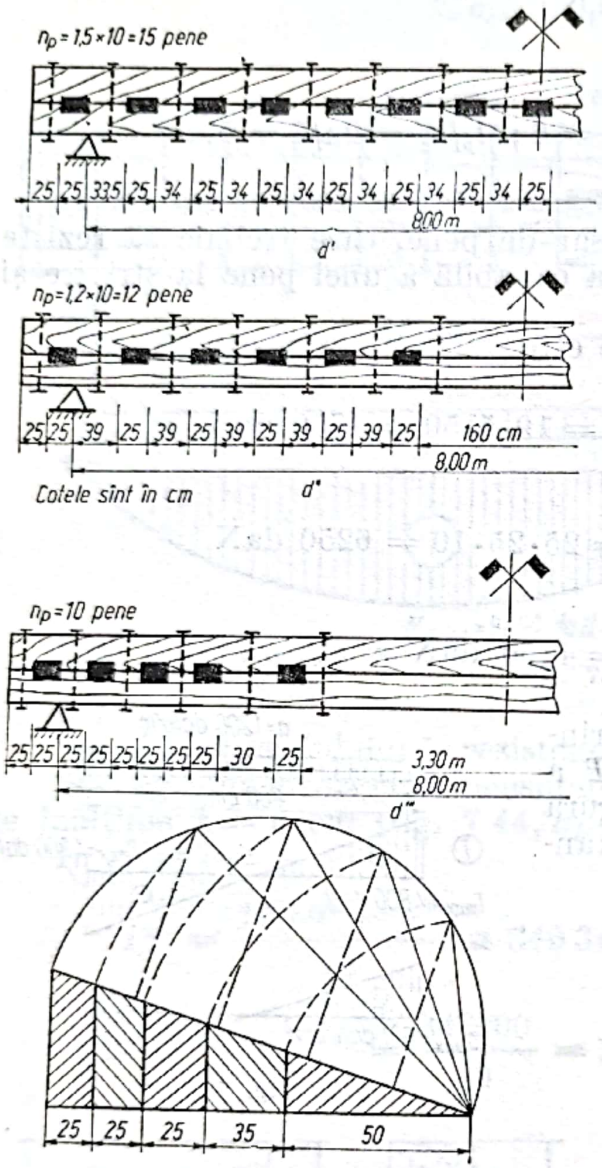


Fig. 7.44d

Prin efectuarea chertărilor pentru pene este posibil ca să se distrugă porțiunile dintre pene prin forfecare în lungul fibrelor. Tensiunea maximă de forfecare este

$$\tau_{f\parallel} = \frac{N_l^{ef}}{bek_f} = \frac{4800}{25 \cdot 25 \cdot 0{,}85} =$$

$$= 9{,}05\ \text{daN/cm}^2 < \tau_{af\parallel} =$$

$$= 10\ \text{daN/cm}^2,$$

căci $N_l^{ef} = N_l^{tot}/n_p = 4800/10 = 4800$ daN; $e = 25$ cm este distanța minimă în cazul trei de așezare a penelor); $b = 25$ cm; $k_f = 0{,}85$ (coeficient ce ține cont de slăbirea secțiunii și concentrarea tensiunilor).

7.45. Să se determine îmbinarea tălpii întinse a unei ferme, realizată cu eclise cu tacheți metalici, în următoarele condiții: talpa este executată din lemn rotund avînd $d = 24$ cm; efortul în panou $N = 272$ kN, rezistența admisibilă în lemn la întindere $\sigma_{at} = 85$ daN/cm²; la strivire $\sigma_{as} = 120$ daN/cm² și la forfecare $\tau_{af\parallel} = 12$ daN/cm² (fig. 7.45).

Rezistențele admisibile ale oțelului sînt: $\sigma = 1400$ daN/cm²; în niturile îmbinării (cu cap înecat și cu găuri date cu burghiul) la forfecare $\tau_a = 1120$ daN/cm² și la presiune pe gaură $p_{sa} = 2240$ daN/cm²; în buloane de întindere $\sigma_{at} = 1200$ daN/cm².

Rezolvare. Se prevăd două eclise metalice cu trei pene pentru fiecare jumătate, adică în total 6 pene de fiecare parte a rostului (fig. 7.45).

Efortul ce revine unei pene este

$$N_p = N/np = 27200/b \cong 4530\ \text{daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Suprafața necesară la strivire pentru o singură pană este

$$A_s = \frac{N_p}{0{,}9\,\sigma_{as}} = \frac{4530}{0{,}9 \cdot 120} = 42 \text{ cm}^2.$$

Coeficientul 0,9 aplicat rezistenței admisibile s-a introdus deoarece de o singură parte a îmbinării sînt dispuse trei pene (se ține seama de neuniformitatea de încărcare a fiecărei pene).

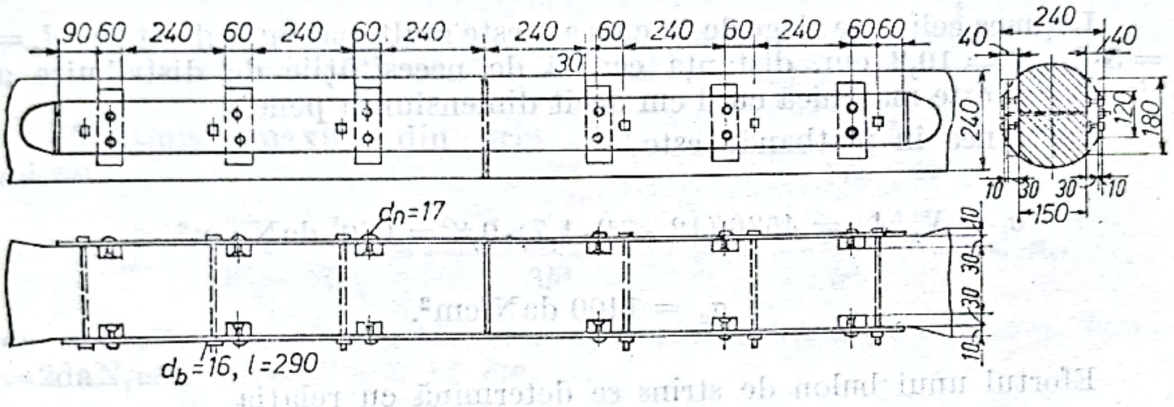


Fig. 7.45

Se alege înălțimea penelor $h_p = 3$ cm, iar lățimea $l_p = 6$ cm.

Suprafața de strivire se stabilește (fig. 7.45) ținîndu-se seama de existența în dreptul îmbinării a unor teșituri pe o adîncime de 1 cm necesare pentru fixarea ușoară a ecliselor.

Suprafața strivită este diferența suprafețelor a două segmente de cerc care au înălțimi egale cu 4 și 1 cm (v. cap. 2)

$$A_s = 49{,}5 - 6{,}44 \cong 43 \text{ cm}^2,$$

care reprezintă o suprafață mai mare decît cea necesară.

Distanța necesară între pene, ținînd seama de rezistența admisibilă la forfecare

$$l_p = \frac{N_p}{0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot \tau_a b} = \frac{4530}{0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 12 \cdot 17{,}9} = 27{,}5 \text{ cm}.$$

Luînd $l_p = 27$ cm se respectă condiția $l_p < 10\ h_p$ (coarda segmentului este determinată cu ajutorul tabelului din cap. 2).

Fixarea penelor de platbande se realizează cu 2 nituri $d_n = 17$ mm iar grosimea ecliselor se alege $\delta = 8$ mm.

Sarcina admisă pe un singur nit este :

la forfecare :

$$T_{fn} = \frac{\pi d^2 n}{4} \tau_a = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}7^2}{4} 1120 = 2540 \text{ daN};$$

la presiunea pe gaură:

$$T_{sn} = d_n \cdot \delta p_{sa} = 1{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 2240 = 3040 \text{ daN}.$$

Efortul ce revine unui singur nit:

$$T_n = N_p/n = 4530/2 = 2255 < T_{fn} = 2540 \text{ daN}$$

este mai mic decît cel admisibil.

Lățimea eclisei se alege de 12 cm care este mult mai mult decît $3n \cdot d_a = 3 \cdot 2 \cdot 1{,}7 = 10{,}2$ cm, distanța cerută de necesitățile de distribuire a niturilor și este mai mică cu 6 cm decît dimensiunea penei.

Tensiunea în platbandă este

$$\sigma = N_p/A_n = 4530/(12 - 2 \cdot 1{,}7) \cdot 0{,}8 = 660 \text{ daN/cm}^2 <$$

$$< \sigma_a = 1400 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unui bulon de strîns se determină cu relația

$$N_b = \frac{N_p(h_p + \delta)}{2s} = \frac{4530(3 + 0{,}8)}{2 \cdot 8} = 1080 \text{ daN},$$

unde $s = l_p + d_b = 6 + 1{,}7 \cong 8$ cm.

Secțiunea necesară a bulonului în dreptul slăbirii produse de filet este

$$A_b = \frac{N_b}{\sigma_{at}} = \frac{1080}{1200} = 0{,}9 \text{ cm}^2.$$

Se iau buloane cu $d_n = 16$ mm cu o suprafață

$$A_n = 1{,}311 \text{ cm}^2 > A_b = 0{,}9 \text{ cm}^2$$

(filetul fiind 5/8″).

Se verifică rezistența în secțiunea slăbită a tălpii, pentru care se găsește în prealabil suprafața netă (fig. 7.45):

$$A_n = A_{br} - 2A_c - A_b = 452 - 2 \cdot 49{,}5 - 1{,}6(24 - 2.4) = 326 \text{ cm}^2.$$

Tensiunea maximă este

$$\sigma = \frac{N}{A_n} = \frac{27\,200}{326} = 83{,}5 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 85 \text{ daN/cm}^2 \text{ [32]}$$

Scanned with OKEN Scanner

7.46. O grindă de lemn este solicitată de o sarcină uniform distribuită ca în figura 7.46, *a*. Se cere să se dimensioneze grinda dacă $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Se observă că grinda este supusă la încovoiere oblică, momentul încovoietor maxim fiind $M_{i\,max} = 2\,a^2q$ cu componentele (fig. 7.46,*b*):

$$M_z = 2a^2q \cos 30^\circ \text{ şi } M_y = 2\,a^2q \sin 30^\circ.$$

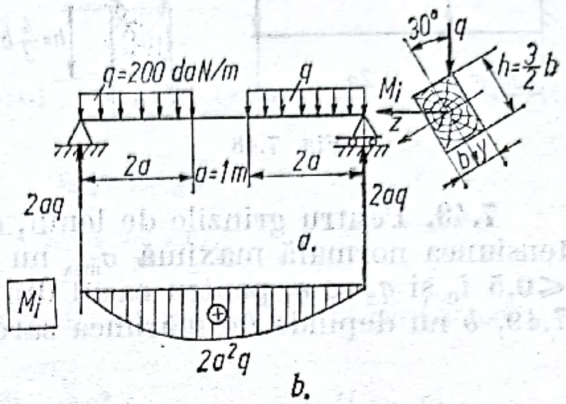


Fig. 7.46

Tensiunea maximă din grindă este

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{8 \cdot 2a^2q \cos 30^\circ}{3b^3} + \frac{4 \cdot 2a^2q \sin 30^\circ}{b^3} \leqslant \sigma_a.$$

de unde, înlocuind $a = 100$ cm, $\sigma_a = 100$ daN/cm², $q = 200$ daN/m = 2daN/cm, rezultă $b \cong 12$ cm.

7.47. O grindă de lemn, de secţiune circulară cu diametrul d, este solicitată la încovoiere strîmbă de două forţe verticale şi două forţe orizontale, ca în figura 7.47. Se cere să se dimensioneze această grindă ştiind că $\sigma_a = 90$ daN/cm².

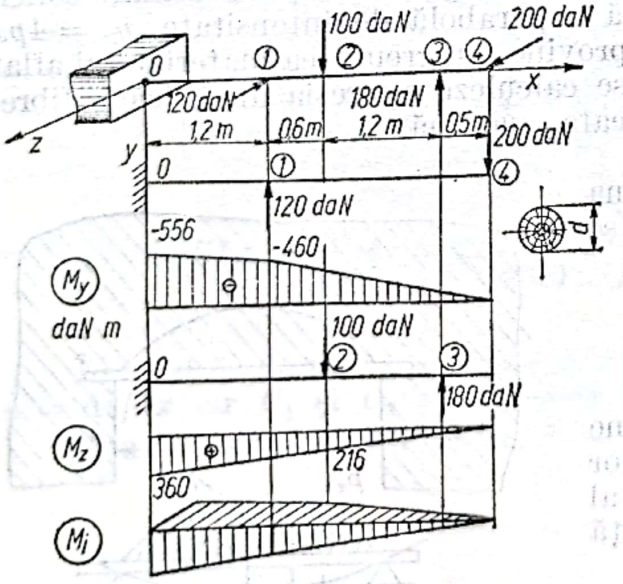


Fig. 7.47

Rezolvare. Se studiază încovoierea în plan vertical şi orizontal respectiv se trasează diagramele de momente încovoietoare M_z şi M_y. Se observă că momentul încovoietor rezultant maxim (care întotdeauna este în dreptul unei forţe concentrate) se găseşte în secţiunea din încastrare, respectiv

$$M_{i\,max} = \sqrt{M_y^2 - M_z^2} = \sqrt{556^2 + 360^2} = 662 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

Din condiţia de rezistenţă

$$\sigma_{max} = M_{i\,max}/W_z \leqslant \sigma_a$$

se obţine

$$W_{z\,nec} = M_{i\,max}/\sigma_a = \pi d^3/32,$$

de unde rezultă

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,M_{i\,max}}{\pi\,\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 66200}{\pi 90}} = 19{,}6 \text{ cm} \cong 20 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

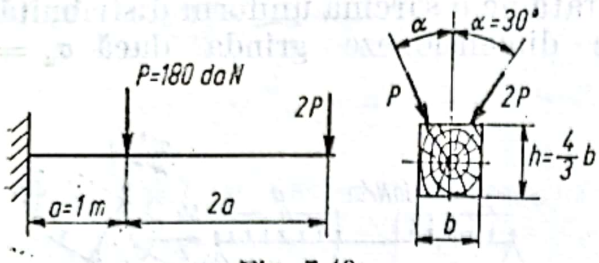


Fig. 7.48

7.48. O consolă este realizată dintr-o grindă de lemn de dimensiuni $b \cdot h$ și solicitată ca în figura 7.48, de forțele P și $2P$. Se cere să se dimensioneze dacă $\sigma_a = 100$ daN/cm² și $h = 1{,}33\ b$.

R. $b \cong 18$ cm.

7.49. Pentru grinzile de lemn, din figura 7.49, *a* și *b*, să se arate că tensiunea normală maximă σ_{max} nu depinde de mărimile a și q_2 cînd $a \leqslant 0{,}5\ l_0$ și $q_2 < q_1$ pentru cazul din figura 7.49, *a* iar în cazul din figura 7.49, *b* nu depinde de mărimea sarcinii q_2 cînd $c \leqslant a$ și $q_2 \leqslant q_1$.

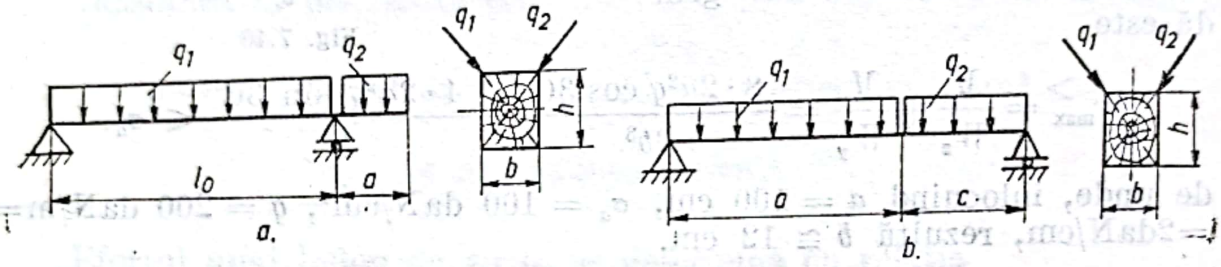


Fig. 7.49

7.50. Pentru calculul suporților de lemn așezați deasupra ușilor sau ferestrelor din peretele unei clădiri din cărămidă sau deasupra canalelor de vizitare (fig. 7.50) acestea se consideră ca grinzi simplu rezemate solicitate de o sarcină distribuită după o parabolă de intensitate $p_x = 4px\,(l - x)/l^2$. Sarcina se consideră că provine din greutatea materialului aflat pe suportul de lemn. Se cere să se calculeze expresia analitică a fibrei medii deformate a grinzii și săgeata maximă.

Rezolvare. Pentru a determina expresia fibrei medii deformate se utilizează ecuația diferențială

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_i}{EI_z},$$

în care v este săgeata în secțiune curentă, M_i — momentul încovoietor iar EI_z — modulul de rigiditate al secțiunii grinzii (în cazul de față EI_z — const).

Valoarea sarcinii pe porțiunea $O-x$ este

$$Q_{o-x} = \int_0^x p_x\,dx = \frac{4p}{l^2}\int_0^x (xl - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{px^2}{l^2}\,(3l - 2x)$$

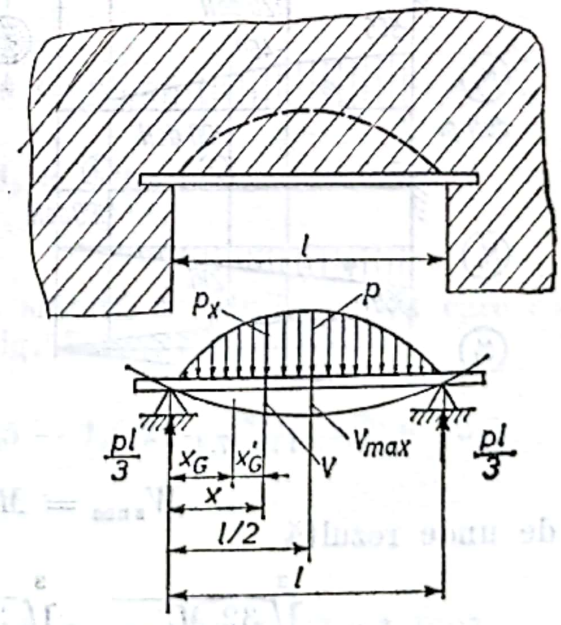


Fig. 7.50

și acționează în centrul de greutate a cărei abscisă este

$$x_G = \left[\int_0^x p_x x \, dx\right] \Big/ \left[\int_0^x p_x \, dx\right] = (4xl - 3x^2)/2(3l - 2x).$$

Distanța x'_G de la secțiunea curentă x pînă la centrul de greutate este (fig. 7.50):

$$x'_G = x - x_G = \frac{x(2l - x)}{2(3l - 2x)}.$$

Expresia momentului încovoietor M_i în secțiunea curentă este

$$M_i = \frac{pl}{3} x - Q_{Ox} x'_G = \frac{pl}{3} x - \frac{2}{3} \frac{px^2}{l^2} (3l - 2x) \frac{x(2l - x)}{2(3l - 2x)} =$$

$$= \frac{pl}{3} x - \frac{p}{3l^2} (2lx^3 - x^4).$$

În relația de mai sus s-a înlocuit reacțiunea din reazem cu $pl/3$.

Introducînd expresia momentului încovoietor în ecuația diferențială și făcînd integrările succesive se obține:

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{p}{3l^2} (2lx^3 - x^4) - \frac{pl}{3} x;$$

$$EI_z \frac{dv}{dx} = EI_z \varphi = \frac{p}{3l^2} \left(\frac{1}{2} lx^4 - \frac{1}{5} x^5\right) - \frac{1}{6} plx^2 + C_1;$$

$$EI_z v = \frac{p}{3l^2} \left(\frac{l}{10} x^5 - \frac{1}{30} x^6\right) - \frac{1}{18} plx^3 + C_1 x + C_2.$$

În relațiile de mai sus φ este rotirea secțiunii curente și este egală cu $\varphi = dv/dx$ iar C_1 și C_2 sînt constante de integrare.

Punînd condițiile de legătură

$$x = 0 \rightarrow v = 0 \text{ și } x = l \rightarrow v = 0$$

rezultă $C_1 = pl^3/30$ și $C_2 = 0$

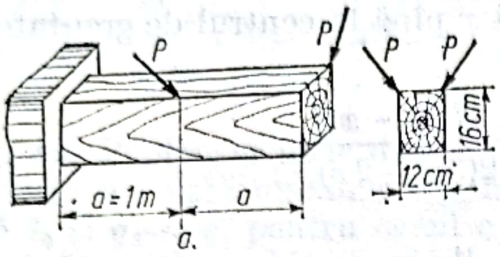
Expresia fibrei medii deformate este

$$v = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{p}{3l^2} \left(\frac{l}{10} x^5 - \frac{1}{30} x^6\right) - \frac{pl}{10} x^3 + \frac{pl^3}{30} x\right]$$

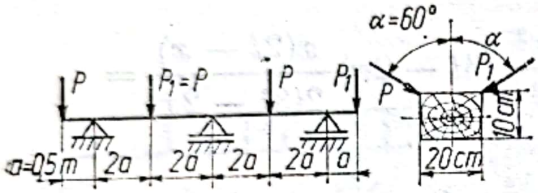
Scanned with OKEN Scanner

iar săgeata maximă este la mijlocul grinzii, respectiv pentru $x = l/2$ se obține

$$v_{max} = \frac{61}{5760}\,\frac{pl^4}{EI_z} \cong 0{,}0106\,\frac{pl^4}{EI_z}.$$



a.



b.

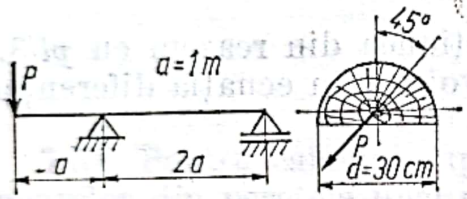


Fig. 7.51

7.51. Pentru grinzile din lemn din figura 7.51, *a*, *b* și *c* se cere să se calculeze P_{cap} astfel încît în secțiunea periculoasă să nu se depășească $\sigma_a = 100$ daN/cm².

R. a. $P \cong 160$ daN;

b. $P \cong 12{,}9$ kN;

c. $P = 0{,}0295\,\dfrac{\sigma_a d^3}{a} \cong 8$ kN.

7.52. Să se studieze modul de variație a rigidității la încovoiere a unui catarg (fig. 7.52, *a*).

Rezolvare. În studiul dinamicii mașinilor de exploatat și transportat lemnul o importanță deosebită a prezintă rigiditatea la încovoiere a catargelor, exprimată prin modulul de rigiditate EI_z. După cum se observă în expresia modulului de rigiditate intră doi termeni. E — modulul de elasticitate longitudinală și I_z — momentul de inerție secțiunii arborelui, ambele variabile în lungul unui catarg. Pentru a determina modulul de rigiditate EI_z se consideră catargul ca fiind sub forma unui trunchi de con simplu rezemat la capete (fig. 7.52, *a*) solicitat la încovoiere de greutatea proprie ca sarcină distribuită.

Din expresia diferențială a fibrei medii deformate a unei bare supusă la încovoiere rezultă

$$EI_z^{(x)} = -\frac{M_i(x)}{v''}\sqrt{[1 + (v')^2]^3}, \qquad (a)$$

în care v este săgeata în secțiunea curentă, în cm

x — abscisa secțiunii curente, în m;

$M_i(x)$ — momentul încovoietor în secțiunea curentă, variabil în lungul catargului.

Expresia momentului încovoietor într-o secțiune curentă este

$$M_i(x) = Y_0 x - \int_0^x Q_1(\xi)\,(x - \xi)\,d\xi, \qquad (b)$$

în care Y_0 este reacțiunea din reperul O,

ξ — abscisa curentă a intensității greutății Q_1

$Q_1(\xi)$ — intensitatea greutății (greutatea unității de lungime) care este egală cu

$$Q_1(\xi) = gm_1(\xi) = \frac{\pi D^2(\xi)}{4} g\rho, \qquad (c)$$

unde $m_1(\xi)$ — este masa unității de lungime;

$D(\xi)$ — diametrul secțiunii catargului, variabil pe lungime;

g — accelerația gravitațională;

ρ — densitatea lemnului fără coajă.

După cum rezultă din relația (a) determinarea modulului de rigiditate $EI_z^{(x)}$ necesită pe lîngă cunoașterea variației momentului încovoietor și cea a săgeții, respectiv a fibrei medii deformate.

Expresia momentului încovoietor $M_i(x)$ se determină în două variante:

a — În reazemul din stînga se găsește capătul gros al catargului, avînd diametrul D_b (fig. 7.52, *b*).

În acest caz

$$Y_0 = (1 - \alpha_G)\, Q \text{ și}$$

$$D(\xi) = D_b - \beta\xi,$$

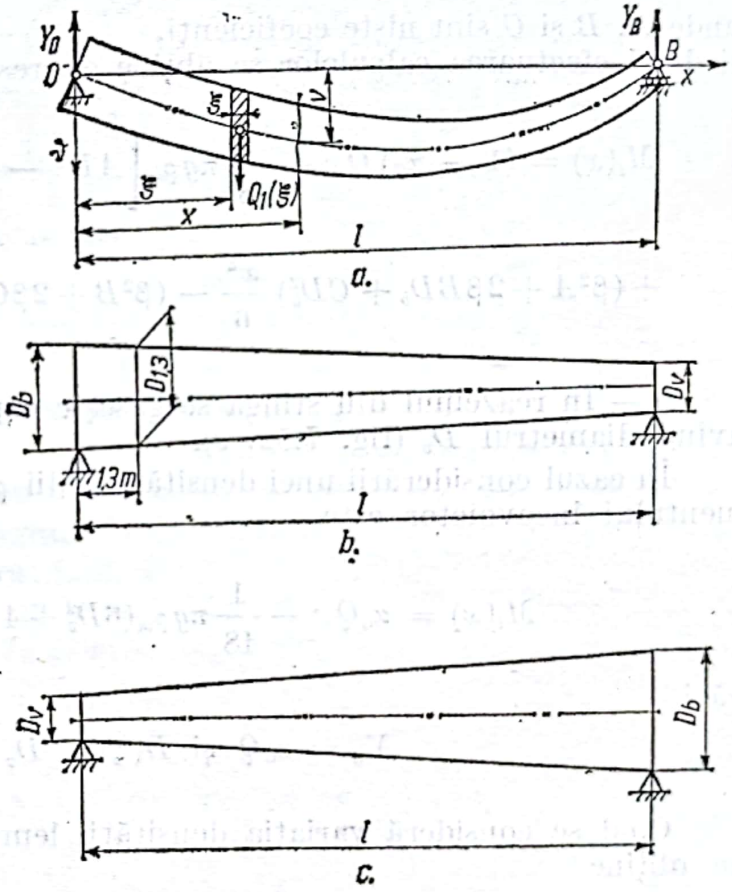


Fig. 7.52

unde

Q este greutatea catargului;

α_G — abscisa relativă a distanței de la baza catargului pînă la centrul de greutate al catargului;

β — conicitatea; $\beta = (D_b - D_v)/l$; unde D_b și D_v sînt diametrele de la baza respectiv vîrful catargului.

Greutatea unității de lungime a catargului este

$$Q_1(\xi) = \frac{\pi}{4}(D_b - \beta\xi)^2 g\rho_m, \qquad (d)$$

unde ρ_m este densitatea medie a lemnului.

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd expresiile lui Y_0 și $Q_1(\xi)$ în expresia (b) a momentului încovoietor se obține

$$M_i(x) - (1 - \alpha_G)\left(Qx - \frac{1}{48}\pi g \rho_m (6D_b^2 - 4\beta x D_b + \beta^2 x^2)\right) x^2.$$

În cazul considerării variației densității lemnului în lungul lungimii catargului după legea

$$\rho = \rho(x) = (A - Bx + Cx^2)\rho_m, \qquad \text{(e)}$$

unde A, B și C sînt niște coeficienți,
și după efectuarea calculelor se obține expresia momentului încovoietor

$$M_i(x) = (1 - \alpha_G) Qx - \frac{1}{8}\pi g \rho_m \left[AD^{\frac{2}{b}} - (2\beta AD_b + BD_b^2)\frac{x}{3} + \right.$$

$$\left. + (\beta^2 A + 2\beta BD_b + CD_b^2)\frac{x^2}{6} - (\beta^2 B + 2\beta CD_b)\frac{x_3}{10} + \beta^2 C \frac{x^4}{15}\right] x^2. \qquad \text{(f)}$$

b — În reazemul din stînga se găsește capătul subțire al catargului avînd diametrul D_v (fig. 7.52, *c*).

În cazul considerării unei densități medii ρ_m a lemnului, expresia momentului încovoietor este

$$M_i(x) = \alpha_G Q x - \frac{1}{48}\pi g \rho_m (6D_v^2 + 4\beta D_v x + \beta^2 x^2) x^2 \qquad \text{(g)}$$

căci

$$Y_0 = \alpha_G Q \quad \text{și} \quad D(\xi) = D_v + \beta\xi$$

Cînd se consideră variația densității lemnului după legea $\rho = \rho(\xi)$ se obține

$$M_i(x) = \alpha_G Q x - \frac{1}{8}\pi g \rho_m \left[AD_v^2 + (2\beta AD_v - BD_v^2)\frac{x}{3} + \right.$$

$$\left. + (\beta^2 A - 2\beta BD_v + CD_v^2)\frac{x^2}{6} - (\beta^2 B - 2\beta CD_v)\frac{x^3}{10} + \beta^2 C \frac{x^4}{15}\right] x^5. \qquad \text{(h)}$$

Pentru a determina expresia $EI_z^{(x)}$ este nevoie de ecuația fibrei medii deformate v. Pe baza unor cercetări experimentale [39, 40] expresia fibrei medii deformate este de forma

$$v = ax + bx^2 + cx^3, \qquad \text{(i)}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde x se ia în m iar v cm, iar coeficienţii a, b şi c, pentru catargele de molid, în funcţie de diametrul $D_{1,3}$, la 1,3 m de bază sînt daţi în tabelul 7.52, a.

Tabelul 7.52 a

$D_{1,3}$ [m]	a [cm/m]	b [cm/m²]	c [cm/m³]	Db [cm]	Dv [cm]	L [m]
12	4,000	−0,4500	−0,00195	15,5	5,5	8,7
16	6,740	−0,1924	−0,02587	18,9	6,6	12,1
20	7,890	−0,0400	−0,03084	23,66	6,9	15,3
24	9,840	−0,1500	−0,02410	30,8	8,2	17,2
28	6,643	+0,6865	−0,05300	35,0	7,7	19,0

Derivînd relaţia (i) se obţine

$$v' = a + 2_b x + 3\ cx^2; \tag{j}$$

$$v'' = 2_b + 6\ cx. \tag{k}$$

După efectuarea înlocuitorilor şi calculelor cu ajutorul calculatorului electronic se obţin diagramele de variaţie a momentului încovoietor $M_i(x)$ prezentate în figura 7.52, d.
Cu aceste date s-au obţinut valorile modulelor de rigiditate $EI_z^{(x)}$, care sînt prezentate în figura 7.52, e. Din acest grafic se poate conchide că

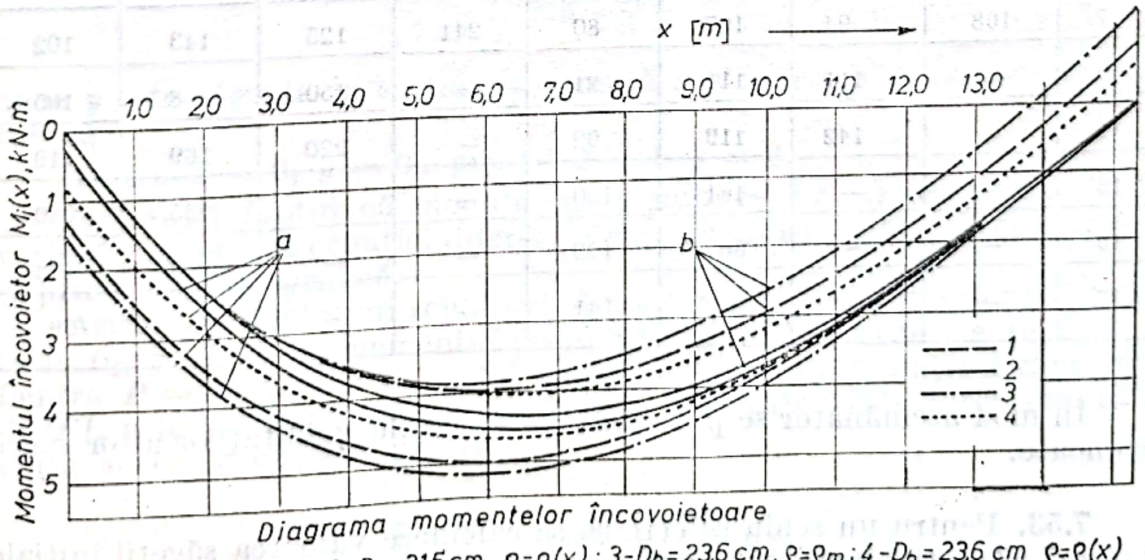


Diagrama momentelor încovoietoare

1-D_b=21,5 cm, $\varrho=\varrho_m$; 2-D_b=21,5 cm, $\varrho=\varrho(x)$; 3-D_b=23,6 cm, $\varrho=\varrho_m$; 4-D_b=23,6 cm $\varrho=\varrho(x)$
a-capătul gros în stînga; b-capătul subţire în stînga

Fig. 7.52, *d*

Scanned with OKEN Scanner

variaţia modulului de rigiditate $EI_z^{(x)}$ în lungul catargului se realizează după o funcţie liniară de forma

$$EI_z^{(x)} = p - kx, \tag{1}$$

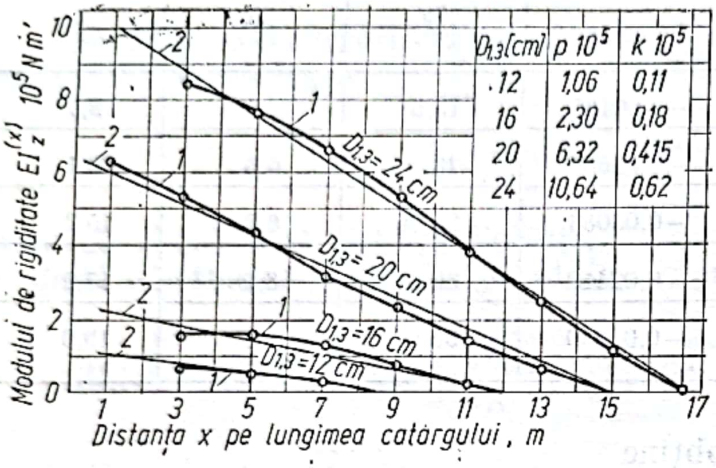


Fig. 7.52, *e*

unde coeficienţii p şi k sînt prezentaţi în figura 7.52, *e*.

Cunoaşterea modulului de rigiditate $EI_z^{(x)}$ permite determinarea şi a variaţiei modulului de elasticitate E în lungul catargului. Pe baza celor prezentate în tabelul 7.52, *b* se dau valorile modulului de elasticitate E în lungul unui buştean de molid cu coajă şi fără coajă.

Tabelul 7.52 b

x [m]	Modulul de elasticitate $E \cdot 10^3$ [daN/cm²] pentru $D_{1,3}$ [m]							
	cu coajă				fără coajă			
	12	16	20	24	12	16	20	24
1	22	19	70	28	29	26	93	38
3	91	49	97	61	126	62	131	80
5	161	79	101	68	223	93	135	87
7	168	94	107	80	241	125	143	102
9	—	111	111	81	—	150	168	105
11	—	142	119	92	—	220	169	119
13	—	—	161	130	—	—	235	180
15	—	—	56	122	—	—	88	173
17	—	—	—	41	—	—	—	59

În mod asemănător se pot studia şi variaţiile rigidităţilor altor specii lemnoase.

7.53. Pentru un schiu se cere să se calculeze valoarea săgeţii iniţiale y (fig. 7.53) astfel încît sub acţiunea greutăţii P a schiorului schiul să facă contact cu zăpada pe toată lungimea sa. Presiunea dintre zăpadă şi schiu se va considera uniform distribuită.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Sub acțiunea forței P apare în lungul schiului presiunea $p = P/l$ care generează un moment încovoietor M_i (fig. 7.53), *b*. Ecuația diferențială ce caracterizează fibra medie deformată este

$$EI_y'' = M_i,$$

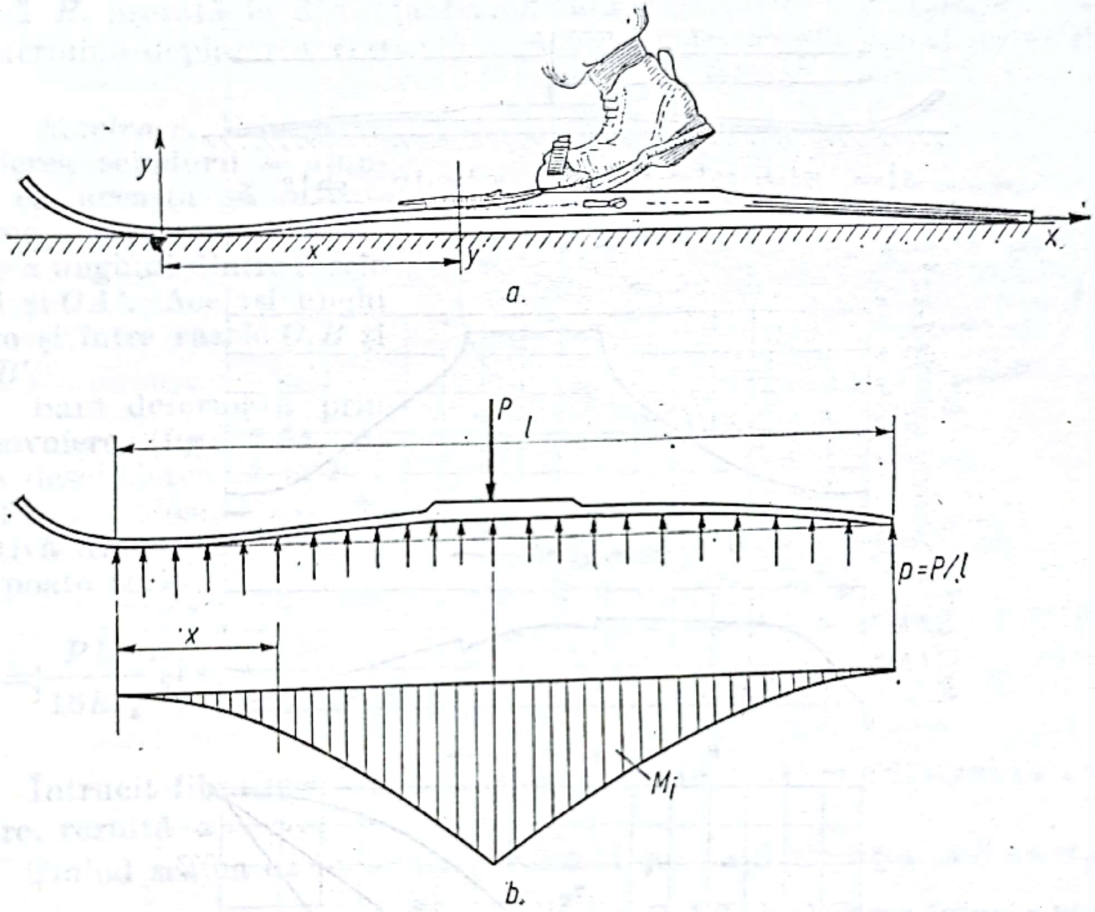


Fig. 7.53

unde y este săgeata în secțiunea curentă x și se caracterizează prin faptul că:

pentru $x = 0$, $y = 0$; pentru $x = l$, $y = 0$.

Dat fiind faptul că modulul de rigiditate EI_z al secțiunii schiului variază, integrarea ecuației diferențiale a săgeții se poate face relativ ușor și prin integrare grafică.

Astfel, în cazul unui schiu avînd mărimea secțiunii în diferite puncte ca în figura 7.53, *c*, momentul de inerție I_z variază ca în figura 7.53, *d*. Pentru $P = 60$ daN și $E_L = 10^5$ daN/cm², curba de variație a raportului M_i/EI_z este prezentată în figura 7.53, *e*. Efectuînd integrarea grafică se obțin succesiv curbele pentru

$$\int_0^x \frac{M_i}{EI_z}\,dx \text{ și } \int_0^x \int_0^x \frac{M_i}{EI_z}\,dx,$$

care sînt prezentate în figura 7.53, f.

Scanned with OKEN Scanner

Ordonatele cuprinse între dreapta OA și curba 1, pun în evidență funcția y care îndeplinește condițiile de capăt ($y = 0$ pentru $x = 0$ și $x = l$).

Reprezentînd curba $y = f(x)$ față de axa orizontală (fig. 7.53, g) se obține, pentru schiul considerat $y_{max} = 6$ mm.

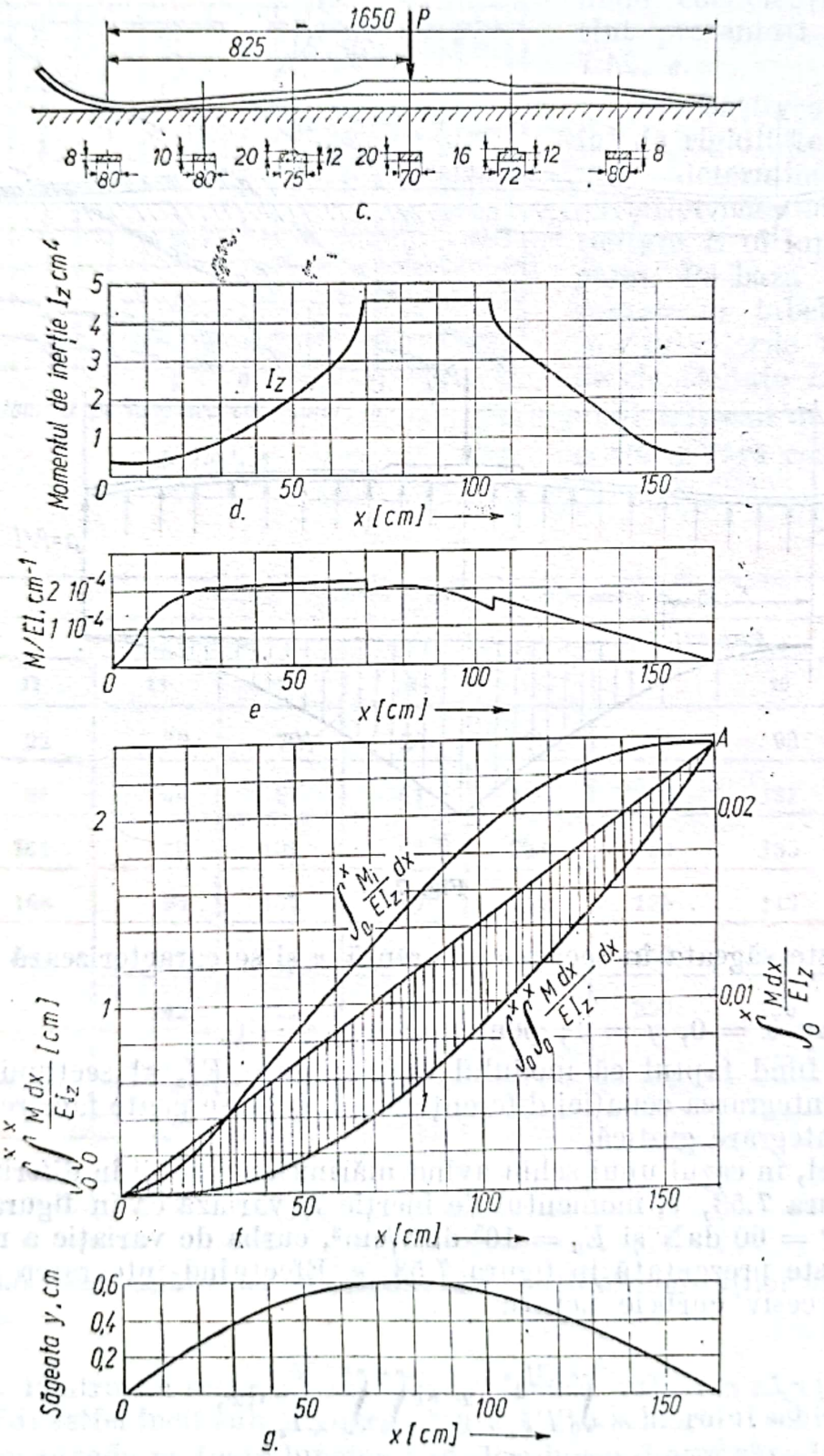


Fig. 7.53

În cazul altei legi de repartiție a presiunii p dintre zăpadă și schiu se poate proceda în mod similar.

7.54. O scîndură avînd modulul de rigiditate EI_z, acționată de o sarcină P la mijlocul ei, este simplu rezemată pe doi cilindrii de aceeași rază R, așezată la distanța l unul față de celălalt (fig. 7.54, *a*). Să se determine deplasarca verticală a punctului D de aplicație al forței P.

Rezolvare. Prin încovoierea scîndurii se ajunge ca aceasta să se reazeme în punctele A' și B'. Fie α unghiul dintre razele OA și OA'. Același unghi este și între razele O_1B și O_1B'.

Bara deformată prin încovoiere (fig. 7.54, *b*) are deschiderea $L = l - 2R\alpha$. Folosind grinda fictivă din figura 7.54, *c* se poate scrie:

$$\varphi_{A'} = \frac{PL^2}{16EI_z} \text{ și } v_1 = \frac{PL^3}{48EI_z}.$$

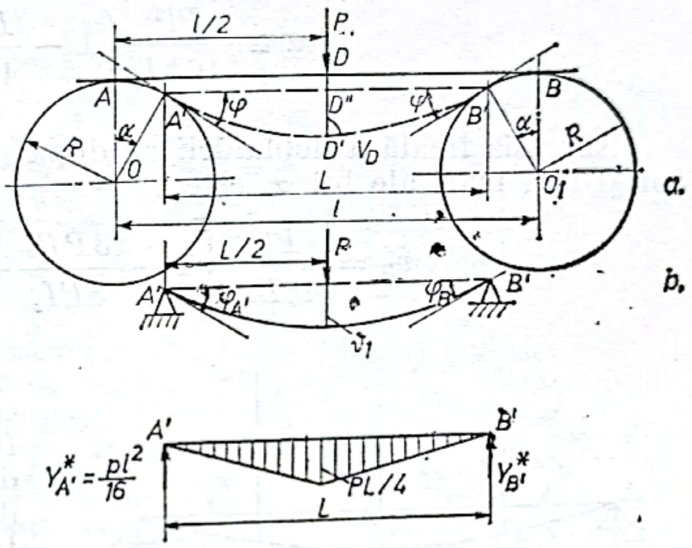


Fig. 7.54

Întrucît fibra medie a barei este tangentă în A' la cilindrul de reze mare, rezultă $\alpha = \varphi_{A'}$.

Ținînd seama că linia $A'B'$ este mai jos față de linia AB cu $v_2 = R(1 - \cos\alpha) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2} \cong 2R\frac{\alpha^2}{4} = R\alpha^2/2$, deplasarea totală a punctului D va fi

$$v_D = \frac{1}{2}R\alpha^2 + \frac{1}{48}\frac{PL^3}{EI_z}.$$

Ținînd cont de relațiile de mai sus și de faptul că $\varphi_{A'} = \alpha$, după efectuarea calculelor se obține

$$\alpha = \frac{P}{16EI_z}(l - 2R\alpha)^2,$$

care reprezintă o ecuație de gradul doi în α, respectiv

$$\alpha^2 - \frac{l}{R}\left(1 + \frac{4EI_z}{PRL}\right)\alpha + \frac{l^2}{4R^2} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia acestei ecuaţii, posibilă în cazul problemei analizate, este

$$\alpha = \frac{l}{2R}\left[1 + \frac{4EI_z}{PR} - \frac{4EI_z}{PRl}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{PRl}{EI_z}}\right],$$

iar dacă din dezvoltarea în serie a radicalului se reţin termenii pînă la cei cu puterea a treia, valoarea lui α se mai poate scrie şi sub forma

$$\alpha \cong \frac{Pl^2}{16EI_z}\left(1 - \frac{PRl}{4EI_z}\right).$$

Expresia finală a deplasării v_D, după neglijarea puterilor de ordinul doi şi mai mari ale lui α, este

$$v_D = \frac{Pl^3}{48EI_z}\left[1 - \frac{3PRl}{8EI_z} + \frac{3}{32}\frac{PRl}{EI_z}\right]^2.$$

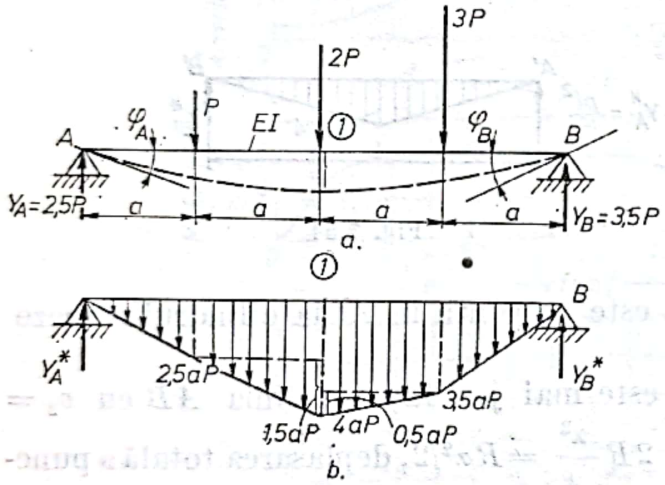


Fig. 7.55

7.55. O grindă de secţiune constantă este solicitată ca în figura 7.55. Cu ajutorul metodei grafo-analitice se cere să se determine valoarea rotirii secţiunilor din reazeme şi deplasarea punctului (1) de la mijlocul grinzii.

Rezolvare. Se trasează în diagrama de momente încovoietoare şi se alege grinda fictiv ca în figura 7.55, *b*.

Cu ajutorul relaţiilor metodei grafo-analitice se obţin rotirile

$$\varphi_A = \frac{T_A}{EI} = \frac{Y_A^*}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot aPa\left(\frac{1}{3}a + 3a\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\ aPa\left(\frac{1}{3}a + 2a\right) + 2{,}5\ aPa\left(\frac{1}{2}a + 2a\right) +$$

$$+ 0{,}5\ aP\ \frac{1}{2}a\left(\frac{2}{3}a + a\right) + 3{,}5\ aPa\left(\frac{a}{2} + a\right) +$$

$$\left. + \frac{3{,}5}{2}\ aPa\cdot\frac{2}{3}a\right] = 4{,}75\frac{Pa^2}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{T_B^*}{EI} = -\frac{Y_B^*}{EI} = -5{,}25\ Pa^2/EI,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar deplasarea pe verticală a punctului (1) este

$$v_1 = \frac{M_1^*}{EI} = \frac{1}{EI}\left[4{,}75\ a^2P\ 2a - \frac{2{,}5}{2}\ aPa\left(\frac{1}{3}a + a\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1{,}5}{2}\ aP \cdot a \cdot \frac{1}{3}\ a - 2{,}5\ aPa\ \frac{a}{2}\right] = 6{,}34\ \frac{Pa^3}{EI}.$$

7.56. O grindă în consolă este confecţionată din lemn rotund cu diametrul $d = 20$ cm şi solicitată ca în figura 7.56, *a*. Ştiind că $E_l = 10^5$ daN/cm² şi $p = 600$ daN/m se cere să se calculeze săgeata maximă a grinzii cu ajutorul metodei suprapunerii de efecte.

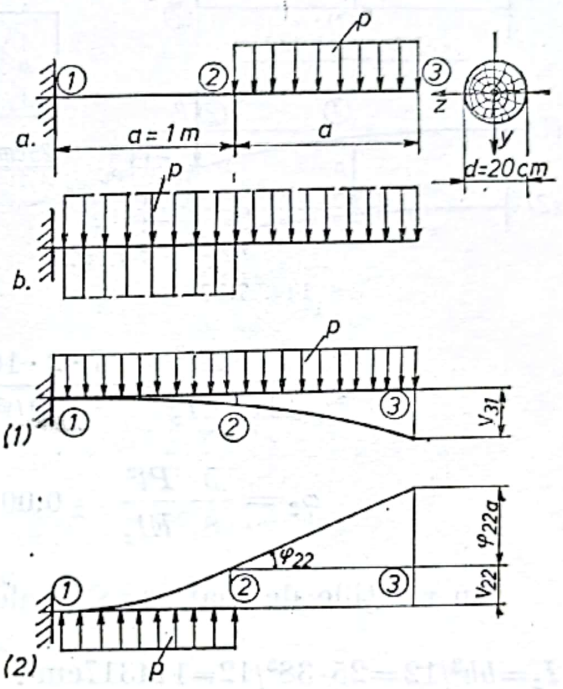


Fig. 7.56

Rezolvare. Pentru a putea utiliza metoda suprapunerii de efecte este necesar ca sarcina să fie distribuită pe toată lungimea grinzii. În acest sens se adaugă sarcina p pe porţiunea 1 — 2 şi în acelaşi timp şi o sarcină egală, dar de sens contrar (fig. 7.56, *b*). În această stare de solicitare sarcinile se descompun în două situaţii (1) şi (2).

Săgeata maximă se produce în punctul 3 şi are valoarea :

$$v_3 = v_{31} + v_{32} + \varphi_{22}a.$$

Se înlocuiesc în relaţia de mai sus valorile date în tabelul 7.*k*, respectiv :

$$v_{31} = \frac{pl^4}{8EI_z} = \frac{p(2a)^4}{8EI_z} = \frac{2pa^2}{EI_z};\quad v_{22} = -\frac{pa^4}{8EI_z};\quad \varphi_{22} = -\frac{pa^3}{6EI_z}$$

şi se obţine

$$v_3 = \frac{1}{EI_z}\left(2pa^4 - \frac{1}{8}\ pa^4 - \frac{1}{6}\ pa^4\right) = \frac{41}{24}\ \frac{pa^4}{EI_z} =$$

$$= \frac{41 \cdot 6 \cdot 10^8}{24 \cdot 10^5 \cdot 7{,}854 \cdot 10^3} = 1{,}31\ \text{cm},$$

unde s-a înlocuit $I_z = \pi d^4/64 = \pi 20^4/64 = 7854$ cm⁴.

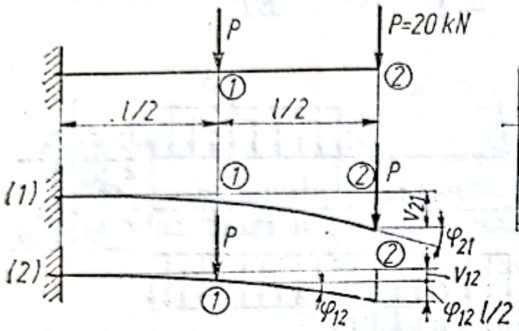
7.57. O grindă de lemn cu secţiunea 28.38 cm² şi lungimea $l = 2$ m este încastrată la un capăt şi solicitată de două forţe $P = 20$ kN, ca în

Scanned with OKEN Scanner

figura 7.57. Se cere să se calculeze săgeata și unghiul de rotire a secțiunii din extremitatea (2) a grinzii.

Rezolvare. Utilizînd metoda suprapunerii de efecte (v. tab. 7.*k*) se obține :

$$v_2 = v_{21} + v_{12} + \varphi_{12} l/2 \quad \text{iar} \quad \varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{12},$$



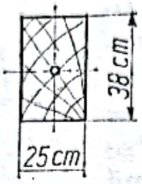


Fig. 7.57

unde din tabelul 7.*k* rezultă

$$v_{21} = Pl^3/3EI_z\,; \quad v_{12} = Pl^3/24EI_z\,;$$

$$\varphi_{12} = Pl^2/8EI_z \text{ și}$$

$$\varphi_{21} = Pl^2/2EI_z.$$

După înlocuiri și efectuarea calculelor se obține :

$$v_2 = \frac{7}{16}\frac{Pl^3}{EI_z} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 200^3}{16 \cdot 10^5 \cdot 114317} = 0{,}014 \text{ cm};$$

$$\varphi_2 = \frac{5}{8}\frac{Pl^2}{EI_z} = 0{,}0044 \text{ rad} = 0{,}25^\circ = 15'.$$

În relațiile de mai sus s-a înlocuit

$$I_z = bh^3/12 = 25 \cdot 38^3/12 = 114317 \text{cm}^4.$$

7.58. O bară în consolă este realizată dintr-un buștean cu diametrul mediu de 24 cm și solicitată de forțele P, $2P$ și $3P$ ca în figura 7.58. Se cere să se calculeze v_B și rotirea φ_B de la capătul consolei. Se dau : $P = 100$ daN, $a = 100$ cm și $E = 1{,}2 \cdot 10^5$ daN/cm^2.

Rezolvare. Se consideră, pe rînd, grinda încărcată cu fiecare din cele trei forțe și se calculează săgeata și rotirea. Se obține succesiv :

$$v_{B_1} = \frac{P(3a)^3}{3EI_z} = \frac{9a^3P}{EI_z}\,; \quad \varphi_{B_1} =$$

$$= \frac{P(3a)^2}{2EI_z} = \frac{9a^2P}{2EI_z}\,;$$

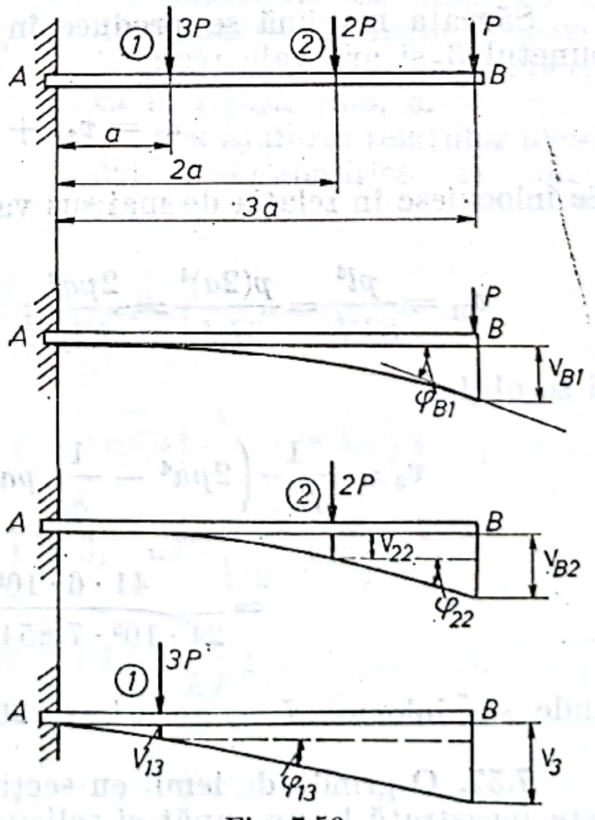


Fig. 7.58

$$v_{B_2} = v_{22} + a\varphi_{22} = \frac{2P(2a)^3}{3EI_z} + a\frac{2P(2a)^2}{2EI_z} = \frac{28}{3}\frac{a^3P}{EI_z};$$

$$\varphi_{B_2} = \varphi_{22} = \frac{2P(2a)^2}{2EI_z} = \frac{4a^2P}{EI_z};\quad v_{B3} = v_{13} + 2a\varphi_{13} =$$

$$= \frac{3Pa^3}{3EI_z} + 2a\frac{3Pa^2}{2EI_z} = \frac{4a^3P}{EI_z};$$

$$\varphi_{B_3} = \varphi_{13} = \frac{3Pa^2}{2EI_z}.$$

Prin urmare, săgeata și rotirea la capătul liber al grinzii sînt:

$$v_B = v_{B1} + v_{B2} + v_{B3} = \frac{9a^3P}{EI_z} + \frac{28a^3P}{3EI_z} + \frac{4a^3P}{EI_z} = \frac{67a^3P}{3EI_z};$$

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \varphi_{B2} + \varphi_{B3} = \frac{9a^2P}{2EI_z} + \frac{4a^2P}{EI_z} + \frac{3a^2P}{2EI_z} = \frac{10a^2P}{EI_z}.$$

Înlocuind pe $I_z = \pi d^4/64 = \pi 24^4/74 = 16286$ cm^4 se obține:

$$v_B = 1{,}143 \text{ cm} < v_a = l/200 = 300/200 = 1{,}5 \text{ cm};$$

$$\varphi_B = 0{,}005116 \text{ rad}.$$

7.59. Să se verifice rezistența și rigiditatea unei grinzi executată dintr-o piesă de lemn cioplită pe două fețe, confecționată dintr-un buștean cu diametrul $d_1 = 18$ cm la capătul subțire, înălțimea grinzii $h = 16$ cm; deschiderea $l = 5$ m; sarcina concentrată $P = 400$ daN este aplicată la mijlocul grinzii. Se dau: săgeata relativă admisibilă $\left(\frac{v}{l}\right)_a = 1/200$; rezistența admisibilă $\sigma_a = 100$ daN/cm^2 și $E = 100\,000$ daN/cm^2.

Rezolvare. Deschiderea teoretică a grinzii l' va fi circa:

$$l' = l + 2h = 5 + 2 \cdot 0{,}16 = 5{,}32 \text{ m}.$$

Diametrul lemnului în secțiunea de mijloc

$$d = d_1 + 0{,}8\ l'/2 = 20{,}14 \cong 20 \text{ cm}.$$

Înălțimea părților ce se cioplesc (săgeata segmentului în secțiunea de mijloc) este

$$h_c = \frac{20 - 16}{2} = 2 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementele geometrice se determină cu formulele din tabelul 2.*d*. Secţiunea lemnului este

$$A = \left(2{,}5\,\frac{20}{8} - 1{,}85\right) 8^2 = 282 \text{ cm}^2.$$

Momentul de inerţie al secţiunii grinzii este

$$I_z = \left(\frac{20}{8} - 1{,}2\right) 8^4 = 5325 \text{ cm}^4.$$

Modulul de rezistenţă are valoarea

$$W_z = I_z/0{,}5h = 5325/8 = 665 \text{ cm}^3.$$

Se determină săgeata relativă

$$\frac{v}{l} = \frac{Pl^2}{48EI_z} + \frac{5}{384}\,\frac{pl^3}{EI_z} = \frac{l^2}{48EI_z}\left(P + \frac{5}{8}\,pl\right) = \frac{1}{225} < \left(\frac{v}{l}\right)_a = \frac{1}{200},$$

unde $p = 0{,}17$ daN/cm este greutatea proprie a grinzii, determinată după secţiunea medie a grinzii.

Momentul încovoietor maxim este

$$M_{i\,\max} = \frac{Pl}{4} + \frac{pl^2}{8} = \frac{400 \cdot 5}{4} + \frac{17 \cdot 5^2}{8} = 553 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

Tensiunea efectivă la mijlocul grinzii are valoarea

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{i\,\max}}{W_z} = \frac{55300}{665} = 83 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

7.60. O grindă de lemn este solicitată ca în figura 7.60 de forţele $P_1 = 80$ daN şi $P_2 = 165$ daN. Ştiind că $\sigma_a = 100$ daN/cm² şi $h/b = 2$ se cere : a) să se dimensioneze ; b) să se calculeze mărimea deplasării punctu-

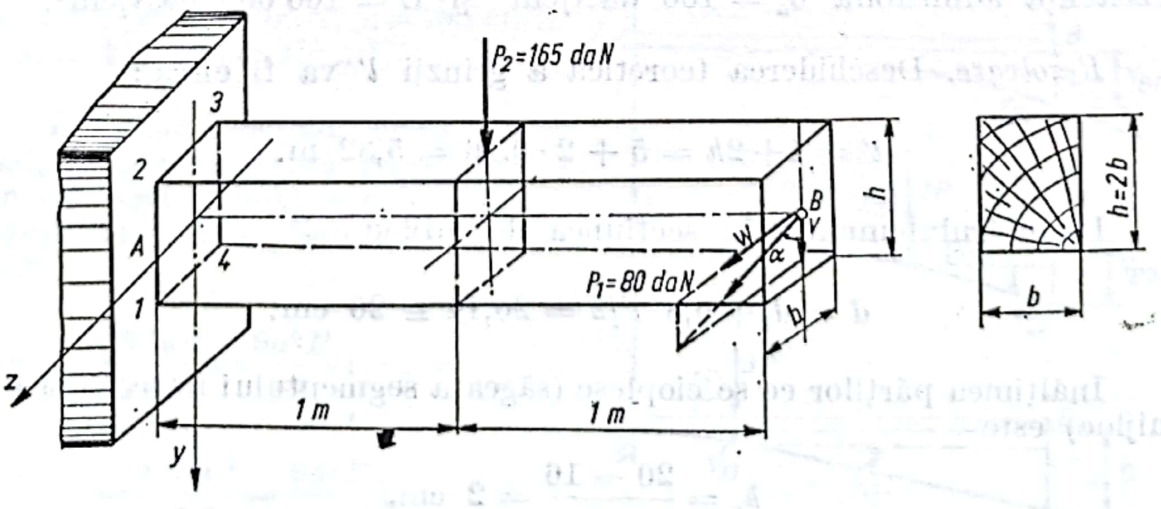


Fig. 7.60

lui B și direcția acesteia față de verticală. În calcule se va considera $E_L = 1{,}2 \cdot 10^5$ daN/cm².

Rezolvare. a) Datorită acțiunii celor două forțe față în secțiunea din încastrare se produc momentele încovoietoare

$$M_y = 80.200 = 16000 \text{ daN} \cdot \text{cm} \text{ și } M_z = 165 \cdot 100 = 16\,500 \text{ daN} \cdot \text{cm}.$$

Tensiunea normală maximă din secțiunea A este

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{6 \cdot 16500}{hb^2} + \frac{6 \cdot 16500}{bh^2} \leqslant \sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2,$$

de unde ținînd cont că $h = 2b$, rezultă

$$b = \sqrt[3]{480 + 247{,}5} \cong 9{,}0 \text{ cm} \text{ și } h = 18 \text{ cm}.$$

b) Datorită forței $P_1 = 80$ daN, punctul B se deplasează în direcția axei z cu cantitatea

$$w = \frac{P_1 l^3}{3EI_y} = \frac{80 \cdot 200^3}{3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 1094} = 1{,}625 \text{ cm},$$

iar datorită forței $P_2 = 165$ daN se deplasează pe verticală cu cantitatea

$$v = \frac{P_2 (0{,}5l)^3}{3EI_z} + \frac{P_2 (0{,}5l)^2 \cdot (0{,}5l)}{2EI_z} = \frac{5}{6} \frac{P_2 (0{,}5l)^3}{EI_z} = 0{,}262 \text{ cm}.$$

În relațiile de mai sus s-au înlocuit momentele de inerție

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{9 \cdot 18^3}{12} = 4374 \text{ cm}^4 \text{ și } I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{18 \cdot 9^3}{12} = 1094 \text{ cm}^4,$$

Deplasarea totală este

$$f = \sqrt{w^2 + v^2} = \sqrt{1{,}625^2 + 0{,}262^2} = 1{,}645 \text{ cm}.$$

Unghiul pe care îl face f cu verticala este

$$\alpha = \text{arc tg} \frac{w}{v} = \text{arc tg} \frac{1{,}625}{0{,}262} = 80°50'.$$

7.61. Să se dimensioneze pana curentă de acoperiș a fermei din figura 7.61. Traveea construcției este de 3,00 m. Încărcările la nivelul acoperișului sînt:

— încărcări permanente (din învelitoare și elemente secundare de acoperiș), $p_p = 80$ daN/m²;

— sarcina datorită zăpezii, $p_z = 100$ daN/m² [32].

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Încărcarea pe pană este:

$$p_p = 80\,\frac{\text{daN}}{\text{m}^2} \cdot 3{,}20\ \text{m} = 256\ \text{daN/m},$$

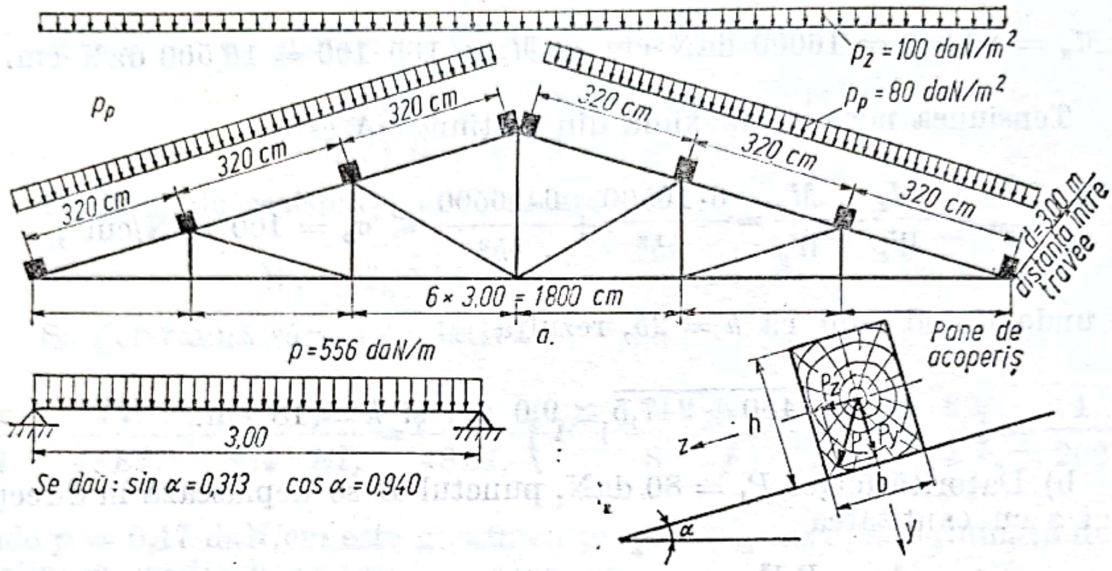


Fig. 7.61

(aceasta este o sarcină verticală, care acționează pe metru pătrat de suprafață înclinată);

$$p_z = 100\,\frac{\text{daN}}{\text{m}^2} \cdot 3{,}00\ \text{m} = 300\ \text{daN/m},$$

(aceasta este o încărcare verticală care acționează pe metru pătrat de suprafață orizontală).

Sarcina totală pe pană este egală cu

$$p_{tot} = p_p + p_z = 256 + 300 = 556\ \text{daN/m}.$$

Momentul de încovoiere maxim este

$$M_{i\,max} = p_{tot}\, l^2/8,$$

cu componentele

$$M_z = M_{i\,max} \cos\alpha = \frac{p_{tot} l^2}{8} \cos\alpha = \frac{556 \cdot 3^2}{8} \cdot 0{,}94 =$$

$$= 588\ \text{daN} \cdot \text{m} = 5{,}88 \cdot 10^4\ \text{daN} \cdot \text{cm},$$

$$M_y = M_{i\,max} \sin\alpha = \frac{p_{tot} l^2}{8} \sin\alpha = \frac{4556 \cdot 3^2}{8} \cdot 0{,}313 = 1{,}955 \cdot 10^4\,\text{daN} \cdot \text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pana fiind supusă la încovoiere oblică rezultă

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{58\,800}{902} + \frac{19\,550}{712} = 65{,}2 + 27{,}5 =$$

$$= 92{,}7 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

În relația de mai sus s-a înlocuit

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{15 \cdot 19^2}{6} = 902 \text{ cm}^3 \text{ și } W_y = \frac{19 \cdot 15^2}{6} = 712 \text{ cm}^3.$$

Săgeata totală a panei este

$$v_{max} = \sqrt{v_z^2 + v_y^2},$$

unde

$$v_z = \frac{5}{48} \frac{M_z l^2}{EI_z} = \frac{5}{48} \cdot \frac{5{,}88 \cdot 10^4 \cdot 3^2 \cdot 10^4}{10^5 \cdot 8574} = 0{,}644 \text{ cm};$$

$$v_y = \frac{5}{48} \frac{M_y l^2}{EI_y} = \frac{5}{48} \cdot \frac{1{,}955 \cdot 10^4 \cdot 3^2 \cdot 10^4}{10^5 \cdot 5344} = 0{,}350 \text{ cm};$$

$$I_z = \frac{15 \cdot 19^3}{12} = 8574 \text{ cm}^4 \text{ și } I_y = \frac{19 \cdot 15^3}{12} 5344 \text{ cm}^4.$$

După înlocuiri și efectuarea calculelor se obține

$$v_{max} = \sqrt{0{,}644^2 + 0{,}350^2} = 0{,}731 \text{ cm} < v_a = \frac{l}{200} = \frac{300}{200} = 1{,}5 \text{ cm}.$$

7.62. Să se dimensioneze grinda principală a unui tavan suspendat de ferme din lemn amplasate la 4,50 m travee (fig. 7.62). Grinzile sînt amplasate la 3,00 m distanță (la nodurile fermei). Încărcarea totală la nivelul tavanului provenind din sarcina permanentă și utilă de 200 daN/m².

Rezolvare. Încărcarea pe grindă este

$$p = 200 \text{ daN/m}^2 \cdot 3{,}00 \text{ m} = 600 \text{ daN/m}.$$

Momentul încovoietor maxim este egal cu

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{600 \cdot 4{,}5^2}{78} = 1519 \text{ daN.m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Modulul de rezistență necesar, cu luarea în considerație a slăbirii grinzii, este

$$W_{nec} = K_{sl}\frac{M_{max}}{\sigma_{at}} = 1 \cdot \frac{151\,900}{100} = 1519 \text{ cm}^3.$$

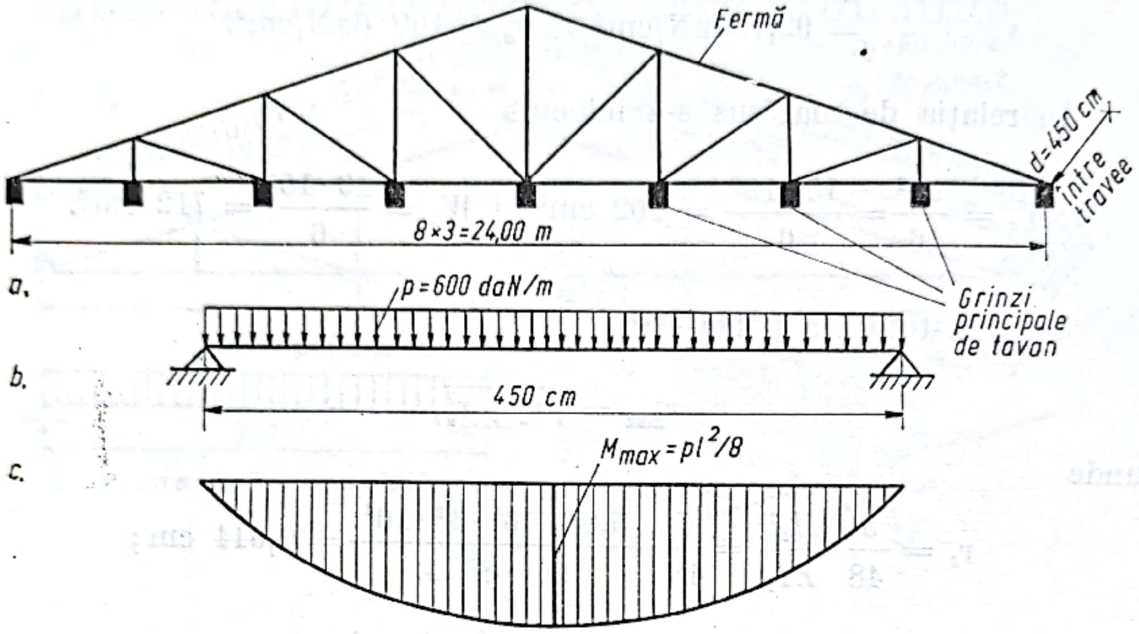


Fig. 7.62

Se alege din sortimentul de lemn grinda cu dimensiunile de 15.25cm, care are

$$W_{ef} = \frac{15 \cdot 25^2}{6} = 1\,562 \text{ cm}^3 > W_{nec}$$

Se verifică săgeata grinzii

$$v_{ef} = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI} = \frac{5}{48}\frac{Ml^2}{EI}.$$

Înlocuind

$$E = 10^5 \text{ daN/cm}^2 \text{ și } I = \frac{15 \cdot 25^3}{12}$$

rezultă

$$v_{ef} = \frac{5}{48} \cdot \frac{151\,900 \cdot 450^2 \cdot 12}{10^5 \cdot 15 \cdot 25^3} = 1{,}44 \text{ cm}.$$

Pe de altă parte săgeata admisibilă este

$$v_a = \frac{l}{250} = \frac{450}{250} = 1{,}8 \text{ cm} > v_{ef} = 1{,}44 \text{ cm}.$$

Deci din punctul de vedere al rigidității grinda îndeplinește condițiile cerute [32].

Scanned with OKEN Scanner

7.63. Să se calculeze și să se proiecteze o grindă compusă, cu următoarele date: deschiderea teoretică 6 m; încărcarea uniform distribuită $q = 1500$ daN/m (inclusiv greutatea proprie a grinzii); materialul —pin cu umiditatea 23%.

Rezistența admisibilă $\sigma_a = 10$ daN/cm². Săgeata relativă admisibilă $(v/l)_a = 1 : 400$ (fig. 7.63).

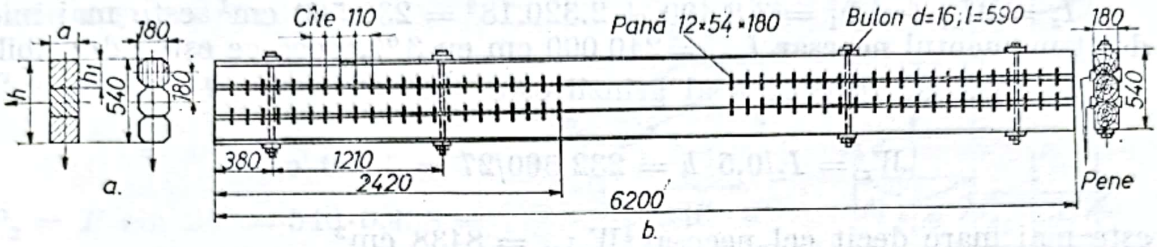


Fig. 7.63

Rezolvare. Reacțiunile pe reazeme sînt:

$$Y_A = Y_B = ql/2 = 1500 \cdot 6/2 = 4500 \text{ daN}.$$

Momentul încovoietor maxim este

$$M_{i\,max} = ql^2/8 = 1500 \cdot 6^2/8 = 6750 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

Se presupune că în secțiunea de moment maxim nu se așază nici un bulon și în consecință, nu se ține seama de slăbirea produsă de el. De asemenea, se presupune că grinda este alcătuită din trei piese suprapuse. Se determină modulul de rezistență necesar

$$W_{z\,nec} = M_{i\,max}/K_u \sigma_a = 675000/0{,}8 \cdot 100 = 8438 \text{ cm}^3$$

Se alege lățimea grinzii de 18 cm și se găsește înălțimea necesară a grinzii.

$$h'_{nec} = \sqrt{\frac{6W_{z\,nec}}{a}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 8438}{18}} = 53 \text{ cm}.$$

Se calculează momentul de inerție necesar al grinzii, pentru a se respecta condiția de săgeată relativă

$$I_{z\,nec} = \frac{5ql^3}{384 \cdot 0{,}7\,E}\left(\frac{l}{v}\right)_a = \frac{5 \cdot 15 \cdot 600^3 \cdot 400}{384 \cdot 0{,}7 \cdot 100\,000} = 240\,000 \text{ cm}^4.$$

Înălțimea necesară a grinzii din condiția de rigiditate este

$$h''_{nec} = \sqrt[3]{\frac{12\,I_{z\,nec}}{a}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 240\,000}{18}} = 54{,}2 \text{ cm}.$$

Se ia înălțimea grinzii $h = 54$ cm și se proiectează din trei piese cioplite 18 × 18 cm, tăiate din piese rotunde, cu diametrul de 21 cm la capătul subțire.

Secțiunea unei singure piese, la mijlocul lungimii grinzii, adică la o distanță de la capătul piesei de 3,0 + 0,1 = 3,1 m este $A_1 = 320$ cm²; momentul de inerție al acestei secțiuni este $I_{z1} = 8\,400$ cm⁴.

Momentul de inerție al grinzii compuse:

$I_z = 3I_{z1} + A_1h_1^2 = 3.8\,400 + 2.320.18^2 = 232\,560$ cm⁴ este mai mic decît momentul necesar $I_{z\,nec} = 240\,000$ cm cu 3%, ceea ce este admisibil.

Modulul de rezistență al grinzii este

$$W_z = I_z/0{,}5\ h = 232\,560/27 = 8\,620\ \text{cm}^3$$

este mai mare decît cel necesar $W_{z\,nec} = 8438$ cm³.

Forța de lunecare pe jumătatea deschiderii este

$$N_{0{,}5\,l} = MS_z/I_z = 675\,000 \cdot 5\ 770/232\,560 = 16\,720\ \text{daN},$$

în care $S_z = A_1h_1 = 320 \cdot 18 = 5770$ cm³ (fig. 7.63).

Ca solidarizări se folosesc plăci flexibile de stejar avînd $\delta_n = 12$ mm și $h_p = 54$ mm. Acestea se distribuie la distanțe minime admisibile de 110 mm pe porțiunile extreme, egale fiecare cu 0,4 din lungimea întregii grinzi.

Numărul de plăci este

$$n = \frac{0{,}4 \cdot 620}{11} = 22\ \text{buc.}$$

Încărcarea admisibilă pentru o pereche de plăci

$$N_{la} = 11\ b_p h_p = 11 \cdot 18 \cdot 5{,}4 = 1070\ \text{daN}.$$

Efortul admisibil pentru 22 plăci flexibile este

$$nN_{za} = 22 \cdot 1070 = 23600\ \text{daN}$$

este mai mare decît cel necesar (majorat cu 20%)

$$N_{l\,nec} = 1{,}2 \cdot 16720 = 20\,100\ \text{daN}.$$

Buloanele de strîns cu un diametru de 16 mm, se așează în număr de 4 bucăți, așa cum se vede în figura 7.63, *b*.

Contrasăgeata este

$$v_s = 1{,}5\ v_0 = \frac{1{,}5 \cdot 5ql^4}{384 \cdot EI_z^{net}} = \frac{1{,}5 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 600^4}{384 \cdot 10^5 \cdot 0{,}7 \cdot 232560} = 2{,}33 \cong 2{,}5\ \text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.64. Să se determine secțiunea unui arbaletrier, înclinat față de orizontală cu unghiul $\alpha=26°$, în următoarele condiții: deschiderea $l=4$ m, încărcarea este reacțiunea a 3 pene (fig. 7.64) $P = 540$ daN, rezistența admisibilă $\sigma_a = 120$ daN/cm².

Rezolvare. cos 26° = 0,899 și sin 26° = 0,438.

Componentele forței după axele x și y sînt:

$$P_1 = P \cos 26° = 540 \cdot 0{,}899 = 485 \text{ daN};$$

$$P_2 = P \sin 26° = 540 \cdot 0{,}438 = 236 \text{ daN}.$$

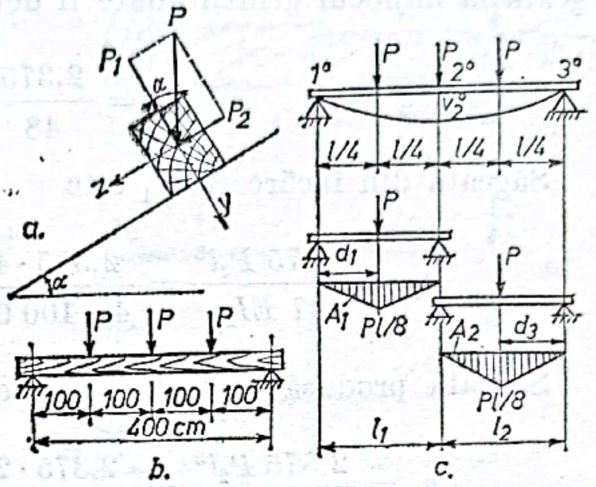


Fig. 7.64

Valorile momentelor încovoietoare în mijlocul grinzii sînt:

$$M_z = P_1\, 1{,}5 \cdot 2 - P_1 \cdot 1 = 2P_1 = 2.485 = 970 \text{ daN.m};$$

$$M_y = 1{,}5\ P_2 \cdot 2 - P_2 \cdot 1 = 2P_2 = 2.326 = 472 \text{ daN.m}.$$

Luînd raportul laturilor secțiunii $h : b = 3 : 2$ se determină modulul de rezistență necesar după formula:

$$W_z^{nec} = \frac{1}{\sigma_a}\left(M_z + \frac{h}{b} M_y\right) = \frac{1}{120}(970\,000 + 1{,}5 \cdot 47\,200) = 1400 \text{ cm}^3$$

Înălțimea necesară grinzii va fi

$$h_{nec} = \sqrt[3]{6\, K_1 W_z^{nec}} = 22{,}3 \text{ cm},$$

unde $K_1 = h/b$.

Alegem: $h = 24$ cm și $b = 2/3\ h \cong 15$ cm, cărora le corespund

$$W_z = 1440 \text{ cm}^3 \text{ și}$$

$$W_y = 900 \text{ cm}^3$$

Tensiunea maximă este

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{97\,000}{1\,440} + \frac{47\,200}{900} = 120 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} = \sigma_a.$$

Scanned with OKEN Scanner

Săgeata totală a grinzii sub acțiunea ambelor componente ale forței se determină cu relația

$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ unde v_1 și v_2 sînt săgeţile produse de forţele P_1 și P_2.

Pentru cazul a trei forțe la distanțe egale cu 1/4 din deschidere, săgeata la mijlocul grinzii poate fi determinată cu relația:

$$v = \frac{2{,}375}{48} \frac{Pl^3}{EI_z}.$$

Săgeata din încărcare P_1 este

$$v_1 = \frac{2{,}375\, P_1 l^3}{47\, EI_z} = \frac{2{,}375 \cdot 485 \cdot 400^3}{48 \cdot 100\,000 \cdot 17\,280} = 0{,}89 \text{ cm}.$$

Săgeata produsă de forța P_2 este

$$v_2 = \frac{2{,}375\, P_2 l^3}{48\, EI_y} = \frac{2{,}375 \cdot 236 \cdot 400^3}{48 \cdot 100\,000 \cdot 6\,750} = 1{,}11 \text{ cm}.$$

Săgeata totală a grinzii, la mijlocul deschiderii va fi

$$v = \sqrt{0{,}89^2 + 1{,}11^2} = 1{,}42 \text{ cm} < v_a = l/200 = 2 \text{ cm}.$$

Expresia săgeții a fost dedusă cu ecuația celor trei săgeți (fig. 7.64, *c*), respectiv

$$6EI\left(\frac{v_2^0 - v_1^0}{l_1} + \frac{v_2^0 - v_3^0}{l_2}\right) = M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 6\left(\frac{A_1 d_1}{l_1} + \frac{A_2 d_3}{l_2}\right)$$

în care

$$v_1^0 = v_3^0 = 0;\ l_1 + l_2 = l/2;\ M_1 = M_3 = 0;\ M_2 = \frac{3Pl}{4} - \frac{Pl}{4} = \frac{Pl}{2};\ \frac{A_1 d_1}{l_1} = \frac{A_2 d_3}{l_2} = \frac{Pl^2}{64}.$$

După înlocuiri rezultă

$$6\, EI\left(\frac{2v_2^0}{l} + \frac{2v_2^0}{l}\right) = 2\frac{Pl}{2}\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right) + 6\frac{Pl^2}{64} \cdot 2,$$

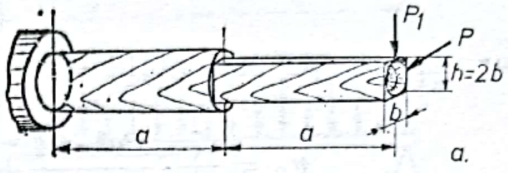
de unde se obține săgeata v_2^0 la mijlocul grinzii

$$v^0 = v_2^0 = \frac{76}{32} \frac{Pl^3}{48\, EI} = \frac{2{,}375\, Pl^3}{48\, EI} \quad [32]$$

Scanned with OKEN Scanner

7.65. Un buştean este ecarisat pe lungimea a şi solicitat de forţele $P_1 = 1{,}63\ P$ şi P ca în figura 7.65, *a*. Cunoscînd că $h = 2b$ se cere să se calculeze mărimea şi direcţia deplasării maxime a capătului liber.

Rezolvare. Pentru calculul deplasării capătului liber D sub acţiunea unei forţe Q se utilizează ecuaţia celor trei săgeţi, care are forma generală



$$6E\left(\frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2}\right) = M_1\frac{l_1}{I_1} + 2M_2\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) + M_3 I_2 + 6\left(\frac{A_1 d_1}{l_1 I_1} + \frac{A_2 d_3}{l_2 I_2}\right).$$

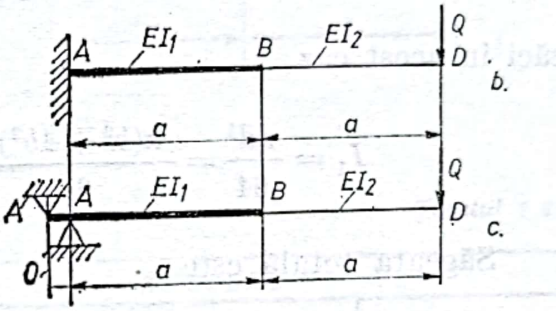


Fig. 7.65

În acest sens încastrarea din punctul A se consideră ca fiind echivalentă cu două reazeme A' şi A şi ecuaţia celor trei săgeţi se aplică :

— *pe intervalul* $A'-A-B$

$$6E\left(-\frac{v_B}{a}\right) = -4aQ\frac{a}{I_1} - aQ\frac{a}{I_1};$$

de unde se obţine

$$v_B = \frac{5Qa^3}{6EI_1};$$

— *pe intervalul* $A-B-D$

$$6E\left(\frac{v_B}{a} + \frac{v_B}{a} - \frac{v_D}{a}\right) = -2aQ\frac{a}{I_1} - 2aQ\left(\frac{a}{I_1} + \frac{a}{I_2}\right),$$

de unde, ţinînd cont de expresia lui v_B, se obţine

$$v_D = \frac{7}{3}\frac{Qa^3}{EI_1} + \frac{1}{3}\frac{Qa^3}{EI_2}.$$

Particularizînd pentru cazul analizat se obţine *săgeata pe verticală*

$$v_D = \frac{7}{3}\frac{P_1 a^3}{EI_1} + \frac{1}{3}\frac{P_1 a^3}{EI_2} = \frac{Pa^3}{E}\frac{64 \cdot 1{,}63}{25\pi b^4} + \frac{Pa^3}{E}\frac{1{,}63 \cdot 3}{2b^4} = 3{,}914\frac{Pa^3}{Eb^4},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s-au înlocuit

$$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(b^2+4b^2)^2}{64} \quad \text{și} \quad I_2 = \frac{b \cdot 8b^3}{12} = \frac{2}{3}\, b^4;$$

iar săgeata pe orizontală este

$$u_D = \frac{7}{3} \cdot \frac{Pa^3 \cdot 64}{E\pi 25 b^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Pa^3 \cdot 6}{Eb^4} = 3{,}901 \frac{Pa^3}{Eb^4},$$

căci în acest caz

$$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(b^2+4b^2)^2}{64} \quad \text{și} \quad I_2 = \frac{2b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{6}.$$

Săgeata totală este

$$\delta_B = \sqrt{v_B^2 + u_B^2} = 5{,}52 \frac{Pa^3}{Eb^4}$$

și are direcția

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{v_B}{u_B} \cong 1,$$

ceea ce înseamnă că deplasarea punctului D se face după un unghi egal cu 45° față de orizontală.

Pentru $P = 2\,000$ daN, $b = 15$ cm, $a = 100$ cm și $E = 10^5$ daN/cm² se obține

$$\delta_B = \frac{5{,}52 \cdot 2000 \cdot 100^3}{10^5 \cdot 15^4} \cong 2{,}18 \text{ cm}.$$

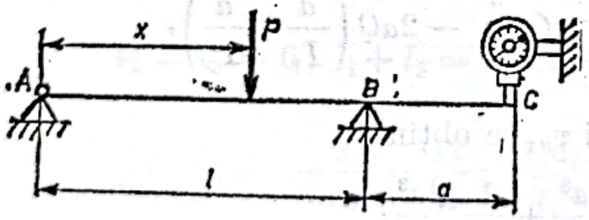


Fig. 7.66

7.66. Pentru determinarea săgeții în punctul C al grinzii din figura 7.66 se utilizează un ceas comparator. Să se determine poziția x a forței P astfel încît săgeata în punctul C să fie maximă.

R. $x = l/\sqrt{3} = 0{,}577\, l.$

7.67. Pentru grinzile de lemn din figura 7.67 se cere să se calculeze expresia săgeții la mijlocul deschiderii.

R. a. $v = \dfrac{Pc(3l^2 - 4c^2)}{24\, EI_z}$; b. $v = \dfrac{p_0 l(8l^3 - 4b^2 l + b^3)}{384\, EI_z}$;

c. $v = 0{,}0375 \dfrac{p_0 a^4}{EI_z}$; d. $v = 0{,}171 \dfrac{p_0 a^4}{EI_z}$.

Scanned with OKEN Scanner

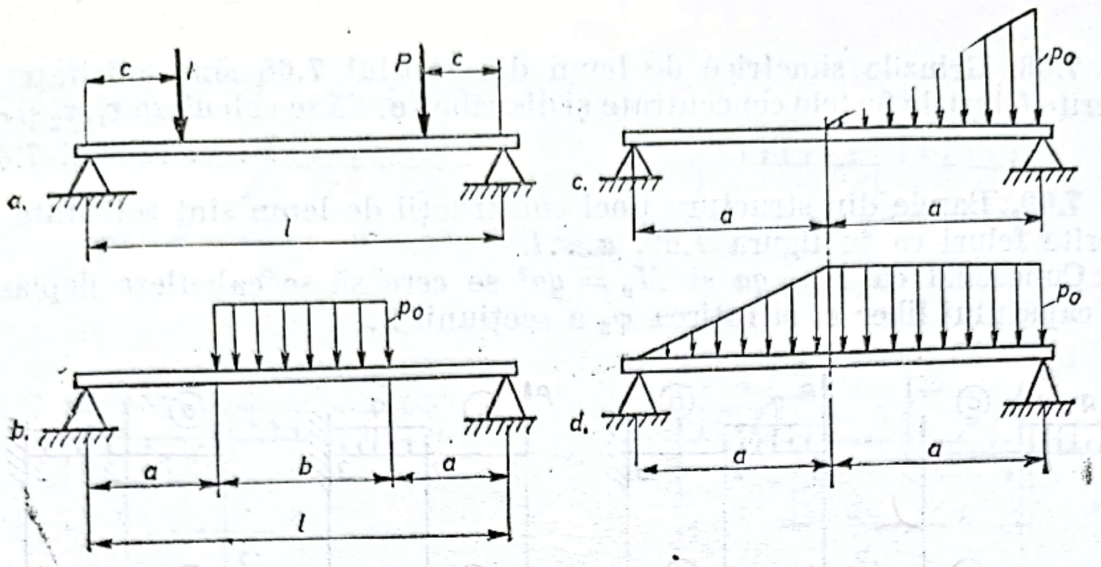
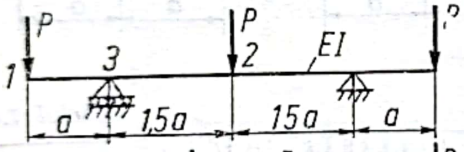
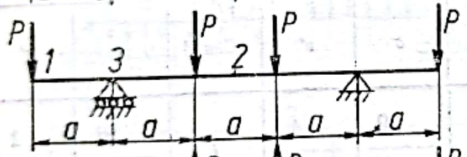
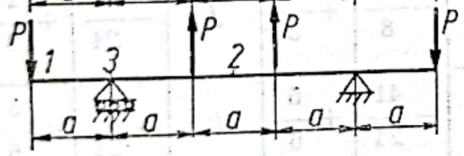
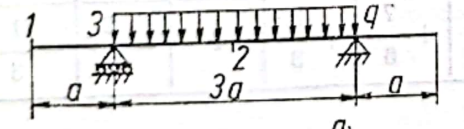
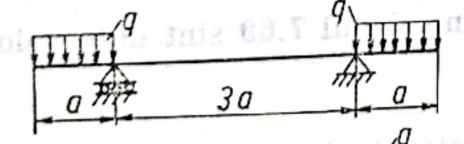
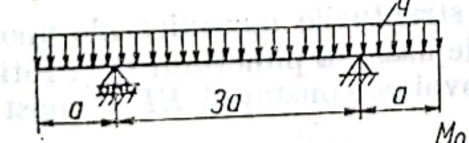
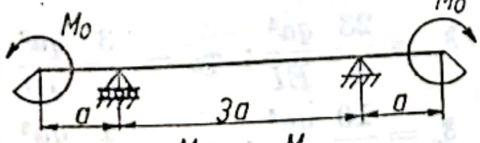
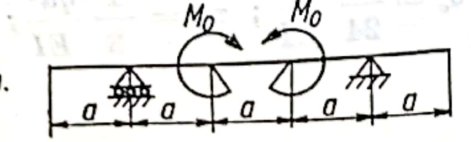


Fig. 7.67

Tabelul 7.68

Încărcarea grinzii	Răspuns v_1	v_2	φ_3
a. 	$+\frac{61}{48}\frac{Pa^3}{EI}$	$-\frac{9}{16}\frac{Pa^3}{EI}$	$-\frac{15}{16}\frac{Pa^2}{EI}$
b. 	$+\frac{5}{6}\frac{Pa^3}{EI}$	$-\frac{1}{6}\frac{Pa^3}{EI}$	$-\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI}$
c. 	$+\frac{17}{6}\frac{Pa^3}{EI}$	$-\frac{25}{12}\frac{Pa^3}{EI}$	$-\frac{5}{2}\frac{Pa^2}{EI}$
d. 	$-\frac{9}{8}\frac{qa^4}{EI}$	$+\frac{135}{128}\frac{qa^4}{EI}$	$+\frac{9}{8}\frac{qa^3}{EI}$
e. 	$+\frac{7}{8}\frac{qa^4}{EI}$	$-\frac{9}{16}\frac{qa^4}{EI}$	$-\frac{3}{4}\frac{qa^3}{EI}$
f. 	$-\frac{1}{4}\frac{qa^4}{EI}$	$+\frac{63}{128}\frac{qa^4}{EI}$	$+\frac{3}{8}\frac{qa^3}{EI}$
g. 	$+\frac{2M_0a^2}{EI}$	$-\frac{9}{8}\frac{M_0a^2}{EI}$	$-\frac{3}{2}\frac{M_0a}{EI}$
h. 	$-\frac{1}{2}\frac{M_0a^2}{EI}$	$+\frac{5}{8}\frac{M_0a^2}{EI}$	$+\frac{1}{2}\frac{M_0a}{EI}$

Scanned with OKEN Scanner

7.68. Grinzile simetrice de lemn din tabelul 7.68 sînt solicitate în diferite feluri de forţele concentrate şi distribuite. Să se calculeze v_1, v_2 şi φ_3.

R. v. tabelul 7.68.

7.69. Barele din structura unei construcţii de lemn sînt solicitate în diferite feluri ca în figura 7.69, *a*...*l*.

Cunoscînd că $P = qa$ şi $M_0 = qa^2$ se cere să se calculeze deplasarea capătului liber v_1 şi rotirea φ_2 a secţiunii 2.

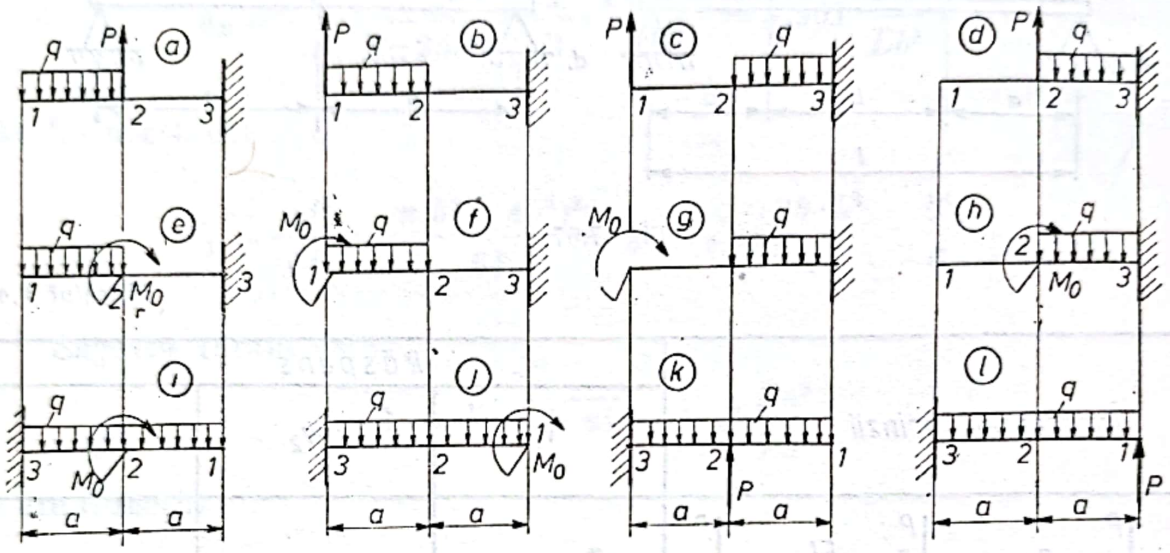


Fig. 7.69

Tabelul 7.69

Cazul	c	c'	Cazul	c	c'	Cazul	c	c'	Cazul	c	c'
a	$+\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2}$	*d*	$-\frac{23}{24}$	$+\frac{1}{2}$	*g*	$-\frac{19}{8}$	$+\frac{4}{3}$	*j*	$-\frac{13}{24}$	$+\frac{1}{3}$
b	$+\frac{5}{24}$	0	*e*	$-\frac{7}{24}$	0	*h*	$-\frac{41}{24}$	$+\frac{5}{6}$	*k*	$-\frac{29}{24}$	$+\frac{5}{6}$
c	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	*f*	0	$+\frac{1}{6}$	*i*	$+\frac{7}{6}$	$+\frac{2}{3}$	*l*	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

R. Notînd $v_1 = c\,\frac{qa^4}{EI}$ şi $\varphi_2 = c'\,\frac{qa^3}{EI}$, în tabelul 7.69 sînt date valorile coeficienţilor c şi c'.

7.70. Pentru diferite bare utilizate în structurile mecanice ale unor construcţii din lemn se cere să se calculeze deplasarea punctului C şi rotirea secţiunii D. Barele au rigiditatea la încovoiere constantă $EI = \text{const.}$ (fig. 7.70).

R. a. $\delta_c = \frac{23}{8}\,\frac{qa^4}{EI}$; $\varphi_D = \frac{3}{2}\,\frac{qa^3}{EI}$;

b. $\delta_c = \frac{19}{24}\,\frac{qa^4}{EI}$; $\varphi_D = \frac{1}{3}\,\frac{qa^3}{EI}$;

Scanned with OKEN Scanner

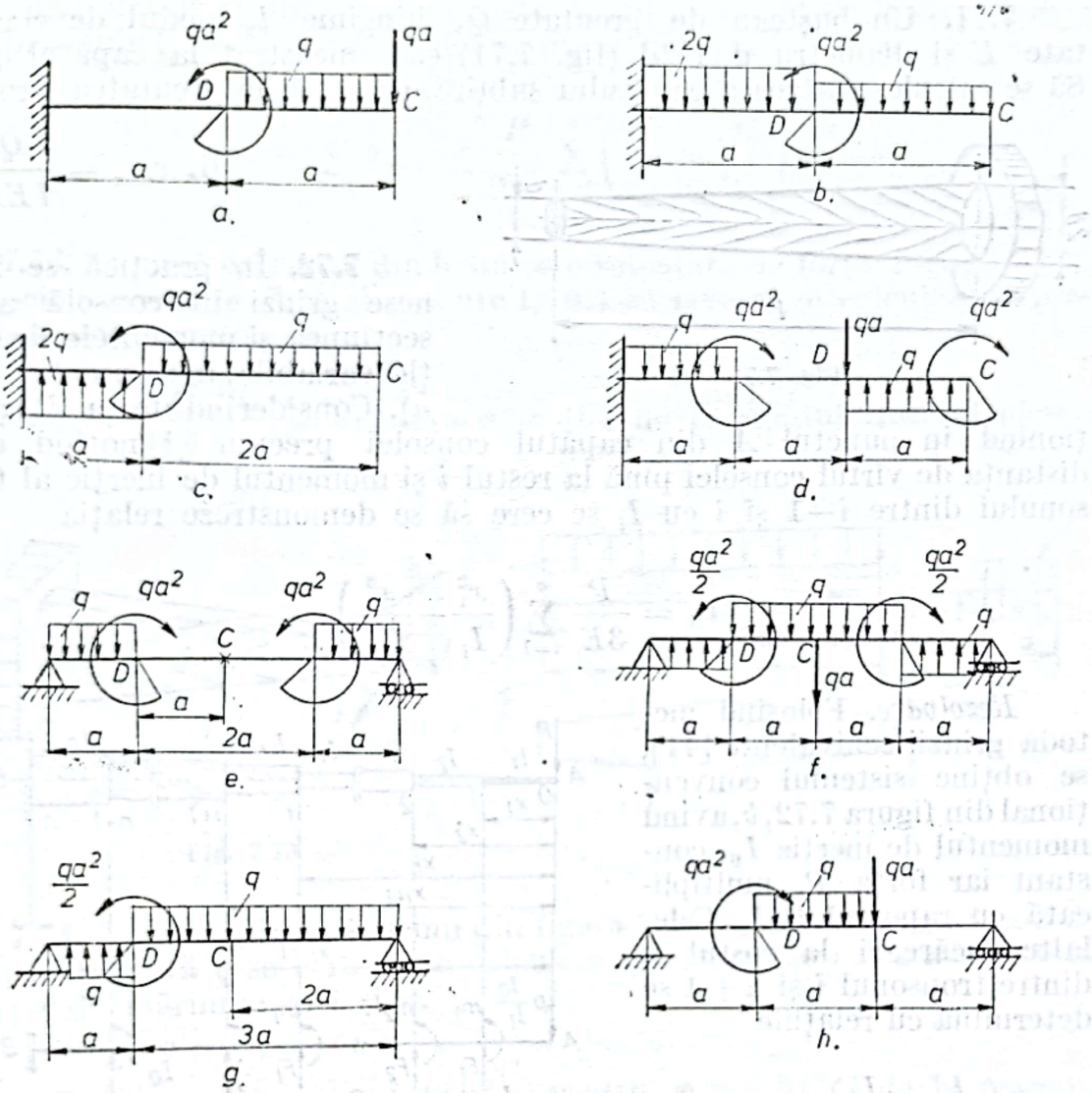


Fig. 7.70

c. $\delta_c = \frac{25}{4}\frac{qa^4}{EI}$; $\varphi_D = \frac{5}{3}\frac{qa^3}{EI}$;

d. $\delta_c = \frac{16}{3}\frac{qa^4}{EI}$; $\varphi_D = \frac{5}{3}\frac{qa^3}{EI}$;

e. $\delta_c = \frac{59}{24}\frac{qa^4}{EI}$; $\varphi_D = \frac{3}{2}\frac{qa^3}{EI}$;

f. $\delta_c = 2\frac{qa^4}{EI}$; $\varphi_D = \frac{13}{12}\frac{qa^3}{EI}$;

g. $\delta_c = 2\frac{qa^4}{EI}$; $\varphi_D = \frac{17}{16}\frac{qa^3}{EI}$;

h. $\delta_c = \frac{85}{72}\frac{qa^4}{EI}$; $\varphi_D = \frac{65}{72}\frac{qa^3}{EI}$.

Scanned with OKEN Scanner

7.71. Un buștean de greutate Q, lungime l, modul de elasticitate E și diametru d și $2d$ (fig. 7.71) este încastrat la capătul gros. Să se calculeze săgeata capătului subțire produsă de greutatea proprie

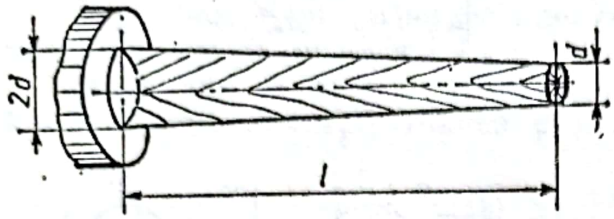


Fig. 7.71

R. $v_{max} = \dfrac{Ql^3}{7EI_{max}}$.

7.72. În practică se întîlnesc grinzi în consolă avînd secțiunea și momentele de inerție variabile, în trepte (fig. 7.72, *a*). Considerînd forța P ca acționînd în punctul A din capătul consolei precum și notînd cu x distanța de vîrful consolei pînă la restul i și momentul de inerție al tronsonului dintre $i-1$ și i cu I_i se cere să se demonstreze relația

$$v_A = \frac{P}{3E} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_1^3}{I_i} - \frac{x_i^3}{I_{1+i}} \right).$$

Rezolvare. Folosind metoda grinzii echivalente [44], se obține sistemul convențional din figura 7.72, *b*, avînd momentul de inerție I_0, constant iar forța P_0 multiplicată cu raportul I_0/I_1. Celelalte încărcări la rostul i, dintre tronsonul i și $i+1$ se determină cu relațiile

$$F_i = \left(\frac{I_0}{I_{i+1}} - \frac{I_0}{I_i} \right) T_i \text{ și respectiv } M_i = \left(\frac{I_0}{I_{i+1}} - \frac{I_0}{I_i} \right) M_i.$$

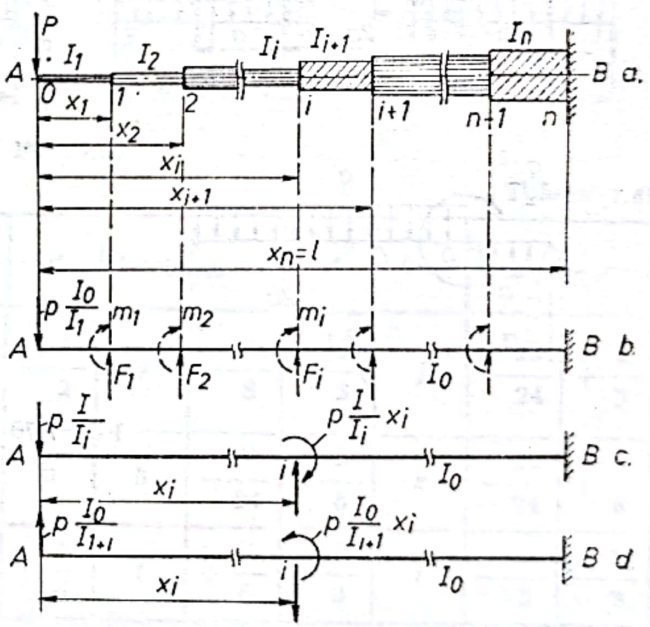


Fig. 7.72

Cu ajutorul cuplului și forței de la fiecare rost, se alcătuiesc două sisteme de încărcări cu torsor nul. Astfel, pornind de la F_i și M_i, calculate cu relațiile de mai sus, se alcătuiesc sistemele de încărcare din figura 7.27, *c* și *d*, la care, bara AB cu moment de inerție constant, se comportă ca o consolă încastrată în secțiunea i și acționată de cîte o forță concentrată la vîrf.

Ținînd cont că săgeata la capătul unei console produsă de o forță concentrată este $v = Pl^3/EI$ se calculează săgeata în vîrful consolei produsă de sistemele de forțe, obținîndu-se

$$v_{A,i} = \frac{1}{3\,EI_0} \left(P \frac{I_0}{I_i} x_i^3 - P \frac{I_0}{I_{i+1}} x_i^3 \right) = \frac{P}{3E} \left(\frac{x_i^3}{I_1} - \frac{x_1^3}{I_{i+1}} \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd identic cu forțele convenționale (fig. 7.27, *b*) de la fiecare rost și suprapunînd efectele, se obține expresia căutată:

$$v_A = \sum_{i=1}^{n} v_{A;i} = \frac{P}{3E} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^3}{I_i} - \frac{a_i^3}{I_{i+1}} \right).$$

7.73. O piesă ecarisată din lemn este solicitată de forța P (fig. 7.73). Cunoscînd mărimile P, a și $\alpha = \text{arc tg } 0{,}5$ se cere să se calculeze expresia tensiunii maxime σ_{max}.

R. $\sigma_{max} = \dfrac{27\,Pl}{16\sqrt{5}\,a^3}$ la distanța $x = 3l/4$ de la capătul liber al piesei.

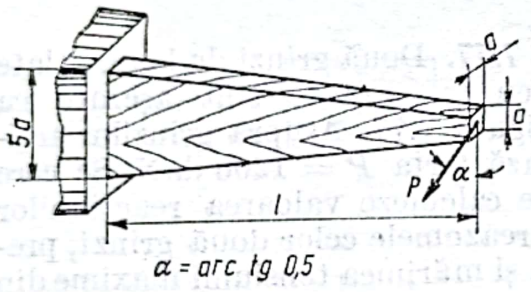


Fig. 7.73

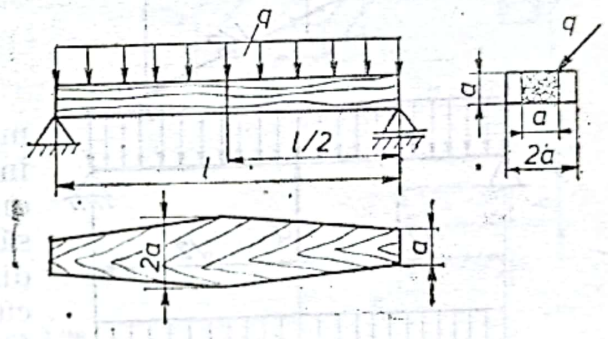


Fig. 7.74

7.74. Pentru grinda de lemn din figura 7.74 solicitată de sarcina uniform distribuită q se cere să se calculeze tensiunea normală maximă în funcție de mărimile q, l și a.

R. $\sigma_{max} \cong 0{,}453\,\dfrac{ql^2}{a^3}$ pentru $x \cong 0{,}317\,l$ de la reazem.

7.75. O piesă de lemn este solicitată de forța P după diagonala secțiunii (fig. 7.75). Se cere să se calculeze săgeata maximă f_{max} și direcția acesteia față de direcția de acționare a forței P.

R. $f_{max} \cong 17{,}8\,\dfrac{Pa^3}{Eb^4}$; $\alpha \cong 15°42'$.

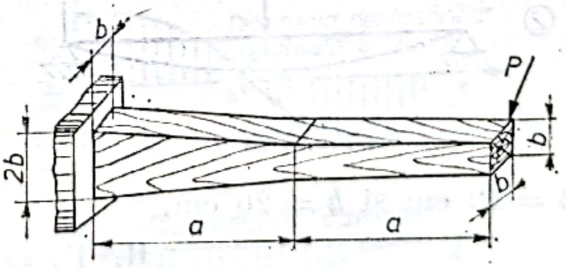


Fig. 7.75

7.76. Cît de mare trebuie să fie forța de reacțiune a grinzii (2) asupra grinzii (1) (fig. 7.76) astfel, încît deplasarea verticală a mijlocului celor două grinzi, de aceeași rigiditate EI, să fie zero?

Rezolvare. Fie Q forța de reacțiune dintre cele două grinzi. Grinda *(1)* este solicitată de forța uniform distribuită p și reacțiunea Q, iar grinda *(2)* numai de reacțiunea Q.

Scanned with OKEN Scanner

Săgeata în punctul de contact a celor două grinzi este aceeași, respectiv $v_1 = v_2$.

Cu metoda suprapunerii de efecte se obține (fig. 7.76):

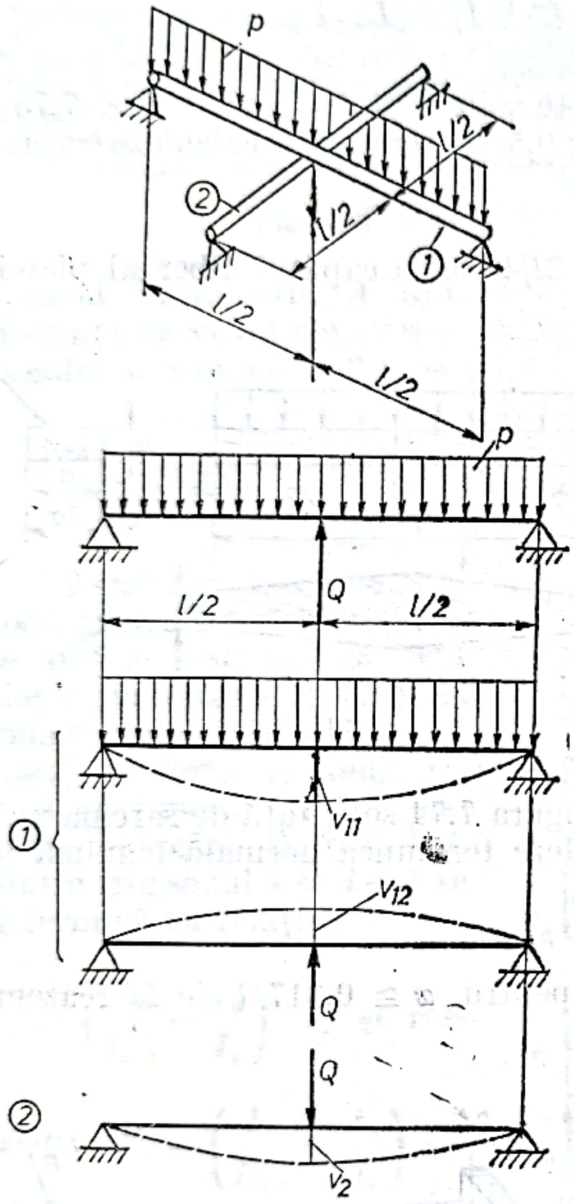


Fig. 7.76

$$v_1 = v_{11} + v_{12} = \frac{5pl^4}{384\,EI} - \frac{QL^3}{48\,EI} \quad \text{iar}$$

$$v_2 = \frac{QL^3}{48\,EI}.$$

Din egalarea celor două expresii rezultă

$$Q = 5pl/16.$$

7.77. Două grinzi de lemn aflate mereu în contact sînt așezate ca în figura 7.77. Asupra grinzilor acționează forța $P = 1200$ daN. Se cere să se calculeze valoarea reacțiunilor din reazemele celor două grinzi, precum și mărimea tensiunii maxime din fiecare grindă. Se dau: $a = 100$ cm;

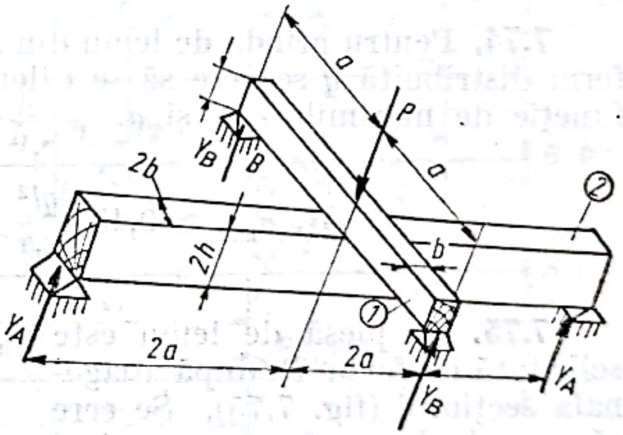


Fig. 7.77

$b = 12$ cm și $h = 20$ cm.

R. $Y_A = 400$ daN; $Y_B = 200$ daN; $\sigma_{max\,1} = 25$ daN/cm²; $\sigma_{max\,2} = 12{,}5$ daN/cm².

7.78. Două scînduri sînt dispuse una față de alta ca în figura 7.78, *a* și *b*. Se cere să se dimensioneze știind că $P = 10$ kN, $p = 10$ kN/m, $a = 50$ cm, $b = 2h$ și $\sigma_a = 100$ daN/cm². În calcule se va considera că contactul dintre scînduri se realizează punctiform.

R. a. $b = 17{,}6$ cm și $h = 8{,}8$ cm;

b. $b = 14$ cm și $h = 7$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

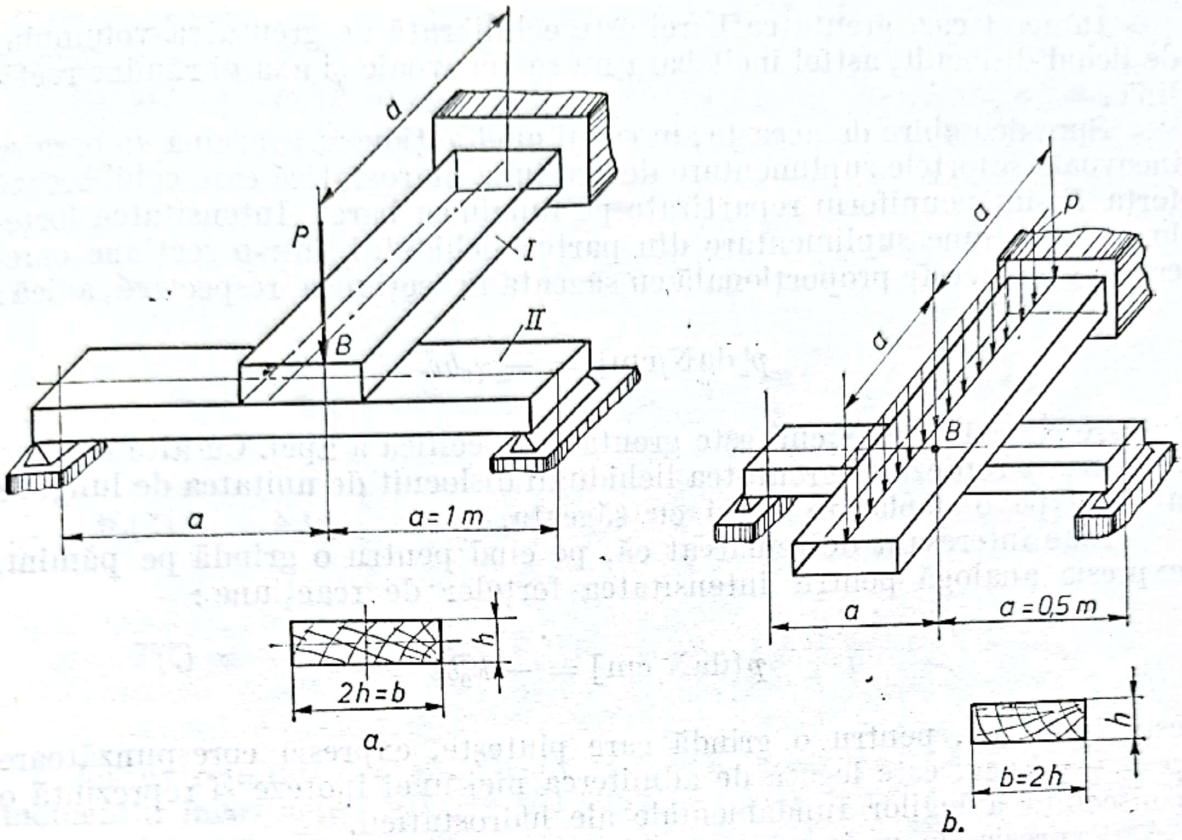


Fig. 7.78

7.79. O grindă dreaptă de secțiune dreptunghiulară, executată din lemn și încărcată cu o forță P, plutește pe suprafața apei (fig. 7.79). Să se determine valoarea tensiunii de calcul [51].

Dimensiunile grinzii sînt: $l = 10$ m, lățimea $b = 20$ cm, înălțimea $h = 10$ cm. Materialul grinzii: brad cu greutatea specifică $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ daN/cm³ și modulul de elasticitate $E = 10^5$ daN/cm². Sarcina $P = 50$ daN este aplicată în centrul feței superioare a grinzii.

Rezolvare. În lipsa sarcinii P, grinda se află sub acțiunea a două forțe opuse, uniform repartizate pe lungimea ei și anume: greutatea proprie și forțele de presiune hidrostatică a lichidului asupra corpului scufundat în apă.

Deoarece greutatea specifică a lemnului este 0,6 din greutatea specifică a apei, pentru echilibrarea reciprocă a acestor forțe bara trebuie să fie scufundată în apă cu $0{,}6\,h = 6$ cm.

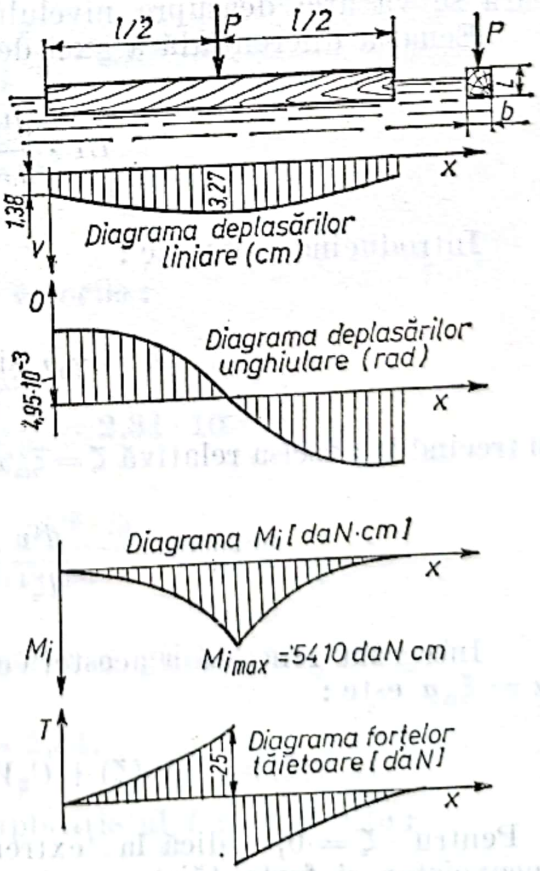


Fig. 7.79

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, greutatea barei este echilibrată de greutatea volumului de lichid dislocuit, astfel încît bara nu se încovoaie și axa ei rămîne rectilinie.

Spre deosebire de aceasta, în cazul cînd acționează sarcina P bara se încovoaie și forțele suplimentare de presiune hidrostatică care echilibrează forța P sînt neuniform repartizate pe lungimea barei. Intensitatea forțelor de reacțiune suplimentare din partea lichidului, într-o secțiune oarecare a grinzii, este proporțională cu săgeata în secțiunea respectivă, adică :

$$p[\text{daN/cm}] = -\gamma_0 bv,$$

în care $\gamma_0 = 10^{-3}$ daN/cm^3 este greutatea specifică a apei. Cu alte cuvinte mărimea p reprezintă greutatea lichidului dislocuit de unitatea de lungime a barei pe o deplasare egală cu săgeata.

Este interesant de remarcat că, pe cînd pentru o grindă pe pămînt, expresia analogă pentru intensitatea forțelor de reacțiune :

$$p[\text{daN/cm}] = -k_0 bv$$

este ipotetică, pentru o grindă care plutește, expresia corespunzătoare $p = -\gamma_0 bv$ nu este legată de admiterea nici unei ipoteze și reprezintă o consecință a legilor fundamentale ale hidrostaticii.

Expresia de mai sus pentru intensitatea forțelor de reacțiune este valabilă numai în cazul cînd pe întreaga lungime a barei, fața sa superioară se va afla deasupra nivelului apei.

Ecuația diferențială a axei de încovoiere a grinzii este :

$$EI \cdot \frac{d^4v}{dx^4} = -\gamma_0 bv.$$

Introducînd notațiile :

$$k = \gamma_0 b \quad \text{și} \quad \xi_m = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

și trecînd la abscisa relativă $\zeta = \xi_m x$ aducem ecuația diferențială la forma :

$$\frac{d^4v}{d\zeta^4} + 4v = 0$$

Integrala generală a acestei ecuații, în intervalul $0 < \varphi < \alpha$ în care $\alpha = \xi_m a$ este :

$$v(\zeta) = C_1 V_1(\zeta) + C_2 V_2(\zeta) + C_3 V_3(\zeta) + C_4 V_4(\zeta)$$

Pentru $\zeta = 0$, adică la extremitatea din stînga a barei, momentul încovoietor și forța tăietoare sînt egale cu zero (extremitatea liberă a barei) și prin urmare, $C_3 = 0$ și $C_4 = 0$. Constantele de integrare C_1 și

Scanned with OKEN Scanner

C_2 se determină din condițiile de extremitate din dreapta a barei, adică pentru $\zeta = \lambda = \xi_m l$.

Săgeţile v, unghiurile de rotire θ ale secțiunilor, momentele încovoietoare M_i și forţele tăietoare T în intervalul $\alpha < \zeta < \lambda$ sînt date de expresiile :

$$v(\zeta) = C_1 V_1(\zeta) + C_2 V_2(\zeta) + \frac{4\xi_m P}{k} V_4(\zeta - \alpha);$$

$$\theta(\zeta) = m\left[-C_1 4V_4(\zeta) + C_2 V_1(\zeta) + \frac{4\xi_m P}{k} V_3(\zeta - \alpha)\right];$$

$$M_i(\zeta) = -EI\xi_m^2\left[-4C_1 V_3(\zeta) - 4C_2 V_4(\zeta) + \frac{4\xi_m P}{k} V_2(\zeta - \alpha)\right];$$

$$T(\zeta) = -EI\xi_m^3\left[-4C_1 V_2(\zeta) - 4C_2 V_3(\zeta) + \frac{4\xi_m P}{k} V_1(\zeta - \alpha)\right]$$

La extremitatea din dreapta a barei, adică pentru $\zeta = \lambda = \xi_m l$, momentul încovoietor și forța tăietoare devin egale cu zero, astfel încît pentru determinarea constantelor de integrare C_1 și C_2 obținem două ecuații :

$$C_1 V_3(\lambda) + C_2 V_4(\lambda) - \frac{\xi_m P}{k}(V_2(\lambda - \alpha) = 0;$$

$$C_1 V_2(\lambda) + C_2 V_3(\lambda) - \frac{\xi_m P}{k} V_1(\lambda - \alpha) = 0.$$

Coeficienţii din aceste formule au valorile :

$$\xi_m = \sqrt[4]{\frac{\gamma_0 b}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{10^{-3} \cdot 20 \cdot 6}{4 \cdot 10^5 \cdot 10^4}} = 2{,}34 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}};$$

$$\frac{\xi_m P}{k} = \frac{\xi_m P}{\gamma_0 b} = \frac{2{,}34 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{10^{-3} \cdot 20} = 5{,}85.$$

Lungimea adimensională sau relativă a grinzii este :

$$\lambda = \xi_m l = 2{,}34.$$

Abscisa relativă a punctului de aplicaţie al forţei P este :

$$\alpha = \xi_m l/2 = 1{,}17.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din tabelele date în [51], rezultă:

$$V_2(\lambda) = 0{,}0935\,;\quad V_3(\lambda) = 1{,}8473\,;\quad V_4(\lambda) = 1{,}8352\,;$$

$$V_1(\lambda - \alpha) = 0{,}6891\,;\quad V_2(\lambda - \alpha) = 1{,}0971$$

și ecuațiile pentru determinarea constantelor de integrare C_1 și C_2 devin:

$$1{,}8473\ C_1 + 1{,}8352\ C_2 - 5{,}85 \cdot 1{,}0971 = 0\,;$$

$$0{,}0935\ C_1 + 1{,}8473\ C_2 - 5{,}85 \cdot 0{,}6891 = 0,$$

de unde rezultă:

$$C_1 = 1{,}375 \text{ și } C_2 = 2{,}114.$$

Săgețile v, unghiurile de rotire θ ale secțiunilor, momentele încovoietoare M_i și forțele tăietoare T în intervalul $0 < \zeta < \alpha$ sînt determinate de următoarele expresii:

$$v(\zeta) = C_1 V_1(\zeta) + C_2 V_2(\zeta)\,;$$

$$\theta(\zeta) = \xi[-C_1 \cdot 4V_4(\zeta) + C_2 \cdot V_1(\zeta)]\,;$$

$$M_i(\zeta) = -EI\xi_m^2[-C_1 \cdot 4V_3(\zeta) - C_2 \cdot 4V_4(\zeta)]\,;$$

$$T(\zeta) = -EI\xi_m^3[-C_1 \cdot 4V_2(\zeta) - C_2 \cdot 4V_3(\zeta)],$$

în care C_1 și C_2 au valorile stabilite mai sus.

Folosind expresiile obținute pentru a determina valorile celor patru mărimi în secțiunea $\xi = \alpha = 1{,}17$ adică în punctul de aplicație al forței P din tabelele forțelor lui A.N. Krîlov [51] se găsește

$$V_1(\alpha) = 0{,}6891\,;\quad V_2(\alpha) = 1{,}0971\,;$$

$$V_3(\alpha) = 0{,}6702\,;\quad V_4(\alpha) = 0{,}2646$$

și se obțin astfel următoarele valori; săgeata $v(\alpha) = 3{,}27$ cm; unghiul de rotire $\theta(\alpha) = 0$; momentul încovoietor $M(\alpha) = 5410$ daN.cm; forța tăietoare $T(\alpha) = 25$ daN.

Alegînd diferite valori ale lui între 0 și $\lambda = \xi_m l$ și folosind expresiile corespunzătoare pentru săgeți, unghiuri, momente încovoietoare și forțe tăietoare, putem trasa fără dificultate diagramele acestor mărimi pe lungimea barei (fig. 7.79).

Din diagrama momentelor încovoietoare, rezultă că tensiunile maxime apar în secțiunea $\zeta = \alpha$ și au valoarea

$$\sigma_{max} = \frac{M_i(\alpha)}{W_x} = \frac{6.5410}{20.100} = 16 \text{ daN/cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Grinda se scufundă sub acțiunea greutății proprii cu 6 cm (fără încovoiere) și, în plus, sub acțiunea forței concentrate, săgeata sa maximă este de 3,27 cm. În consecință, scufundarea maximă este egală cu 9,27 cm, adică mai mică decît înălțimea grinzii $h = 10$ cm, și prin urmare fața superioară a grinzii se află deasupra nivelului apei pe întreaga sa lungime.

7.80. O grindă din lemn cu lungimea $l = 4$ m, așezată pe un mediu elastic și avînd la extremități reazeme articulate, este încărcată în secțiunea $a = 3$ m cu o forță concentrată $P = 4000$ daN (fig. 7.80). Grinda are secțiunea pătrată cu latura $b = 20$ cm. Modulul de elasticitate al lemnului $E = 10^5$ daN/cm². Stratul de pământ este constituit din nisip îndesat, în stare naturală.

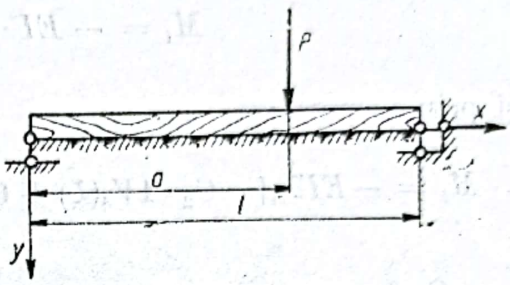


Fig. 7.80

Rezolvare. Coeficientul de tasare elastică a pămîntului respectiv este $k_0 = 5$ kg/cm³. Coeficientul de pat este $k = k_0 b = 5 \cdot 20 = 100$ kg/cm² [51]. Modulul de rigiditate al grinzii este:

$$EI = E\frac{b^4}{12} = 10^5 \cdot \frac{4}{3} 10^4 = \frac{4}{3} 10^9 \text{ daN} \cdot \text{cm}^2.$$

Introducînd notația

$$\xi_m = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{100}{4 \cdot \frac{4}{3} 10^9}} = 0{,}005 \sqrt[4]{30} = 0{,}0117 \frac{1}{\text{cm}},$$

lungimea adimensională sau relativă a grinzii este:

$$\lambda = \zeta_m l = 0{,}0117 \cdot 400 = 4{,}68.$$

Abscisa relativă a punctului de aplicație a forței P este:

$$\alpha = \zeta_m a = 0{,}0117 \cdot 300 = 3{,}51.$$

Abscisa relativă a secțiunii curente este $\zeta = \xi_m x$. Linia elastică a grinzii este reprezentată de ecuația [51].

$$v(\zeta) = [C_1 V_1(\zeta) + C_2 V_2(\zeta) + C_3 V_3(\zeta) + C_4 V_4(\zeta)]_{\zeta > 0} + \frac{4\xi_m P}{k} V_4(\zeta - \alpha)_{/\zeta > \alpha}$$

În cazul cînd reazemul extremității din stînga a grinzii ($\zeta = 0$) este articulat, două dintre constantele de integrare sînt nule:

$$C_1 = 0 \text{ și } C_3 = 0$$

25—c. 618 56

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea celorlalte două constante C_2 și C_4 se ține seama de faptul că extremitatea din dreapta a grinzii are un reazem articulat adică, în această secțiune, săgeata și momentul încovoietor sînt egale cu zero,

Între momentele încovoietor M și ecuația liniei elastice există relația :

$$M_i = -EI \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = -EI\,\xi_m^2 \frac{d^2v}{d\zeta^2}$$

și prin urmare :

$$M_i = -EI\xi_m^2[-C_2 \cdot 4V_4(\zeta) + C_2V_2(\zeta)]_{\xi>0} - EI\zeta_m^2 \frac{4\xi_m P}{k} V_2(\zeta - \alpha)|_{\zeta>\alpha}$$

Ca în cazul ecuației liniei elastice, ultimul termen, care ține seama de influența forței P, se folosește numai pentru $\xi > \alpha$.

Condițiile de limită pentru extremitatea din dreapta :

$$v(\lambda) = 0 \text{ și } M_i(\lambda) = 0$$

duc la următoarele două ecuații în raport cu constantele C_2 și C_4 :

$$C_2V_2(\lambda) + C_4V_4(\lambda) + \frac{4\xi_m P}{k} V_4(\lambda - \alpha) = 0;$$

$$C_2 \cdot 4V_4(\lambda) + C_4V_2(\lambda) + \frac{4\xi_m P}{k} V_2(\lambda - \alpha) = 0,$$

în care :

$$\frac{4\xi_m P}{k} = \frac{4 \cdot 0{,}0117 \cdot 4000}{100} = 1{,}872.$$

Din tabelele funcțiilor fundamentale ale lui A.M. Krîlov [51] ținînd seama că $\lambda = 4{,}68$ și $\lambda - \alpha = 1{,}17$, se obține :

$$V_2(\lambda) = -27{,}8032\,; \quad V_4(\lambda) = -13{,}0293\,;$$

$$V_2(\lambda - \alpha) = 1{,}097\,; \quad V_4(\lambda - \alpha) = 0{,}2646,$$

iar sistemul de ecuații de mai sus devine :

$$-27{,}8032\ C_2 - 13{,}0293\ C_4 + 0{,}49535 = 0\,;$$

$$52{,}1172\ C_2 - 27{,}8032\ C_4 + 2{,}05377 = 0,$$

de unde rezultă :

$$C_2 = -0{,}08945 \text{ și } C_4 = 0{,}05710.$$

Scanned with OKEN Scanner

Săgeata grinzii în dreptul forţei P, adică pentru $\alpha = 3{,}51$ se determină utilizînd conform tabelelor de funcţii fundamentale, valorile

$$V_2(\alpha) = -10{,}8081 \text{ şi } V_4(\alpha) = 2{,}3900,$$

respectiv:

$$v(\alpha) = V_2 C_2(\alpha) + C_4 V_4(\alpha);$$

$$v(\alpha) = -0{,}008945\ (-10{,}808) + 0{,}05710 \cdot 2{,}3900 = 0{,}09667 -$$

$$+ 0{,}1365 \cong 0{,}23 \text{ cm}.$$

Această săgeată nu este cea maximă, însă este destul de apropiată de aceasta.

Momentul încovoietor maxim are loc pentru $\zeta = \alpha = 3{,}51$ şi este determinat de relaţia

$$M_i(\alpha) = -EI\xi_m^2[-C_3 \cdot 4V_4(\alpha) + C_4 \cdot V_2(\alpha)]$$

în care:

$$EI\xi_m^2 = 10^5 \cdot \frac{4}{3} 10^4 \cdot 0{,}0117^2 = 1{,}825 \cdot 10^5 \text{ daN}.$$

Valoarea maximă este:

$$M_i(\alpha) = -1{,}825 \cdot 10^5\ [0{,}008945 \cdot 4 \cdot 2{,}390 +$$

$$+ 0{,}05710 \cdot (-10{,}81)]; \quad M_i(\alpha) = 92500 \text{ daN.cm},$$

iar tensiunea maximă în secţiunea respectivă este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_i(\alpha)}{W_z} = \frac{92\,500}{\frac{1}{6} \cdot 20^3} \cong 69 \text{ daN/cm}^2.$$

7.81. O piesă de lemn de secţiune dreptunghiulară are o chertare în secţiunea 1—1 (fig. 7.81) şi este solicitată de forţa $P = 1\,000$ daN. Se cere să se dimensioneze ştiind că $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. În secţiunea 1—1 iau naştere eforturile secţionale $N = P$ şi $M_{iy} = Pa/4$, care produc tensiunile $\sigma_t = 2P/a^2$ şi $\sigma_i = 6P/a^2$, căci $W_y = a\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{a^3}{24}$.

Tensiunea totală este

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_i = \frac{2P}{a^2} + \frac{6P}{a^2} = \frac{8P}{a^2} \leqslant \sigma_a,$$

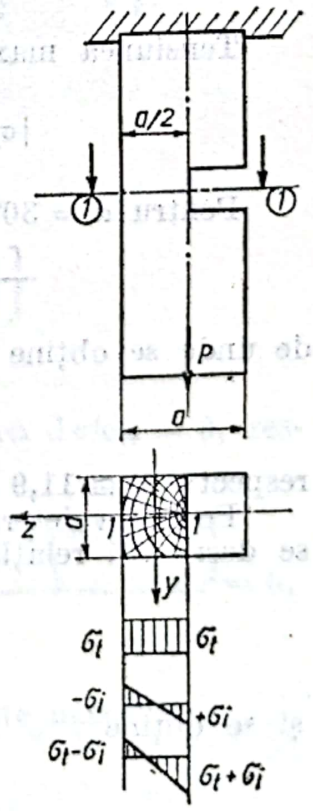


Fig. 7.81

de unde rezultă:

$$a \geqslant \sqrt{\frac{8P}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1000}{100}} \cong 9 \text{ cm}.$$

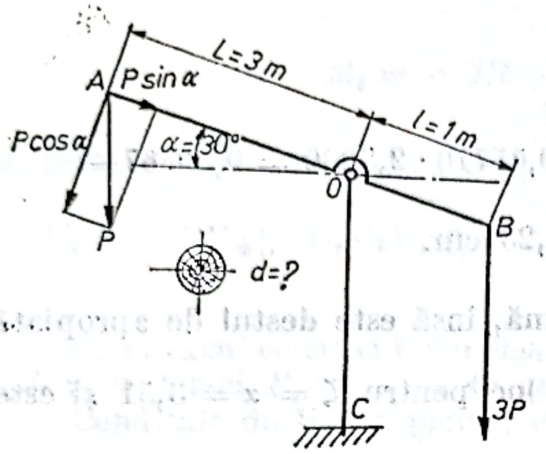


Fig. 7.82

7.82. Cumpăna unei fîntîni este confecţionată dintr-un buştean de diametru d necunoscut (fig. 7.82). Ştiind că greutatea care se ridică are valoarea $P = 50$ daN şi contragreutatea este $3P$ se cere să se calculeze diametrul d pentru un unghi $\alpha = 30°$. Care este valoarea unghiului α pentru care tensiunile din cumpănă sînt maxime.

Rezolvare. Sub acţiunea forţelor în secţiunea cumpenei iau naştere eforturile

$$|N| = P \sin \alpha \text{ şi } M_i = PL \cos \alpha,$$

care produc tensiunile

$$\sigma_c = \frac{P \sin \alpha}{A} = \frac{4P \sin \alpha}{\pi d^2} \text{ şi } \sigma_i = \frac{PL \cos \alpha}{W_z} = \frac{32PL \cos \alpha}{\pi d^3}.$$

Tensiunea maximă

$$|\sigma_{max}| = \frac{4P \sin \alpha}{\pi d^2} + \frac{32P L \cos \alpha}{\pi d^3} \leqslant \tau_a$$

Pentru $\alpha = 30°$ rezultă

$$-2\pi\sigma_a d + 32\sqrt{3}PL + 4Pd = 0,$$

de unde se obţine

$$d^3 - 0{,}398d - 1650 = 0,$$

respectiv $d \cong 11{,}9$ cm $\cong 12$ cm.

Pentru a determina unghiul α pentru care tensiunea σ este maximă se derivează relaţia

$$\sigma = \frac{P \sin \alpha}{A} + \frac{PL \cos \alpha}{W_z}$$

şi se obţine

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{P \cos \alpha}{A} - \frac{PL \sin \alpha}{W_z} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W_z}{AL} = \frac{d}{8L} = \frac{1}{200}, \text{ respectiv } \alpha = 17'.$$

Pentru această valoare a unghiului α trebuie avută în vedere dimensionarea cumpenei.

7.83. O bară de lemn de secţiune variabilă (fig. 7.83) este solicitată de forţa P, care face cu verticala unghiul $\alpha = 45°$. Se cere să se calculeze secţiunea x unde tensiunea normală este maximă, expresiile tensiunii maxime şi forţei capabile.

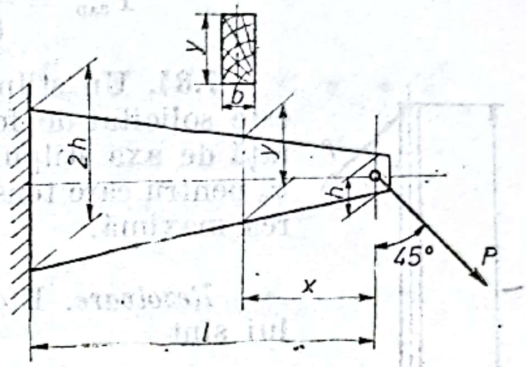


Fig. 7.83

Rezolvare. Într-o secţiune curentă aflată la distanţa x de capătul barei datorită forţei axiale $N = P \sin 45° = P/\sqrt{2}$ şi momentului încovoietor $M_i = Px \cos 45° = Px/\sqrt{2}$, se produce tensiunea totală

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{W_z} + \frac{P}{2\sqrt{A}} + \frac{Px}{\sqrt{2}\,W_z},$$

$$\text{unde } A = by = bh\left(1 + \frac{x}{l}\right),\ W_z = \frac{by^2}{6} = \frac{bh^2}{6}\left(1 + \frac{x}{l}\right)^2$$

$$\text{căci } y = h + x\frac{h}{l} = h\left(1 + \frac{x}{l}\right).$$

După înlocuire se obţine

$$\sigma = \frac{P\sqrt{2}}{2bh^2\left(1 + \frac{x}{l}\right)^2}\left[h + x\left(6 + \frac{h}{l}\right)\right].$$

Pentru ca tensiunea să fie maximă este necesar ca $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}x = 0$, respectiv

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = \frac{P\sqrt{2}}{2bh^2}\,\frac{\left(6 + \frac{h}{l}\right)\left(1 + \frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{l}\right)\cdot\frac{1}{l}\cdot\left[4 + x\left(6 + \frac{h}{l}\right)\right]}{\left(1 + \frac{x}{l}\right)^4} = 0,$$

de unde rezultă abscisa secţiunii unde tensiunea σ este maximă:

$$x = \frac{6l - h}{5l + h}\,l.$$

căreia îi corespunde

$$\sigma_{max} = \frac{P\sqrt{2}}{48h^2b} \cdot \frac{(6l + h)^2}{l}.$$

Punînd condiţia ca $\sigma_{max} \leqslant \sigma_a$ rezultă expresia forţei capabile

$$P_{cap} = \frac{48\, h^2bl\sigma}{(6l + h)^2\sqrt{2}}.$$

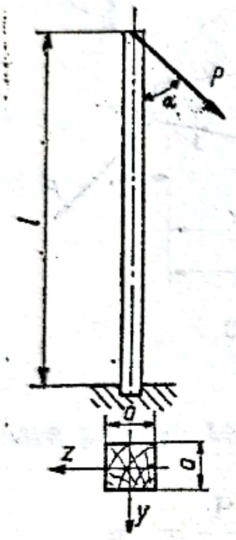


Fig. 7.84

7.84. Un stîlp de ancorare are secţiunea patrată şi este solicitat de forţa P, care acţionează sub un unghi α faţă de axa stîlpului (fig. 7.84). Să se determine unghiul α_0 pentru care tensiunea din baza stîlpului atinge valoarea maximă.

Rezolvare. Eforturile din secţiunea din baza stîlpului sînt

$$N = P \cos \alpha \text{ şi } M_i = Pl \sin \alpha,$$

iar tensiunea cea mai mare de compresiune este

$$|\sigma| = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{W_z} = \frac{P}{a^2}\left(\cos \alpha + \frac{6l}{a} \sin \alpha\right).$$

Unghiul α_0 se determină din condiţia

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{P}{a^2}\left(-\sin \alpha_0 + \frac{6l}{a} \cos \alpha_0\right) = 0,$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{6l}{a}.$$

Înlocuind această valoare în expresia tensiunii se obţine

$$\sigma = \frac{P}{a^2} \frac{\cos (\alpha - \alpha_0)}{\cos \alpha_0}.$$

Pentru $\alpha = \alpha_0$ expresia tensiunii maxime este

$$\sigma_{max} = \frac{P}{a^2 \cos \alpha_0} = \frac{P\sqrt{a^2 + 36l^2}}{a^3}$$

căci $\cos \alpha_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 36l^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

7.85. Să se dimensioneze talpa inferioară a fermei cu zăbrele din figura 7.85. Ferma are tavan suspendat cu grinzi dese amplasate la 1,00 m distanţă. Traveea construcţiei este de 4,50 m. Talpa inferioară este supusă la un efort maxim de 10 000 daN în panoul $O-1$. Încărcarea la nivelul tavanului este de 100 daN/m². În calcule se va ţine cont de slăbirea tălpii.

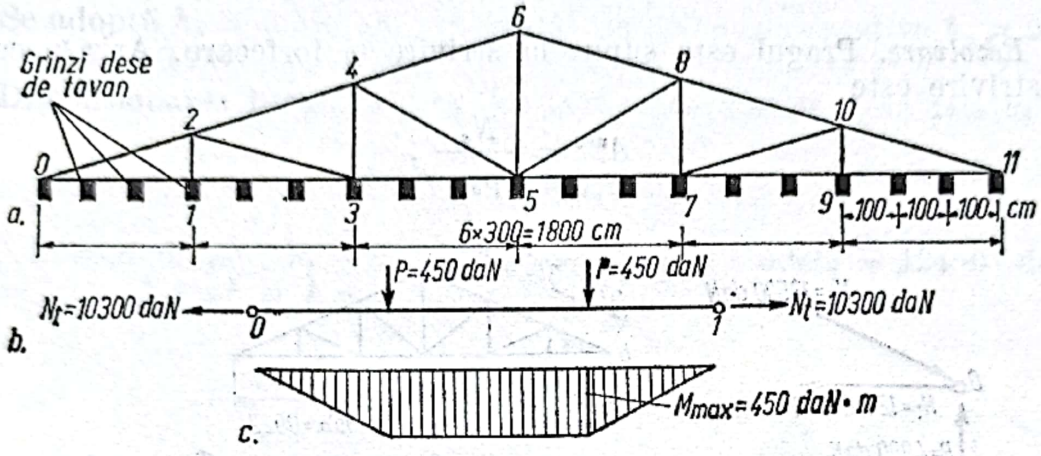


Fig. 7.85

Rezolvare. Încărcare a pe talpa fermei este [32]:

$N_t = 10300$ daN,

$P = 100$ daN/m² $\cdot 1{,}00$ m $\cdot 4{,}50$ m $= 450$ daN.

Momentul încovoietor maxim este

$M_{max} = 450 \cdot 1{,}00 = 450$ daN.m.

Calculul dimensiunii secţiunii se face prin încercări.

Se alege din sortimentul dat o grindă cu dimensiunile 15.25 cm² cu care apoi se face verificarea.

Tensiunea maximă, ţinînd cont de solicitările de tracţiune şi încovoiere, este

$$\sigma_{max} = \frac{N_t}{A_{net}} + \frac{M_{max}}{W_{znet}} \cdot K_1 \leqslant \sigma_a ,$$

unde:

$N_t = 10\,300$ daN; $M_{max} = 45\,000$ daN.cm; $A_{brut} = 15 \cdot 25$ cm²; $A_{net} =$

$$= \frac{A_{brut}}{K_{sl}^{A}} = 288 \text{ cm}^2; \quad W_{z\,brut} = \frac{15 \cdot 25^2}{6} = 1250 \text{ cm}^3; \quad W_{z\,net} =$$

$$= \frac{W_{z\,brut}}{K_{sl}^{W}} = \frac{1250}{1{,}4} = 894 \text{ cm}^3; \quad K_1 = \sigma_{at}/\sigma_{ai} = 70/100 = 0{,}7.$$

După înlocuiri se obţine:

$$\sigma_{sf} = \frac{10.300}{288} + \frac{4500}{894} \cdot 0{,}7 = 45{,}7 + 35{,}3 = 71 \text{ daN/cm}^2 \cong$$

$$= \sigma_{at} = 70 \text{ daN/cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Depășirea efortului admisibil este mai mică decît 3%. Coeficienții de reducere a ariei și modulului de rezistență, respectiv K_{si}^{A} și K_{si}^{W} au fost luați după lucrarea [32].

7.86. Să se dimensioneze modul de reazem al fermei din figura 7.86, a utilizînd o îmbinare prin chertare frontală cu prag simplu [32].

Rezolvare. Pragul este supus la strivire și forfecare. Aria necesară de strivire este

$$A_s^{nec} = \frac{N_s}{p_{as\alpha}},$$

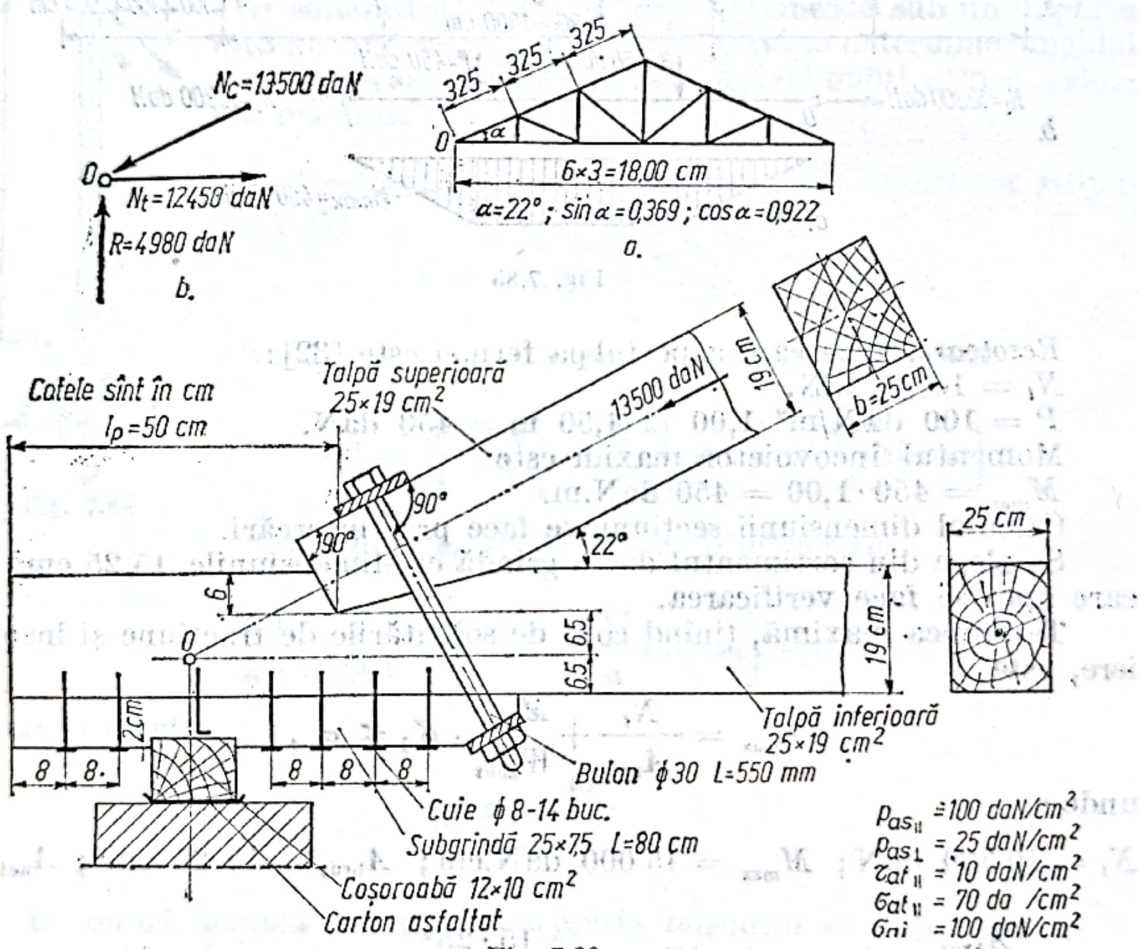


Fig. 7.86

unde $N_s = 13500$ daN, $p_{as||} = 100$ daN/cm², $p_{as} = 25$ daN/cm², deci

$$p_{as\alpha} = \frac{p_{as||}}{1+\left(\frac{p_{as||}}{p_{as}}-1\right)\sin^3\alpha} = \frac{100}{1+\left(\frac{100}{25}-1\right)\cdot 0{,}369^3} = 87 \text{ daN/cm}^2.$$

După înlocuiri se obține

$$A_s^{nec} = \frac{13\,500}{87} = 155 \text{ cm}^2,$$

de unde rezultă înălțimea necesară a pragului

$$h_s^{nec} = \frac{A_s^{nec} \cos\alpha}{b} = \frac{155 \cdot 0{,}922}{25} = 5{,}72 \text{ cm}.$$

Se adoptă $h_p = 6$ cm, care respectă condițiile constructive $h_p \geqslant 2$ cm și $h_p < h/3 = 19/3 = 6{,}33$ cm.

Dimensionarea lungimii pragului la forfecare se face cu relația

$$l_p^{nec} = T_f / b \tau_{af||},$$

unde înlocuind pe $T_f = 13500 \cos\alpha = 13500 \cdot 0{,}922 = 12450$ daN; $\sigma_{af||} = 10$ daN/cm² și $b = 25$ cm rezultă

$$l_p^{nec} = \frac{12450}{10 \cdot 25} = 49{,}8 \text{ cm} \approx 50 \text{ cm}.$$

Lungimea $l_p = 50$ cm respectă condițiile constructive: $l_p \geqslant 2h = 2 \cdot 25 = 50$ cm; $l_p \leqslant 20$ cm.

Talpa inferioară în zona chertării este slăbită. Verificarea zonei slăbite se face în două ipoteze: în raport cu axa netă (cînd există întindere centrică) sau în raport cu axa brută (cînd există încovoiere cu tracțiune).

În primul caz tensiunea maximă este

$$\sigma_{max} = \frac{N_t}{A_{net}} = \frac{13500 \cdot \cos\alpha}{(b - d_b)(h - h_p)} = \frac{13500 \cdot 0{,}922}{(25 - 3)(19 - 6)} =$$

$= 43{,}5$ daN/cm³ < 70 daN/cm².

În cazul al doilea

$$\sigma_{max} = \frac{N_t}{A_{net}} + \frac{N_t \cdot e}{W_{znet}} \cdot \frac{\sigma_{at}}{\sigma_{ai}} \leqslant \sigma_{at},$$

unde înlocuind

$$N_t = 12450 \text{ daN}; \quad W_{znet} = \frac{(25 - 3) \cdot (19 - 6)^2}{6} = 620 \text{ cm}^3;$$

$$e = 3 \text{ cm (excentricitatea)}.$$

$\sigma_{at} = 70$ daN/cm²; $\sigma_{ai} = 100$ daN/cm²; $A_{net} = (25 - 3) \cdot (19 - 6) = 286$ cm²

se obține

$$\sigma_{max} = \frac{12450}{286} + \frac{12450 \cdot 3}{620} \cdot \frac{70}{100} = 85{,}7 \text{ daN/cm}^2 > 70 \text{ daN/cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere această depășire se va avea grijă ca centrarea modulului O să fie făcută după axa netă a tălpii inferioare.

Între subgrindă și cosoroabă se produce o strivire. Ca atare lățimea cosoroabei trebuie astfel aleasă încît să fie evitată strivirea, respectiv

$$b_c^{nec} = \frac{R}{b\,p_{as\perp}} = \frac{4980}{25 \cdot 25} = 7{,}98 \text{ cm},$$

Se alege o cosoroabă cu dimensiunile 12.10 cm².

7.87. Un stîlp de lemn de secțiune circulară cu diametrul $d = 15$ cm este solicitată de forța P, ca în figura 7.87. Se cere să se calculeze valoarea sarcinii P astfel, încît în secțiunea periculoasă să nu se depășească $\sigma_a = 100$ daN/cm².

R. $P = 622$ daN.

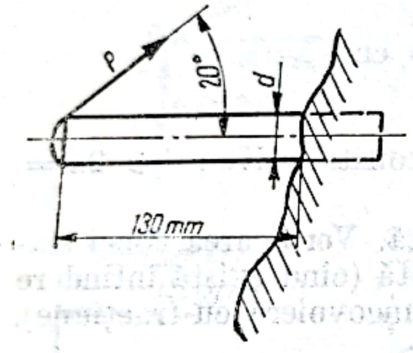


Fig. 787.

7.88. Rama unui scaun curbat are secțiunea $A = 4 \cdot 4 = 16$ cm² și raza medie $R = 20$ cm iar într-o secțiune se dezvoltă eforturile $M_i = 1000$ daN. cm, $N_0 = -30$ daN și $T_0 = 30$ daN. Se cere să se calculeze tensiunile σ_n, σ_θ și $\tau_{r\theta}$ (fig. 88, *a*). Materialul ramei are $E_L = 110\,000$ daN/cm², $G_{TL} = 5000$ daN/cm², $E_T = 3000$ daN/cm² și $\nu_{TL} = 0{,}013$.

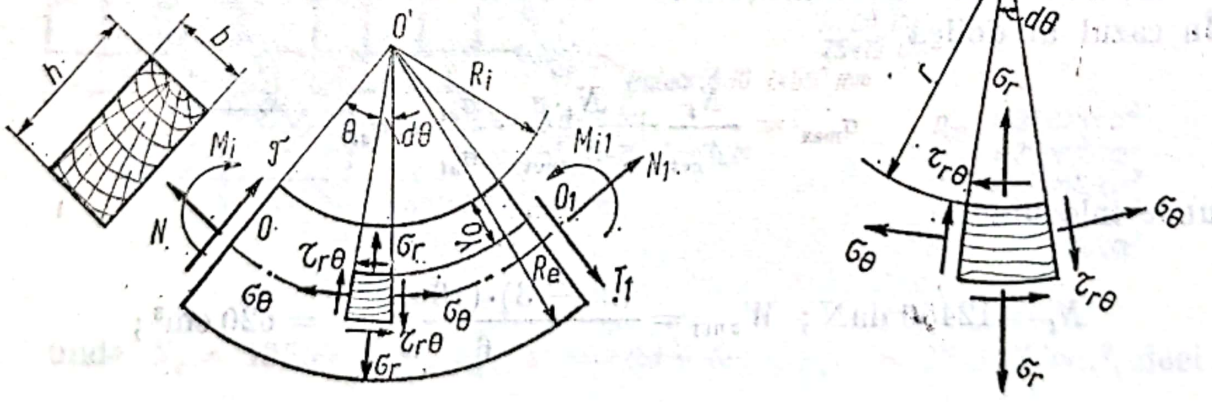


Fig. 7.88 a

Rezolvare. Rama scaunului fiind bară curbă (fig. 7.88, *a*) datorită momentului încovoietor M_i, forței axiale N și forței tăietoare T, într-o secțiune oarecare θ pe un element aflat la distanța r de centru se dezvoltă tensiuni normale radiale σ_r, tensiuni normale circumferențiale σ_θ și tensiuni tangențiale (de forfecare) $\tau_{r\theta}$.

Scanned with OKEN Scanner

Expresiile acestor tensiuni sînt [49]:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{M_{i0}+N_0R}{W}K_r^M+\frac{T_0}{A}K_r^T\sin\theta+\frac{N_0}{A}K_r^N\cos\theta,\\
\sigma_\theta &= \frac{M_{i0}+N_0R}{W}K_\theta^M+\frac{T_0}{A}K_\theta^T\sin\theta+\frac{N_0}{A}K_\theta^N\cos\theta,\\
\tau_{r\theta} &= \frac{N_0}{A}K_{r\theta}^N+\frac{T_0}{A}K_{r\theta}^T\cos\theta,
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

unde coeficienții K_r^M, K_r^T, K_r^N, K_θ^M, K_θ^T, K_θ^N, $K_{r\theta}^N$, $K_{r\theta}^T$, au expresiile:

$$\left.\begin{aligned}
K_r^M &= \left[-2+2r^{\sqrt{E}-1}\frac{R_e^{\sqrt{E}+1}-R_i^{\sqrt{E}+1}}{R_e^{2\sqrt{E}}-R_i^{2\sqrt{E}}}+\frac{2}{r^{\sqrt{E}+1}}\cdot\right.\\
&\quad\left.\cdot\frac{R_e^{\sqrt{E}-1}-R_i^{\sqrt{E}-1}}{R_e^{2\sqrt{E}}-R_i^{2\sqrt{E}}}(R_iR_e)^{\sqrt{E}+1}\right]K_0\frac{H^2}{6};\\
K_r^N &= \left[\frac{1}{r}-\frac{r^{A-1}}{R_e^A+R_i^A}-\frac{(R_iR_e)^A}{r^{A+1}(R_e^A+R_i^A)}\right]K_1H;\\
K_\theta^M &= \left[-2+2\sqrt{E}\,r^{\sqrt{E}-1}\frac{R_e^{\sqrt{E}+1}-R_i^{\sqrt{E}+1}}{R_e^{2\sqrt{E}}-R_i^{2\sqrt{E}}}-\frac{2\sqrt{E}}{r^{\sqrt{E}+1}}\cdot\right.\\
&\quad\left.\cdot\frac{R_e^{\sqrt{E}-1}-R_i^{\sqrt{E}-1}}{R_e^{2\sqrt{E}}-R_i^{2\sqrt{E}}}(R_eR_i)^{\sqrt{E}+1}\right]K_0\frac{H^2}{6};\\
K_\theta^N &= \left[\frac{1}{r}-(1+A)\frac{r^{A-1}}{R_e^A+R_i^A}-(1-A)\frac{(R_e\cdot R_i)^A}{r^{A+1}(R_e^A+R_i^A)}\right]K_1H,
\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

unde: $E=E_L/E_T$; $K=E_L\left(2\frac{\nu_{LT}}{E_T}-\frac{1}{G_{LT}}\right)$; $H=R_e-R_i$; $A=\sqrt{1+E-K}$;

$$\left.\begin{aligned}
K_0 &= \frac{(1-E)(R_e^{2\sqrt{E}}-R_i^{2\sqrt{E}})}{(R_e^2-R_i^2)(1-E)(R_e^{2\sqrt{E}}-R_i^{2\sqrt{E}})-2(1-\sqrt{E})(R_e^{\sqrt{E}+1}-R_i^{\sqrt{E}+1})^2+}\\
&\qquad +2(1+\sqrt{E})(R_e^{\sqrt{E}-1}-R_i^{\sqrt{E}-1})R_e^2R_i^2;\\
K_1 &= \frac{A(R_e^A+R_i^A)}{\frac{R_e}{\ln R_i}\cdot A\cdot(R_e^A+R_i^A)-2R_e(R_e^A-R_i^A)};\\
K_{r\theta}^N &= +K_r^N;\quad K_{r\theta}^T=+K_r^N;\quad K_\theta^T=-K_\theta^N;\quad K_r^T=-K_r^N.
\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Scanned with OKEN Scanner

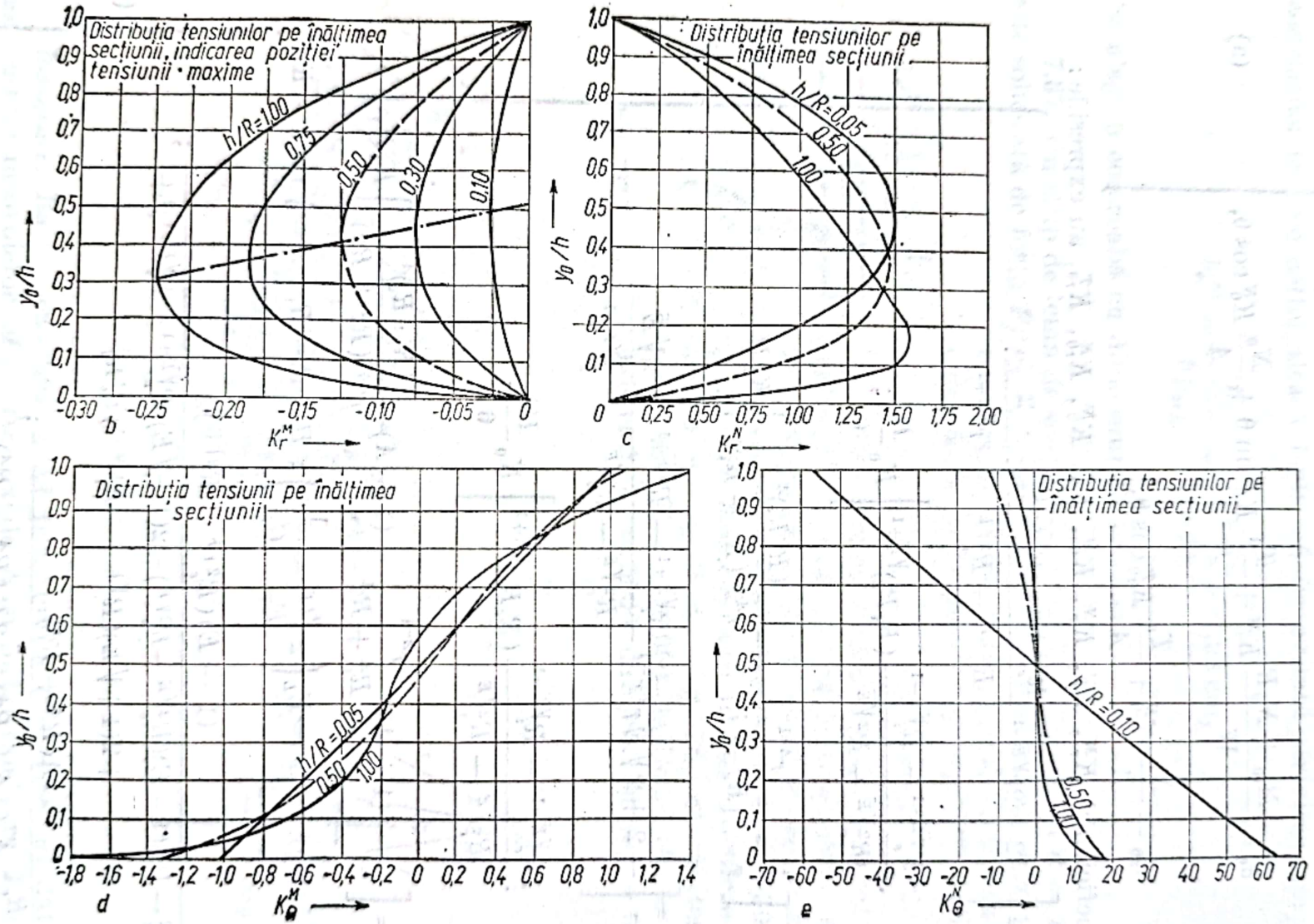

Distribuția tensiunilor pe înălțimea secțiunii, indicarea poziției tensiunii maxime
h/R=1,00
0,75
0,50
0,30
0,10
y0/h
b
Distribuția tensiunilor pe înălțimea secțiunii
h/R=0,05
0,50
1,00
c
Distribuția tensiunii pe înălțimea secțiunii
h/R=0,05
0,50
1,00
d
Distribuția tensiunilor pe înălțimea secțiunii
h/R=0,10
0,50
1,00
e

Fig. 7.88 b...c

Aceste expresii au fost transpuse în grafice (fig. 7.88, *b*, *c*, *d*, *e*; 7.88, *f*...*i* și 7.88, *j*...*m*). Graficele au fost trasate pentru lemnul care are $E_L = 110\,000$ daN/cm²; $E_T = 3000$ daN/cm²; $G_{TL} = 5000$ daN/cm² și $\nu_{TL} = 0{,}013$.

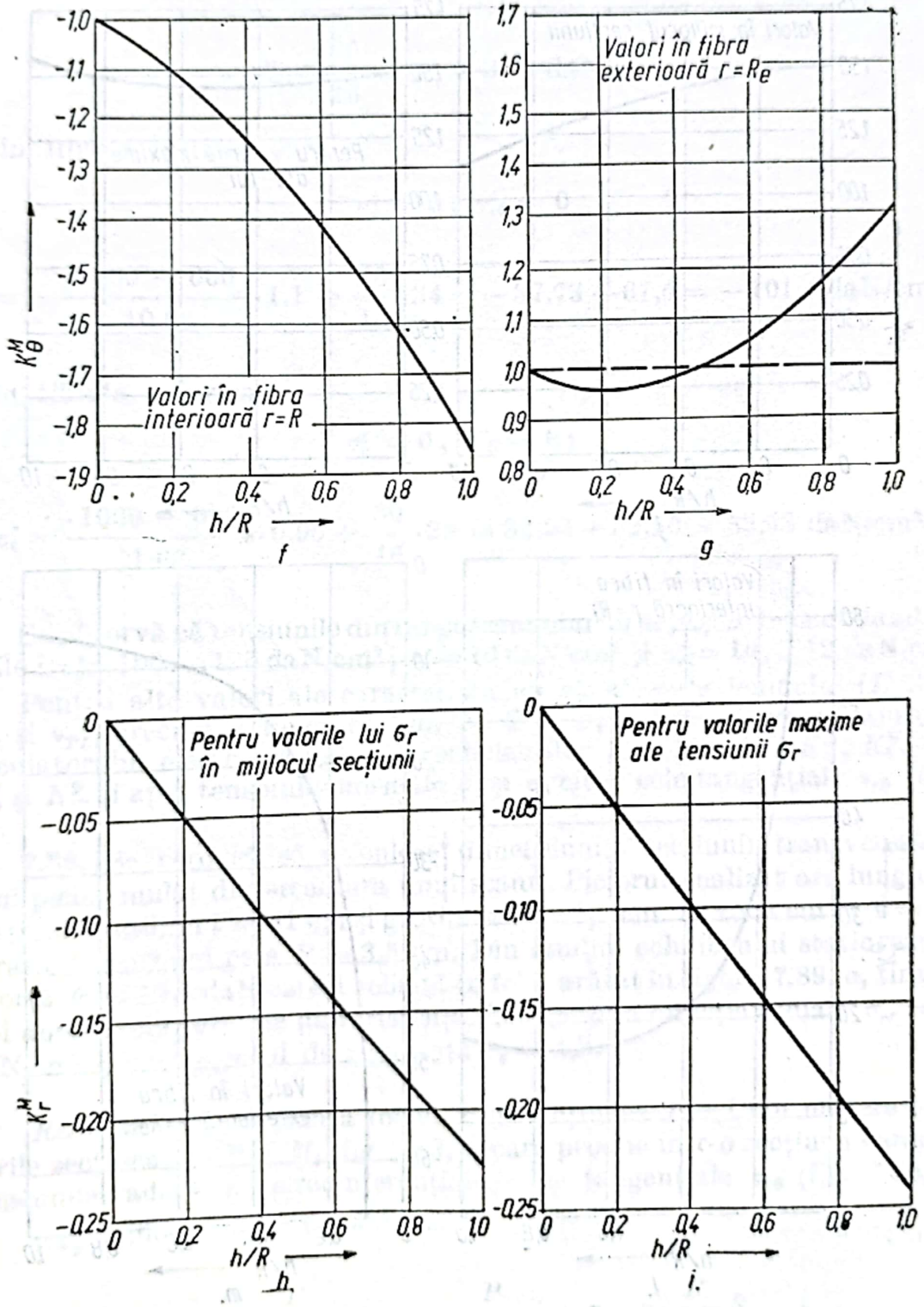


Fig. 7.88 f...i

Pentru cazul analizat raportul h/R fiind $4/20 = 0{,}2$ se obține

$K_r^M = -0{,}05$ (fig. 7.88, *h*), $K_r^N = 1{,}48$ (fig. 7.88, *j*), $K_{\theta i}^M = -1{,}1$ (fig. 7.88, *f*), $K_{\theta e}^M = 0{,}96$ (fig. 7.88 *g*), $K_{\theta i}^N = 34$ (fig. 7.88, *l*) și $K_{\theta e}^N = -28$ (fig. 7.88, *m*) iar $W = bh^2/6 = 4.4^2/6 = 10{,}66$ cm^3, $\theta = 0°$.

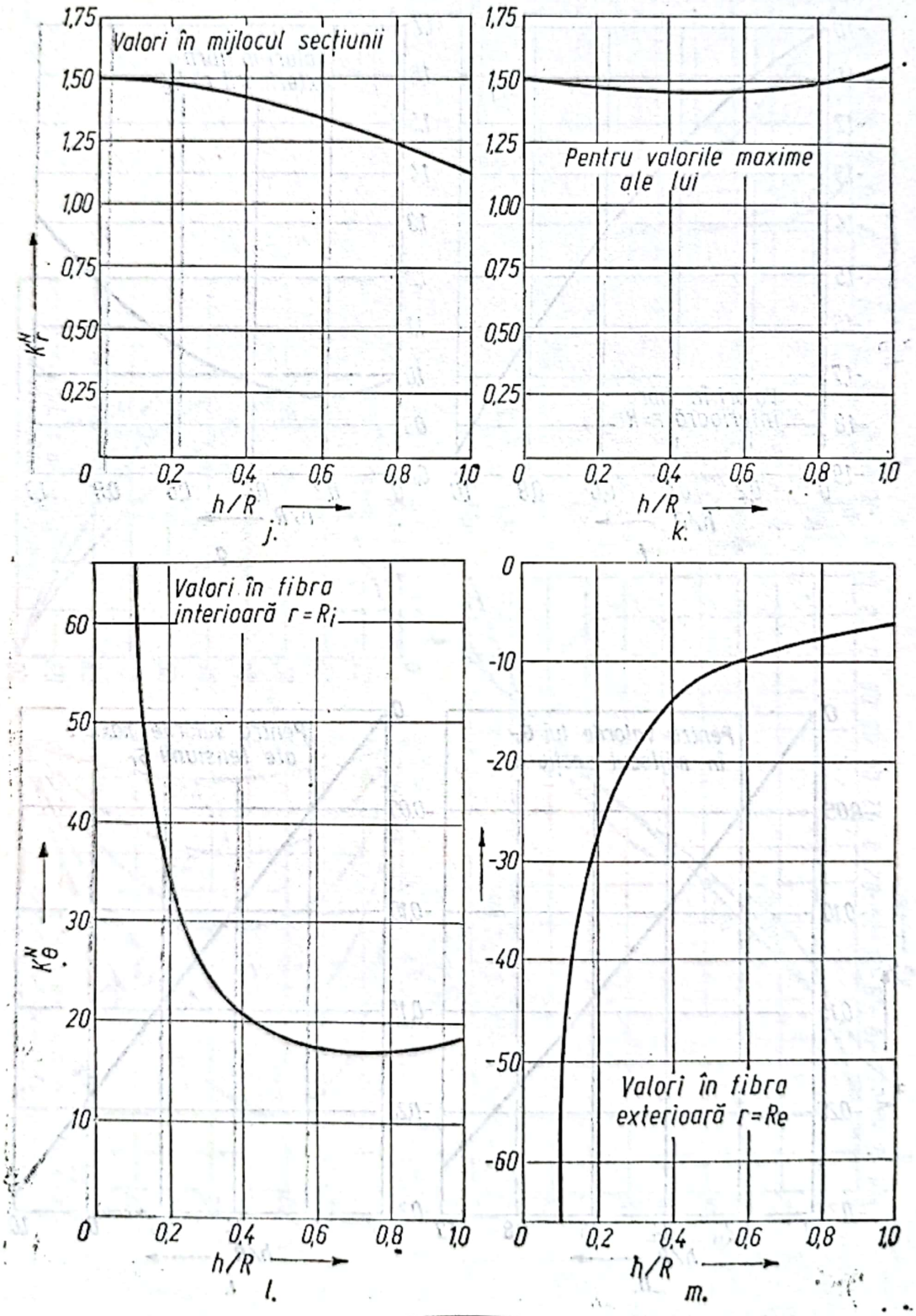


Fig. 7.88 j...m

Conform relaţiilor (a) tensiunile au următoarele valori :
— în mijlocul secţiunii

$$\sigma_r^m = -\frac{1000-600}{10{,}66}\cdot 0{,}05 - \frac{30}{10}\cdot 1{,}48 = -1{,}71 - 2{,}77 = -4{,}48 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\tau_{r\theta}^m = \frac{30}{16}\cdot 1{,}48 = 2{,}77 \text{ daN/cm}^2;$$

— în fibrele interioare

$$\sigma_r^i = 0;\ \tau_{r\theta}^i = 0$$

$$\sigma_\theta^i = -\frac{1000-600}{10{,}66}\cdot 1{,}1 - \frac{30}{16}\cdot 34 = -37{,}73 - 67{,}5 = -101{,}4 \text{ daN/cm}^2;$$

— în fibrele exterioare

$$\sigma_r^e = 0;\ \tau_{r\theta}^e = 0;$$

$$\sigma_\theta^e = \frac{1000-600}{1{,}66}\cdot 0{,}96 + \frac{30}{16}\cdot 28 = 32{,}93 + 52{,}50 = 85{,}43 \text{ daN/cm}^2.$$

Se observă că tensiunile din rama scaunului nu depăşesc tensiunile admisibile : $\sigma_\theta^a = 100\ldots120$ daN/cm² ; $\sigma_r^a = 10$ daN/cm² şi $\tau_{r\theta}^a = 10\ldots12$ daN/cm².

Pentru alte valori ale caracteristicilor elastice ale lemnului (E_T, E_L, G_{TL} şi ν_{TL}) precum şi ale eforturilor N, T şi M_i se pot calcula cu ajutorul calculatorului electronic valorile coeficienţilor K_r^M, K_r^T, K_r^N, K_θ^M, K_θ^N, K_θ^T, $K_{r\theta}^N$ şi $K_{r\theta}^T$ şi apoi tensiunile normale σ_r şi σ_θ cît şi cele tangenţiale $\tau_{r\theta}$ [50].

7.89. Se cere să se calculeze dimensiunile secţiunii transversale a unui picior mulat din structura unui scaun. Piciorul analizat are lungimea porţiunii rectilinii $l = 41$ cm şi grosimea $h = 2{,}1$ cm. În zona curbă $\theta = 80°$ şi raza de curbură este $R = 3{,}5$ cm. Din studiul echilibrului static rezultă o forţă $P = 12{,}5$ daN care îl solicită în felul arătat în figura 7.89, *a*, tinzînd să-i anuleze curbura. Se dă rezistenţa de rupere în direcţie radială $\sigma_{rr} = 56$ daN/cm² şi coeficientul de siguranţă $c_s = 1{,}3$.

Rezolvare. Sub acţiunea forţei P în secţiunea $1-1$ iau naştere eforturile secţionale NT şi M_i (fig. 7.89, *b*) care produc într-o secţiune oarecare tensiunile radiale σ_r, circumferenţiale σ_θ şi tangenţiale $\tau_{r\theta}$ (fig. 7.89, *b*).

Expresiile acestor tensiuni sînt :

$$\sigma_r = \frac{P}{bR_2}S_r;\ \sigma_\theta = \frac{P}{bR_2}S_\theta;\ \tau_{r\theta} = \frac{P}{bR_2}S_{r\theta}, \qquad \text{(a)}$$

Scanned with OKEN Scanner

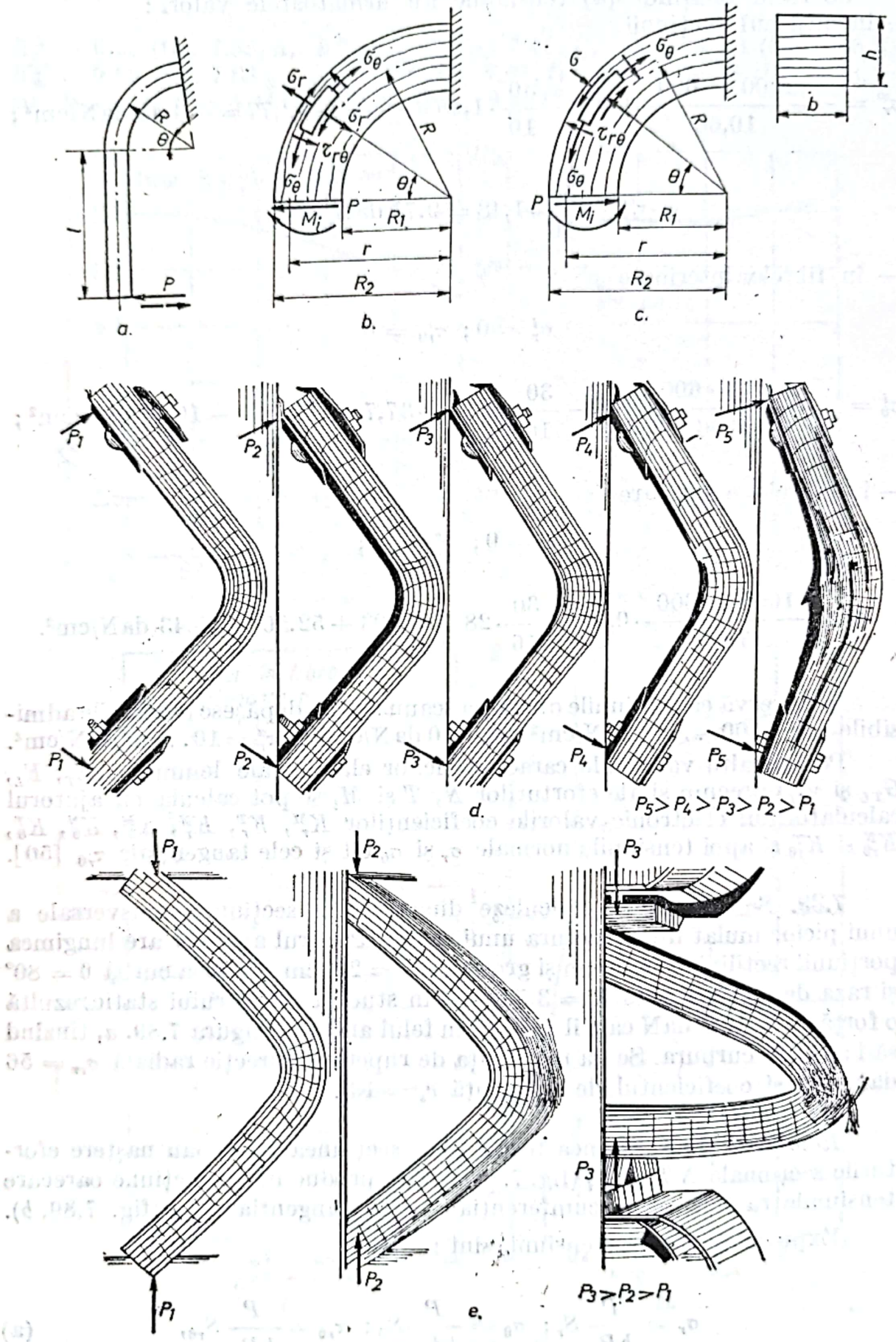


Fig. 7.89 a...e

în care:

$$S_r = \frac{1}{h\lambda^3}[\lambda^4 - (1+\psi_0^2)\lambda^2 + \psi_0^2]\sin\theta + \\ + \frac{4\alpha}{m(1+k)\lambda^2}[\psi_0^2(1-\lambda^2)ln\psi_0 - (1-\psi_0^2)\lambda^2 ln\lambda]; \quad (b)$$

$$S_\theta = -\frac{1}{n\lambda^3}[3\lambda^4 - (1+\psi_0^2)\lambda^2 - \psi_0^2]\sin\theta + \\ + \frac{4\alpha}{m(1+k)\lambda^2}[(1-\lambda^2)\psi_0^2 ln\,\psi_0 + (1-\psi_0^2)(1+ln\,\lambda)\lambda^2] \quad (c)$$

$$S_{r\theta} = -\frac{1}{n\lambda^3}[\lambda^4 - (1+\psi_0^2)\lambda^2 + \psi_0^2]\cos\theta; \quad (d)$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = l/R;\ \psi_0 = \frac{1-k}{1+k};\ k = \frac{h}{2R};\ m = (1-\psi_0^2)^2 - 4\psi_0^2(ln\,\psi_0^2); \\ &n = 1 - \psi_0^2 + (1+\psi_0^2)\,ln\,\psi_0;\ \lambda = \frac{r}{R_2} = \frac{r}{R}\cdot\frac{1}{1+k}; \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

unde b este lățimea secțiunii, în cm;
l — lungimea porțiunii rectilinii, în cm;
R — raza de curbură a fibrei medii, în cm;
R_2 — raza de curbură a fibrei exterioare (cea mai îndepărtată de centrul de curbură), în cm;
R_1 — raza de curbură a fibrei interioare, în cm;
r — raza de curbură a unei fibre curente, unde se calculează tensiunile σ_r, σ_θ și $\tau_{r\theta}$, în cm;
h — înălțimea secțiunii, în cm.

După transformări, relațiile (a) devin:

$$S_r = \frac{\sigma_r b R_2}{P} = \frac{\sigma_r bh(1+k)}{2kP};\ S_\theta = \frac{\sigma_\theta bh(1+k)}{2kP};\ S_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta} bh(1+k)}{2kP}, \quad (f)$$

sau

$$bh\sigma_r = \frac{2kP}{1+k}S_r;\ bh\sigma_\theta = \frac{2kP}{1+k}S_\theta;\ bh\tau_{r\theta} = \frac{2kP}{1+k}S_{r\theta} \quad (g)$$

Analizînd relațiile (a)...(g) se constată că la solicitarea de încovoiere la care există tendința de a îndrepta (dezdoi) elementul mulat (fig. 7.89, *d*) cauza distrugerii acestuia o constituie valorile maxime ale tensiunii radiale σ_r, care sînt de tracțiune și tind să desprindă straturile de furnir, tensiunea σ_{rr} de rupere fiind de circa 50...60 daN/cm². În schimb la solici-

Scanned with OKEN Scanner

tările la care se mărește curbura, respectiv se accentuează deformația elementului mulat (fig. 7.89, *e*) cauza distrugerii o constituie tensiunile normale circumferențiale σ_θ datorită întinderii în direcția fibrelor.

Pentru a înlesni utilizarea relațiilor (f) și (g) în calculele practice de proiectare a diferitelor elemente mulate din furnire, în figurile 7.89, *f*, *g* și *h* se prezintă nomogramele acestor relații pentru cazul particular $P = 10$ daN și $\theta = 30°$. Aceste nomograme au fost trasate pe baza calculelor efectuate pe calculatorul electronic.

Modul de utilizare a nomogramelor este următorul:

— din condițiile constructive se cunosc mărimile l, R, h și θ deci $\alpha = l/R$ și $k = h/2R$;

— în funcție de mărimile α, k și θ se pot determina, utilizînd partea dreaptă a nomogramelor, coeficienții S_r, S_θ și $S_{r\theta}$;

— în funcție de valorile S_r, S_θ și $S_{r\theta}$ și k, din partea stîngă, se pot calcula produsele $hb\sigma_r$, $hb\sigma_\theta$ sau $hb\tau_{r\theta}$;

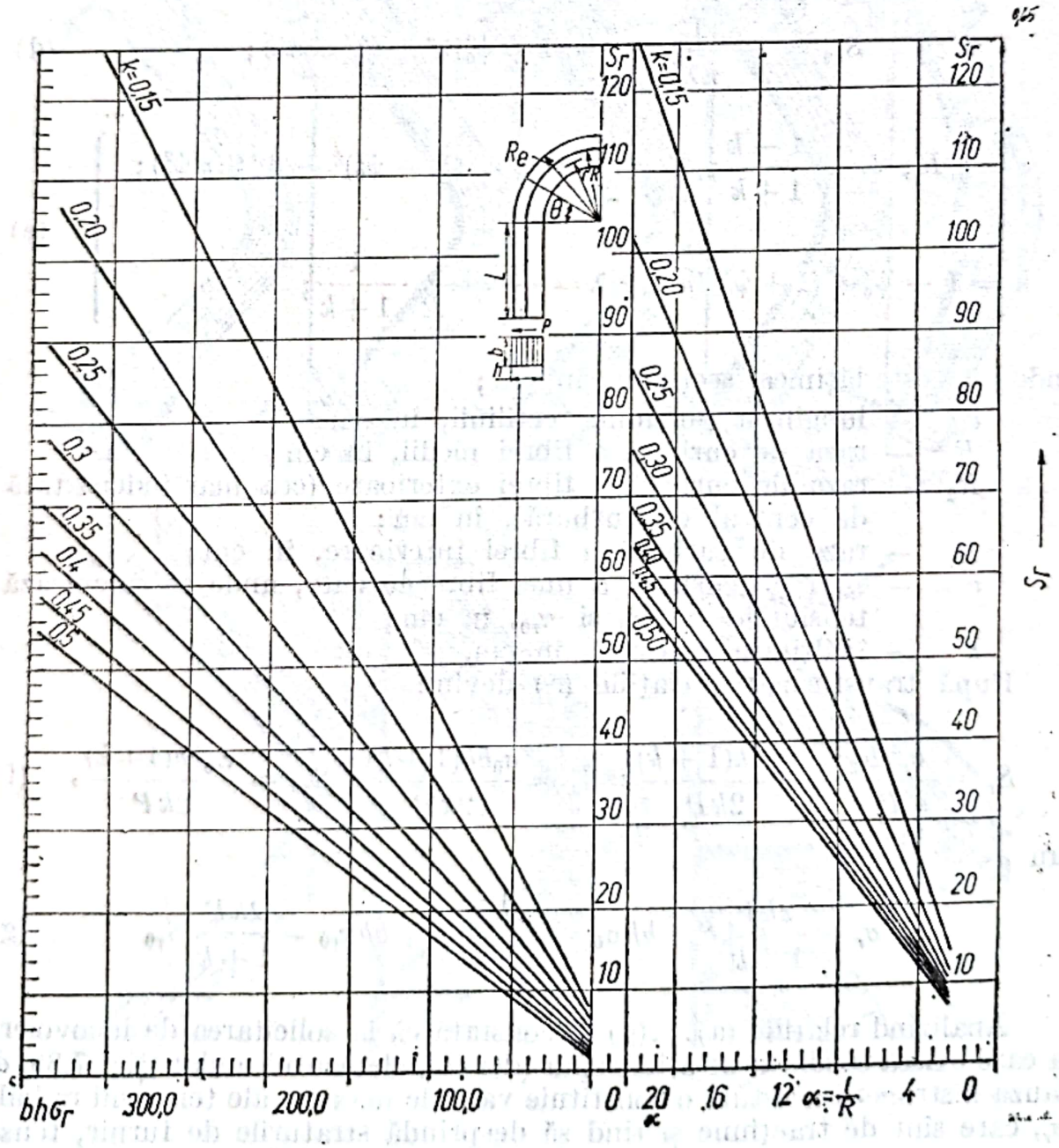


Fig. 7.89 f

— dîndu-se h și b rezultă σ_r, σ_θ sau $\tau_{r\theta}$; sau cunoscînd două dintre ele rezultă a treia.

Deoarece nomogramele au fost construite pentru $P = 10$ daN și $\theta = 30°$, pentru alte valori ale lui θ și P se face corectura în felul următor:

— pentru fiecare 10° peste $\theta = 30°$ mărimea tensiunilor σ_r și σ_θ se mărește sau se micșorează în funcție de valoarea lui k cu următoarele valori:

k	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
S_r	0,60	0,50	0,40	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
S_θ	6,6	3,7	2,3	1,6	1,2	0,9	0,7	0,5

— pentru alte forțe, diferite de $P = 10$ daN, se măresc de atîtea ori valorile $bh\sigma_r$, $bh\sigma_\theta$ și $bh\tau_{r\theta}$, de cîte ori este mai mare forța dată față de 10 daN, spre exemplu $P = 15$ daN și $\theta = 30°$ și din nomograma a reieșit că $bh\tau_{r\theta} = 11$, iar $P/10 = 15/10 = 1{,}5$, deci se multiplică produsul $bh\tau_{r\theta}$ cu 1,5, obținîndu-se $bh\tau_{r\theta} = 16{,}5$; sau $P = 50$ daN, $\theta = 80°$ și $k = 0{,}30$ din nomogramă rezultă $bh\sigma_r = 180$, mărimea reală a produsului va fi

$$(bh\sigma_r)_{real} = \left(180 - \frac{80° - 30°}{10°}\right) \cdot \frac{50}{10} = 178{,}5 \cdot 5 = 892{,}5.$$

În cazul problemei analizate, cauza distrugerii piciorului mulat al scaunului este tensiunea radială $\sigma_r > 0$. Din nomograma din figura 7.89, f pentru $\alpha = l/R = 41/3{,}5 = 11{,}7$ și $k = h/2R = 21{,}1/7 = 0{,}3$ rezultă $S_r = 43$. Pentru unghiul $\theta = 80°$ se face corecția $S_r = 43 + \frac{80° - 30°}{10°} \cdot 0{,}3 = 44{,}5$. Din partea stîngă a nomogramei 7.89, f, pentru $k = 0{,}3$ și $S_r = 44{,}5$ se obține $bh\sigma_r = 205$. Se corectează acest produs cu $P/10 = 12{,}5 = 1{,}25$ și se obține $(bh\sigma_r)_{real}) = 1{,}25 \cdot 205 = 256$. În funcție de tensiunea normală de rupere $\sigma_{rr} = 56$ daN/cm² și coeficientul de siguranță $c_s = 1{,}3$ rezultă tensiunea admisibilă

$$\sigma_{ra} = \frac{\sigma_{rr}}{c_s} = \frac{56}{1{,}3} = 43{,}2 \text{ daN/cm}^2.$$

Știind că $bh\sigma_r = 256$ și $h = 2{,}1$ cm, rezultă

$$b = \frac{256}{2{,}1 \cdot 43{,}2} = 2{,}85 \text{ cm}.$$

În mod asemănător se pot efectua și calculele de verificare.

Scanned with OKEN Scanner

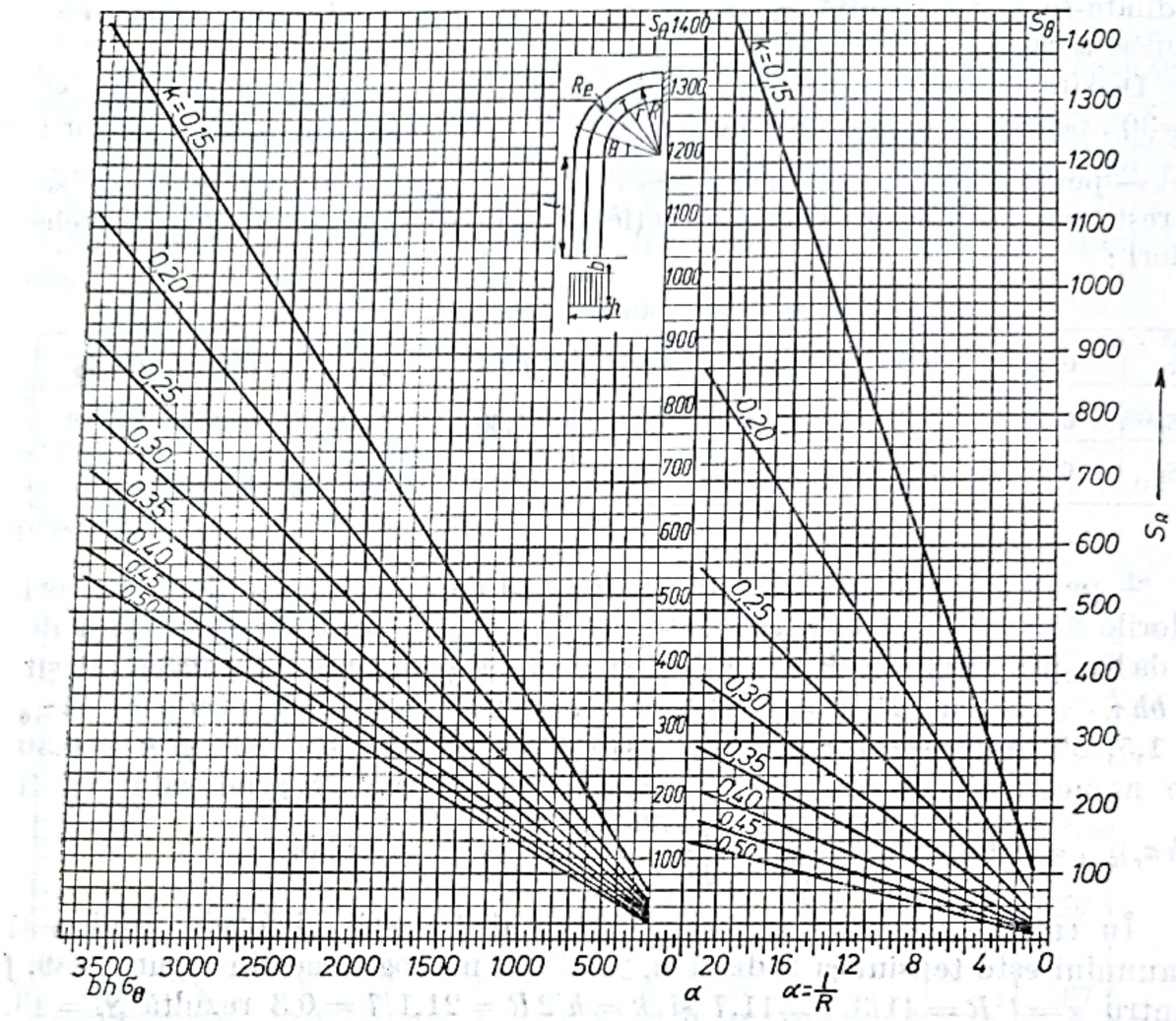


Fig. 7.89 *g*

7.90. Să se stabilească capacitatea portantă a stîlpului din figura 7.90.

Rezolvare. Forţa capabilă este

$$N_{cap} = A\varphi\sigma_{ac},$$

unde

$$A_b = 15.15 = 225 \text{ cm}^2.$$

Stîlpul nu are slăbiri deci :

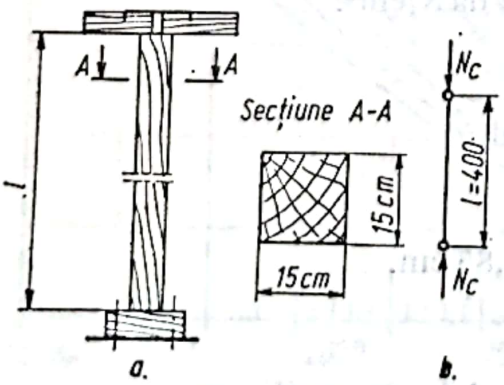


Fig. 7.90

$$A = A_b = 225 \text{ cm}^2; \quad l_f = l = 4{,}00 \text{ m};$$

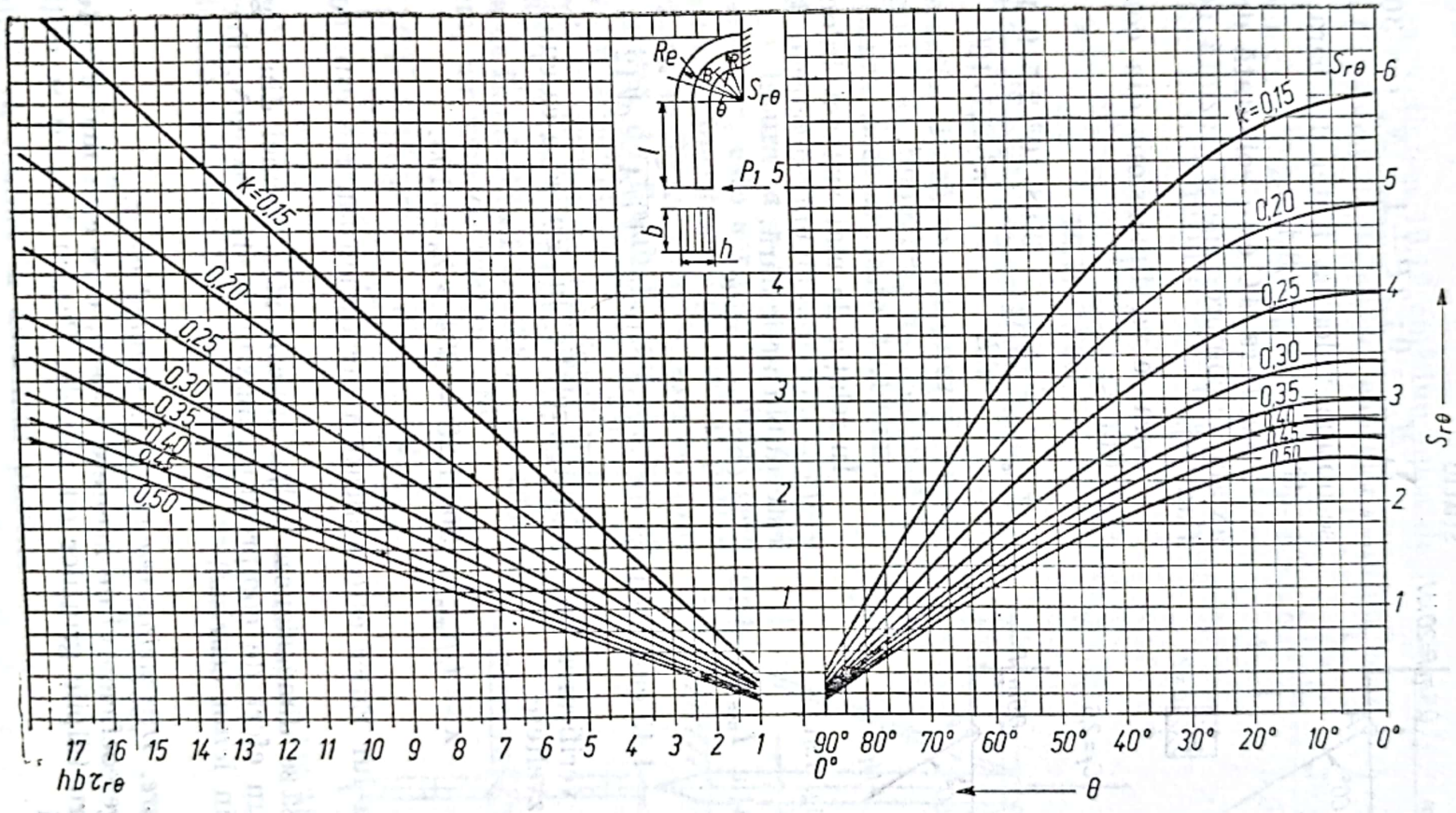
$$i = 0{,}289 \cdot 15 = 4{,}4 \text{ cm şi}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{400}{4{,}4} = 91.$$

Pentru $\lambda = 91$ rezultă $\varphi = 0{,}374$ şi deci

$$N_{cap} = 225 \cdot 0{,}374 \cdot 100 = 8415 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner


Re
$S_{r\theta}$
θ
l
P_1
b
h
k=0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
0,40
0,45
0,50
17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
$hb\tau_{r\theta}$
90° 80° 70° 60° 50° 40° 30° 20° 10° 0°
θ
$S_{r\theta}$
1 2 3 4 5 6

Fig, 7.89 *h*

7.91. Să se dimensioneze bara AC a macaralei de perete din figura 7.91, știind că este confecționată din OL 50 cu $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm² și este de secțiune pătrată.

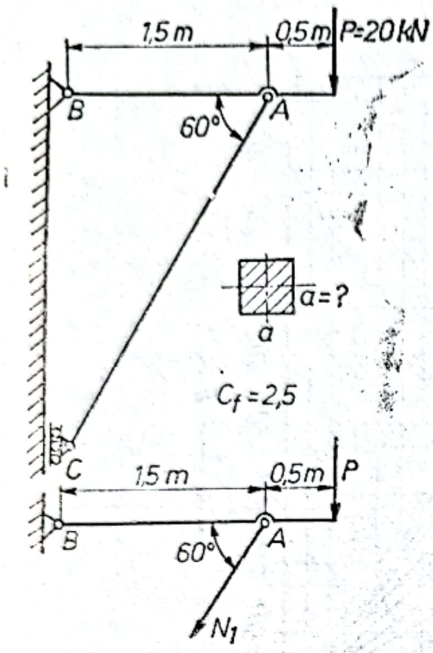


Fig. 7.91

Rezolvare. Din condiția de echilibru static

$$\sum M_B = 0;\ 2P + 1{,}5\ N_1 \cos 30° = 0,$$

se obține valoarea forței din bara AC, respectiv $N_1 = -30{,}8$ kN.

Deci bara AC este solicitată de o forță axială de compresiune și prezintă pericol de flambaj.

Bara se va dimensiona din condiția de stabilitate :

$$I_{nec} = \frac{N_1 c_f l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{3{,}08 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 9 \cdot 10^4}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} \simeq$$

$$\cong 33 \text{ cm}^4.$$

În relația de mai sus s-a înlocuit $l_f = l/\cos 30° = 300$ cm, deoarece bara AC este dublu articulară.

În relația $I_{nec} = a^4/12 = 33$ cm⁴ se obține

$a = \sqrt[4]{33 \cdot 12} = 4{,}45$ cm, iar raza de inerție este $i = \sqrt{I/A} = a\sqrt{12} = 1{,}28$ cm.

Pentru verificarea aplicabilității relației lui Euler se calculează coeficientul de zvelțețe

$$\lambda = l_f / i_{min} = 300/1{,}28 = 234 > \lambda_0 = 105.$$

Deci relația lui Euler este aplicabilă iar dimensionarea este corectă.

7.92. Să se dimensioneze talpa superioară a fermei din figura 7.3 supusă la un efort de compresiune maxim de 17 800 daN. Ferma este realizată din lemn ecarisat.

Rezolvare. Dimensionarea tălpii în panoul 0—2.

Se alege coeficientul de zvelțețe $\lambda = 80$, care este mai mic decît λ_{max} admis pentru tălpile grinzilor cu zăbrele. Pentru $\lambda = 80$ se obține $\varphi = 0{,}484$. Deci

$$A_{nec} = \frac{N}{\varphi \sigma_{ac}} = \frac{17800}{0{,}484 \cdot 100} = 369 \text{ cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se alege o grindă cu dimensiunile 19.19 cm² cu $A_{ef} = 361$ cm²,

$A_{ef} \cong A_{nec}$ (depășirea este mai mică decît 3%).

Verificarea secțiunii rezultate

Pentru secțiunea 19.19 cm² lungimea de flambaj este

$l_f = l$ (panoul de talpă se consideră dublu articulat la noduri);

$l_f = 3{,}85$ m; $i = 0{,}289\ b = 0{,}289.19 = 5{,}5$ cm; $\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{385}{5{,}5} = 70.$

Pentru $\lambda = 70$ rezultă $\varphi = 0{,}608$ și deci

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A\varphi} = \frac{17800}{19.19.0{,}608} =$$

$= 81{,}5$ daN/cm² $< \sigma_{ac} = 100$daN/cm².

Observație. Dacă se micșorează dimensiunile grinzii la 15.19 cm, σ_{ef} depășește σ_{ac} deci secțiunea necesară este 19.19 cm.

7.93. Un stîlp de lemn, avînd secțiunea pătrată cu latura $a = 12$ cm și lungimea liberă $l = 4$ cm, este sprijinită lateral prin 4 contrafișe și încastrat în pămînt la partea inferioară, ca în figura 7.93. Să se determine sarcina critică de flambaj, considerînd că întreaga forță este preluată de stîlp.

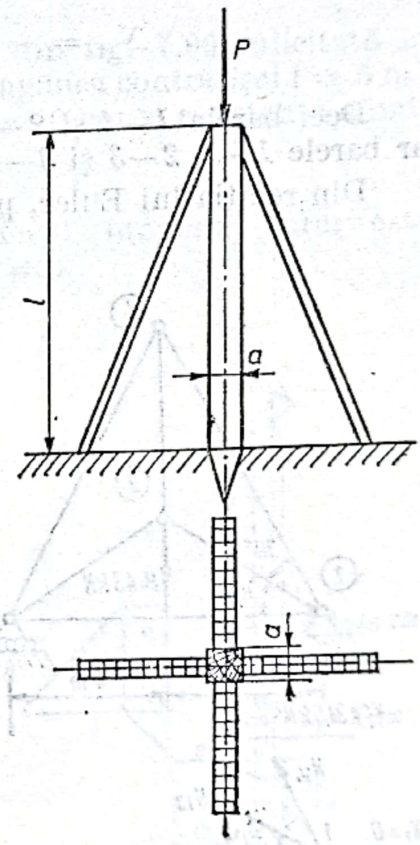


Fig. 7.93

Rezolvare. Stîlpul se consideră articulat la un capăt și încastrat la celălalt. Ca atare lungimea de flambaj va fi $l_f = 0{,}8\ l = 0{,}8.400 =$ $= 320$ cm, iar raza de inerție este

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12\,a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} =$$

$$= 3{,}47 \text{ cm}.$$

Valoarea coeficientului de zvelțețe este

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{320}{3{,}47} = 52{,}51 < \lambda_0 = 100,$$

deci stîlpul va flamba în domeniul plastic.

În acest caz forța critică de flambaj este

$$P_f = \sigma_f A = 114{,}1.144 = 16431 \text{ daN}.$$

În relația de mai sus s-a înlocuit

$$\sigma_f = 293 - 1{,}9\ \lambda = 293 - 1{,}9.52.21 = 114{,}1\ \text{daN/cm}^2.$$

7.94. Barele comprimate ale fermei din figura 7.94 sînt din lemn de secțiune circulară. Se cere să se dimensioneze aceste bare, știind că sarcina se solicită ferma este $P = 43$ kN, iar coeficientul de siguranță la flambaj $c_f = 3$.

Rezolvare. Pentru a putea dimensiona barele de lemn se calculează eforturile din acestea. Se izolează nodul (*1*) și din ecuațiile de echilibru static se obține:

$$N_{14} = -37{,}3\ \text{kN} \text{ și } N_{13} = 21{,}5\ \text{kN}.$$

Deci barele *1—4* și *2—4* sînt supuse la compresiune și pot flamba, iar barele *1—3*, *2—3* și *3—4* la tracțiune.

Din relația lui Euler, pentru barele comprimate, se obține:

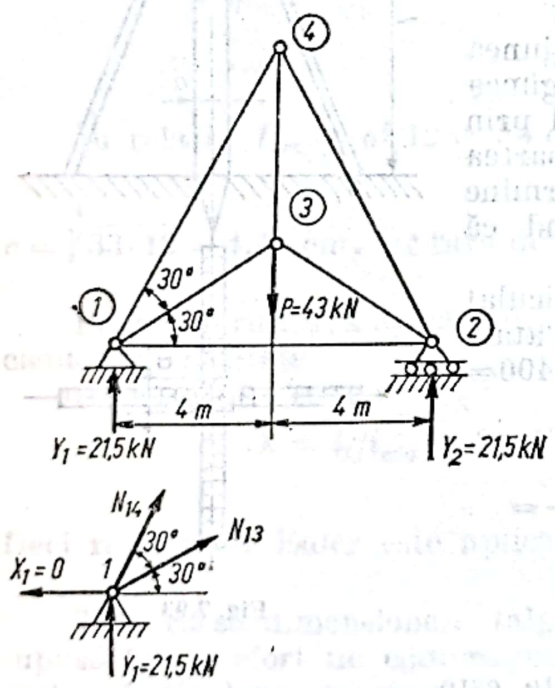


Fig. 7.94

$$I_{nec} = \frac{N_{14} c_f l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{3{,}73.10^3.3{,}8^2.10^4}{\pi^2.10^5} = 7260\ \text{cm}^4.$$

În relația de mai sus s-a înlocuit $l_f = 800$ cm.

Din expresia momentului de inerție

$$I_{nec} = \frac{\pi d^4}{64} \text{ se obține } d = 28 \text{ cm}.$$

Raza de inerție este egală cu

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = \frac{28}{4} = 7\ \text{cm},$$

iar coeficientul de zvelțețe este

$$\lambda = l_f/i = 800/7 = 114{,}2 > \lambda_0 = 100.$$

Dimensiunea obținută este corectă, relația lui Euler fiind aplicabilă în acest caz.

7.95. Să se dimensioneze stîlpii din figura 7.95, *a*, *b* și *c*.

R. a. $b = 12{,}5$ cm; I20; $b = 15{,}5$ cm; c. $D = 22$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

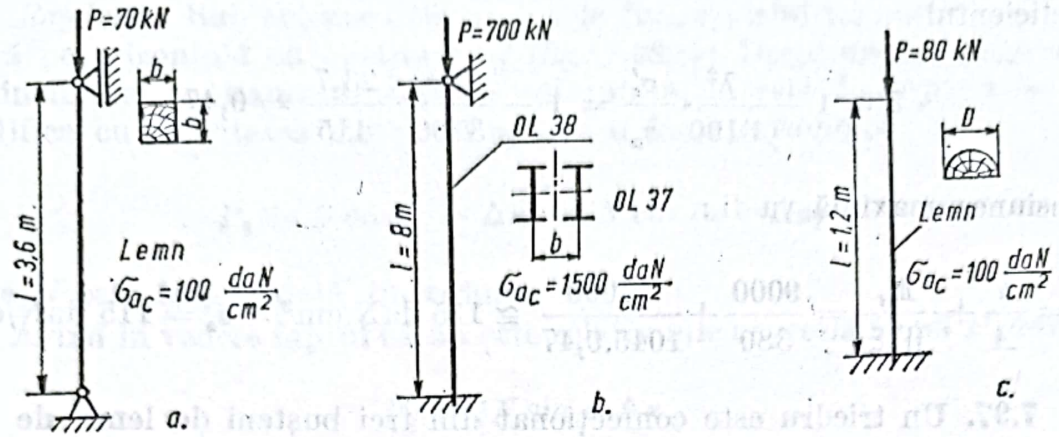


Fig. 7.95.

7.96. Să se verifice secțiunea contrafișei din fig. 7.96 solicitată la compresiune excentrică $N = 90$ kN. Se dau : lungimea contrafișei $l = 5$ m ; diametrul $d = 22$ cm ; adîncimea pragului $h_p = 10$ cm și rezistența admisibilă $\sigma_a = 115$ daN/cm².

Rezolvare. Valoarea secțiunii de la mijlocul lungimii barei este $A = 380$ cm². Modulul de rezistență are valoarea

$$W_z = 1045 \text{ cm}^3.$$

Raza de inerție este

$$i = 0{,}25\ d = 0{,}25.22 = 5{,}5 \text{ cm}.$$

Coeficientul de subțirime este egal cu

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{500}{5{,}5} = 91.$$

Se determină excentricitatea, luînd aproximativ distanța de la centrul de greutate al segmentului pînă la fibra extremă, egală cu $\frac{2}{5} h_p$, deci

$$e = \frac{d}{2} - \frac{3}{5} h_p = 11 - \frac{3}{5} \cdot 10 = 5 \text{ cm}.$$

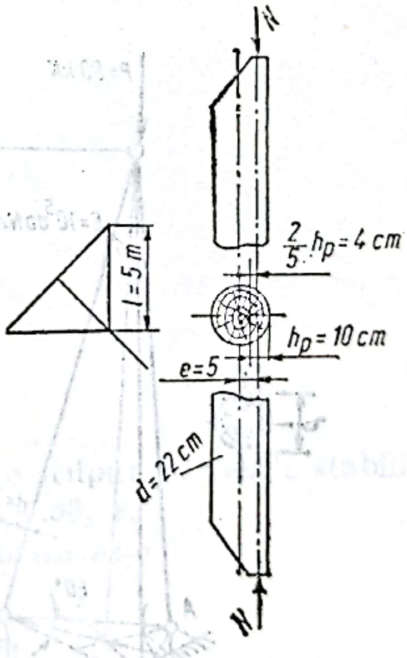


Fig. 7.96

Momentul încovoietor este egal cu

$$M_i = N_e = 9000.5 = 45000 \text{ daN.cm}.$$

Tensiunea datorită compresiunii este

$$\sigma_c' = \frac{N}{A} = \frac{9000}{380} = 23{,}7 \text{ daN/cm}^2.$$

Coeficientul

$$\xi = 1 - \frac{\lambda^2}{3100}\frac{\sigma_c'}{\sigma_a} = 1 - \frac{91^2}{3100}\cdot\frac{23{,}7}{115} = 0{,}47.$$

Tensiunea maximă va fi :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{W_z\xi} = \frac{9000}{380} + \frac{45000}{1045.0{,}47} \cong 115 \text{ daN/cm}^3 = \sigma_a = 115 \text{ daN/cm}^2.$$

7.97. Un triedru este confecționat din trei bușteni de lemn de diametru $d = 30$ cm (fig. 7.97) și solicitat de forța $P = 80$ kN. Știind că barele triedrului flambează în domeniul elastic se cere să se calculeze cît de mare trebuie să fie lungimea l pentru ca sistemul să-și piardă stabilitatea?

R. $l = 950$ cm.

7.98. Un stîlp de ancorare a unui funicular este fixat cu ajutorul unui tirant *1*, care poate fi tensionat cu ajutorul unui sistem șurub-piuliță *2*, (fig. 7.98, *a*). Se consideră că tirantul trece peste capătul stîlpului

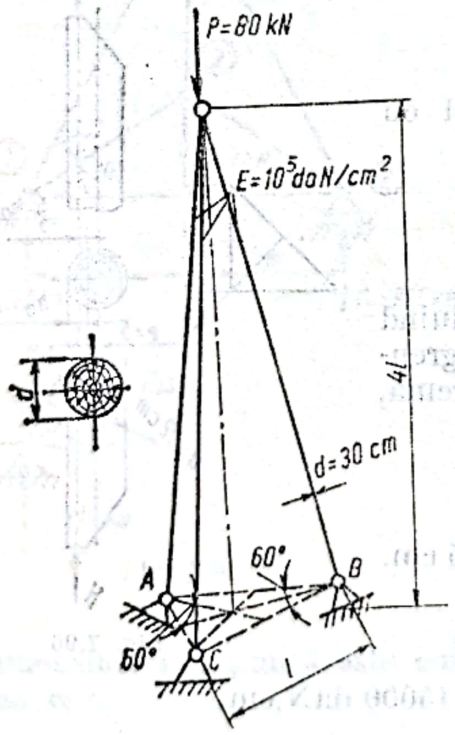


Fig. 7.97

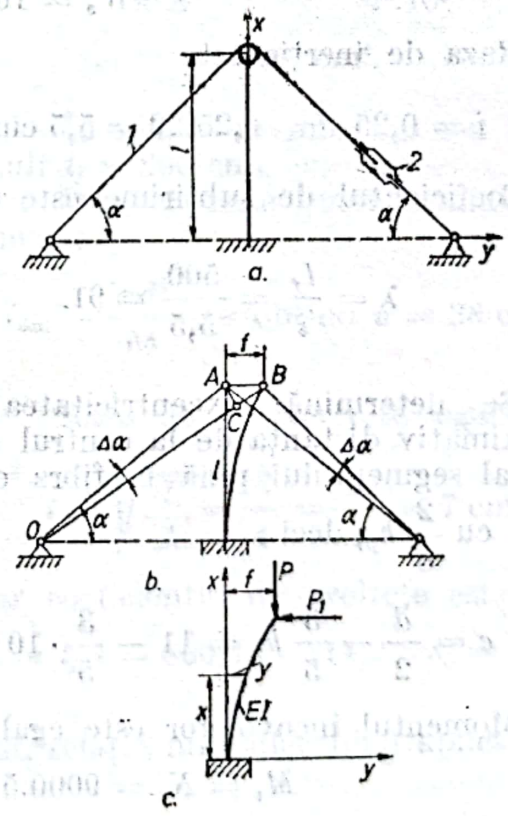


Fig. 7.98

fără frecare. Fie P forța produsă în stîlp de tirantul *1*. Se cere să se determine mărimea forței P pentru care stîlpul își pierde stabilitatea.

Rezolvare. Sub acțiunea tirantului de fixare vîrful stîlpului se deplasează pe orizontală cu cantitatea f (fig. 7.98, *b*). Drept urmare unghiul α de înclinare a tirantului față de orizontală, în cele două părți se va modifica cu cantitatea $\Delta\alpha$ și va apărea o forță orizontală

$$P_1 = N\cos(\alpha - \Delta\alpha) - N\cos(\alpha + \Delta\alpha)$$

unde N este forța axială din tirant.

Avînd în vedere faptul că $\Delta\alpha$ este relativ mic expresia forței P_1 devine

$$P_1 \cong 2N\sin\alpha\cdot\Delta\alpha,$$

dar

$$2N\sin\alpha = P,$$

și deci

$$P_1 = P\Delta\alpha.$$

Din considerații geometrice, din ΔABC, rezultă

$$OA\cdot\Delta\alpha = f.\sin\alpha,$$

dar

$$OA = \frac{l}{\sin\alpha}$$

și deci

$$\Delta\alpha = \frac{f}{l}\sin^2\alpha,$$

și ca urmare forța orizontală este

$$P_1 = P\frac{f}{l}\sin^2\alpha.$$

Pentru a determina forța critică P_{cr} la care stîlpul își pierde stabilitatea se consideră stîlpul solicitat ca în figura 7.98, *c*.

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate este

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_i}{EI},$$

unde momentul încovoietor are expresia

$$M_i = -P(f-y) + P_1(l-x) = -P(f-y) + P\frac{f}{l}\cdot\sin^2\alpha(l-x).$$

Ca urmare se poate scrie

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = EIy'' = P(f - y) - P\frac{f}{l}(l - x)\sin^2\alpha.$$

Soluția acestei ecuații diferențiale neomogene de ordinul doi are forma

$$y = A\sin\beta x + B\cos\beta x + f - \frac{f}{l}(l - x)\sin^2\alpha.$$

unde $\beta^2 = P/EI$.

Din condițiile

$$x = 0 \to y = 0;\ x = 0 \to y' = 0 \text{ și } x = l \to y = f$$

se obțin ecuațiile:

$$B + f\cos^2\alpha = 0;$$

$$\beta A + \frac{f}{l}\sin^2\alpha = 0;$$

$$A\sin\beta l + B\cos\beta l = 0,$$

care duc la ecuația transcendentă

$$\operatorname{tg}\beta l = -\beta l\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Din ecuația de mai sus se obține βl care depinde de unghiul α și ca urmare forța critică P_{cr} depinde și ea de unghiul α.

Pentru unghiuri mai mici rezultă

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

caz ce corespunde forței critice de flambaj, a unui stîlp încastrat la un capăt și liber la celălalt, iar pentru $\alpha = \pi/2$ se obține $kl = \pi$ și

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

7.99. Să se dimensioneze stîlpul de lemn al structurii din figura 7.99, *a*, care este încărcat cu reacțiunea $N = 8900$ daN, din ferma cu zăbrele și care este supus la acțiunea vîntului ($g_v = 70$ daN/m²) aferent pe traveea de 3 m. Secțiunea stîlpului nu are slăbiri în zona de moment maxim [32].

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Sarcinile ce solicită stîlpul sînt :

— forţa axială $N = 8900$ daN ;

— presiunea vîntului $p_v = kg_v = 0{,}8.70 = 56$ daN/m² (k este coeficientul aerodinamic şi conform STAS 946/71, pentru astfel de construcţii se ia egal cu 0,8).

Presiunea vîntului pe unitatea de lungime este

$$p_{vl} = 56 \text{ daN/m}^2.3 \text{ m} =$$

$$= 168 \text{ daN/m}.$$

Momentul încovoietor produs de p_{vl} este

$$M_{i\,max} = \frac{p_{vl} \cdot H^2}{8} =$$

$$= \frac{168.3{,}5^2}{8} = 257{,}3 \text{ daN} \cdot$$

$$\cdot \text{m} = 2{,}573.10^4 \text{ daN.cm}.$$

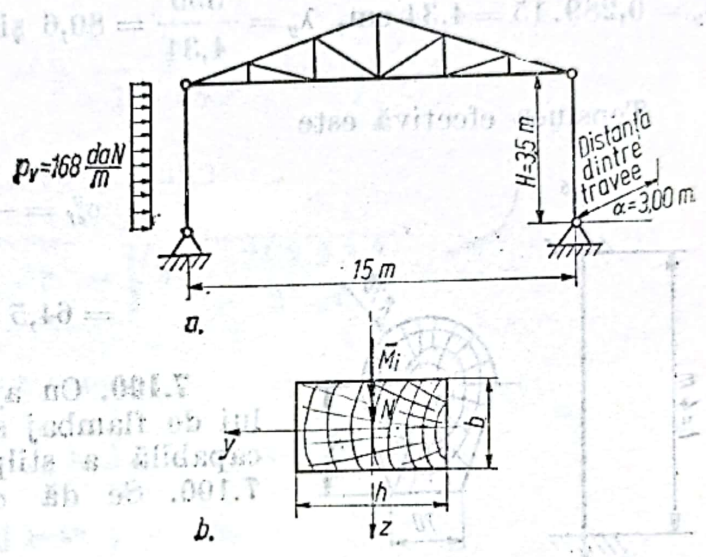


Fig. 7.99

Solicitarea după axa Oz.

După axa Oz stîlpul este solicitat la compresiune cu încovoiere. Calculul se face prin încercări. Adică se propune dimensiunile secţiunii care apoi se verifică. Astfel, se propun 15.19 cm². Pentru această secţiune

$A_{brut} = A_{net} = 15.19 = 285$ cm² (nefiind slăbiri ale secţiunii) ;

$$W_{z\,net} = W_{z\,brut} = \frac{15.19^2}{6} = 902 \text{ cm}^3 ; \quad i_z = 0{,}289.19 = 5{,}49 \text{ cm} ;$$

$l_{fz} = l = 3{,}50$ m (bara este dublu articulară) ; $\lambda_z = \frac{l_{fz}}{i_z} = \frac{350}{5{,}49} = 63{,}8$;

$$\sigma_c^{ef} = \frac{N}{A_{net}} = \frac{8800}{285} = 30{,}8 \text{ daN/cm}^2.$$

Tensiunea maximă din stîlp este

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{net}} = \frac{M_{i\,max}}{\xi W_{z\,net}} = \frac{8800}{285} + \frac{25730}{0{,}596.902} = 30{,}8 + 47{,}7 = 78{,}5 \text{ daN/cm}^2.$$

În relaţia de mai sus s-a luat coeficientul ξ egal cu

$$\xi = 1 - \frac{\lambda_z^2}{3100} \cdot \frac{\sigma_c^{ef}}{\sigma_{ac}} = 1 - \frac{63{,}8^2}{3100} \cdot \frac{30{,}8}{100} = 0{,}596.$$

Observaţie. Dacă s-ar fi considerat secţiunile 12.19 cm² şi 15.15 cm² s-ar fi obţinut tensiuni maxime care ar fi depăşit rezistenţele admisibile.

Solicitarea după axa Oy.

În raport cu această axă stîlpul este solicitat la compresiune centrică deci poate să-şi piardă stabilitatea.

Pentru secţiunea aleasă 15.19 cm² se calculează

$$i_y = 0{,}289 \cdot 15 = 4{,}34 \text{ cm}, \quad \lambda_y = \frac{350}{4{,}34} = 80{,}6$$

şi din tabele rezultă $\varphi = 0{,}477$

Tensiuea efectivă este

$$\sigma_{ef}^{y} = \frac{N}{\varphi_y A} = \frac{8800}{0{,}477 \cdot 285} =$$

$$= 64{,}5 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} \text{ [32]}.$$

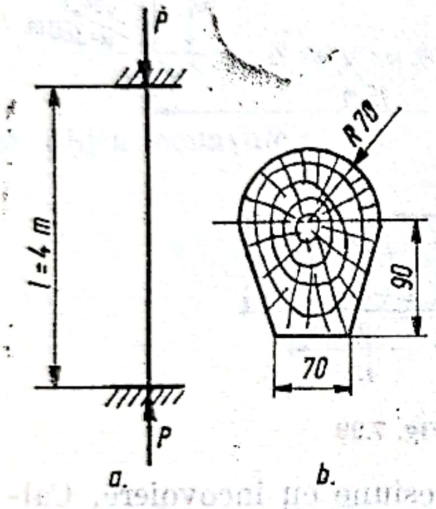


Fig. 7.100

7.100. Cu ajutorul metodei coeficientului de flambaj se cere să se calculeze forţa capabilă a stîlpului de lemn din figura 7.100. Se dă $\sigma_{ac} = 100$ daN/cm².

R. $P = 56{,}9$ kN.

7.101. Să se verifice stabilitatea unui pachet de bare, comprimat centric, compus din 3 scînduri, avînd dimensiunile 7.24 cm fiecare (fig. 7.101). Efortul $N = 250$ kN. Lungimea barei $l = 3$ m. Bara este fixată la capete prin articulaţii. Pe lungimea barei sînt aşezate 80 cuie care au $d = 5{,}5$ mm şi $l = 175$ mm. Distanţa transversală între şirurile de cuie nu întrece 7 grosimi ale fiecărei scînduri în parte. Rezistenţa admisibilă este $\sigma_{ac} = 90$ daN/cm²

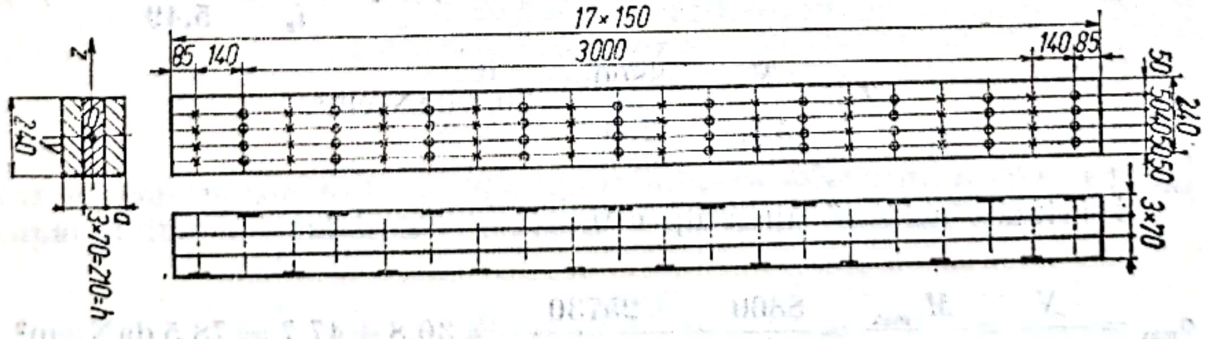


Fig. 7.101

Rezolvare. Suprafaţa secţiunii transversale este $A = bh = 3 \cdot 7{,}24 = 504$ cm². La verificarea stabilităţii barei în raport cu axa $y - y$ se poate renunţa, deoarece $(b > h)$.

Verificarea stabilităţii barei în raport cu axa Oz.

Raza de inerţie este $i_z = 0{,}289 \cdot 21 = 6{,}06$ cm.

Coeficientul de subțirime (fără să se țină seama de cedarea legăturii) este

$$\lambda_m = \frac{l_f}{i_z} = \frac{300}{6{,}06} = 49{,}5.$$

Numărul mediu de secțiuni de forfecare ale legăturilor (ale cuielor $d = 5{,}5$ mm) pe toată lungimea barei, în fiecare rost:

$$n_{ta} = l\frac{b}{10d^2} = 3.\ \frac{24}{10.0{,}55^2} = 23{,}8 \text{ buc.}$$

Coeficientul de sporire a subțirimii:

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{hn_r\ n_{ta}}{l^2 n_i}} = \sqrt{1 + \frac{21.2{,}2.3{,}8}{3^2.80}} = 1{,}55.$$

Coeficientul de subțirime sporit:

$$\lambda_i = \mu\lambda_m = 1{,}55.49{,}5 = 76{,}8.$$

Coeficientul de flambaj este $\varphi = 0{,}53$.
Tensiunea normală

$$\sigma_c = \frac{N}{\varphi A} = \frac{25000}{504.0{,}53} = 93{,}6 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_{ac} = 90 \text{ daN/cm}^2.$$

Depășirea rezistenței admisibile este sub 5% și ca atare se admite.

Așezarea legăturilor.
Se așază 20 șiruri transversale de cuie, cîte 4 cuie pe un rînd. Distanța de la capătul barei se ia $s_1 = 15d = 8{,}25$ cm $\cong 10$ cm.
Distanța între șirurile transversale ale cuielor este

$$s_2 = \frac{300 - 2 \cdot 10}{20 - 1} = 14{,}7 \text{ cm.}$$

Se iau (fig. 7.101) 17 interspații medii de cîte 15 cm, interspațiile extreme de cîte 14 cm și distanța de la rîndul extrem la capăt 8,5 cm. Distanța între cuie, în lungul axului barei nu întrece 7 grosimi ale fiecărui element în parte.

Distanța între cuie, transversal fibrelor, se fixează: cele mijlocii la 4 cm, iar restul cîte 5 cm, ceea ce este mai mult decît cea minimă admisibilă ($4d = 2{,}2$ cm).

7.102. Să se dimensioneze diagonala și montantul din nodul 9 al grinzii cu zăbrele din figura 7.102, știind că sînt supuse la compresiune și realizate din dulapi [32].

Rezolvare. Pentru diagonala 8—9 secțiunea se alege din doi dulapi $20 \cdot 3{,}8$ cm² ce se caracterizează prin:

$i_{min} = 0{,}289 \cdot 3{,}8 = 1{,}1$ cm; $l_f = l_D$ 461cm (fiind dublu articulată la capete);

$$\lambda_{ef} = l_f / i_{min} = 461/1{,}1 = 420 > \lambda_{adm} = 175.$$

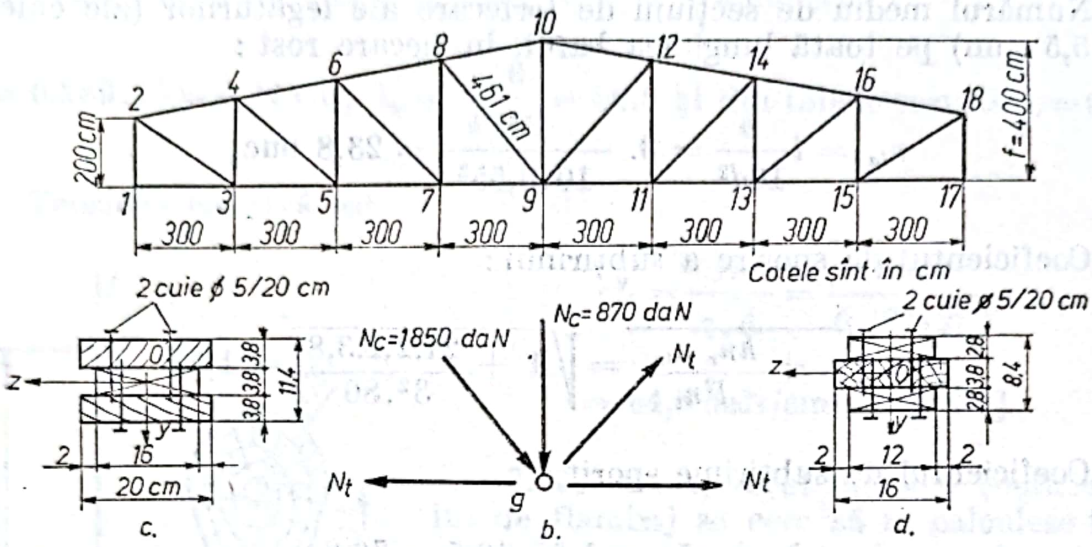


Fig 7.102

Datorită faptului că $\lambda_{ef} > \lambda_{adm}$ diagonala se realizează ca o bară compusă introducînd între cele două elemente o furură continuă 16.3,8 cm² (fig. 7.102, *c*), care se fixează cu cuie de diametru de 5 mm și amplasate la 20 cm.

În raport cu axa *Oz* bara lucrează ca o secțiune compusă și se face o verificare la flambaj, respectiv

$$\sigma_z^{ef} = \frac{N}{A\varphi_z^{tr}} \leqslant \sigma_{ac},$$

în care $N = 1850$ daN (fig. 7.102, *a*); *a*); $A = 2 \cdot 3{,}8 \cdot 20 = 152$ cm²;

$\varphi_z^{tr} = fc\lambda_z^{tr}$); $\lambda_z^{tr} = \mu_0 l_f / i_z$; $l_f = 461$ cm; $i_z = \sqrt{I_z/A}$; $I_z = \frac{2 \cdot 20 \cdot 3{,}8^3}{12} +$

$+ 20 \cdot 3{,}8 \cdot 2 \cdot 3{,}8^2 + \frac{16 \cdot 3{,}8^3}{12} = 2377 + 73 = 2450$ cm⁴; $i_z = \sqrt{2450/152} =$

$= 4{,}02$ cm; $\lambda_z = 461/4{,}02 = 115$;

$$\mu_0 = \sqrt{1 + k_0 \frac{blr}{l_f^2 n_0}} = \sqrt{1 + \frac{1}{10 \cdot 0{,}5^2} \cdot \frac{20 \cdot 11{,}4 \cdot 2}{4{,}61^2 \cdot 10}} = 136,$$

căci $k_0 = \frac{1}{10 \cdot d^2}$;

$$\lambda_z = \mu_0 \lambda_z = 1{,}36 \cdot 115 = 157 < \lambda_{adm} = 175;$$

pentru $\lambda_z^{tr} = 157$ rezultă $\varphi_z^{tr} = 0{,}126$.

Scanned with OKEN Scanner

După înlocuiri se obține

$$\sigma_z^{ef} = \frac{1860}{0{,}126 \cdot 152} = 16{,}6 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

În raport cu axa *Oy* tensiunea normală este

$$\sigma_y^{ef} = \frac{N}{\varphi_y A} \leqslant \sigma_{ac},$$

unde $A = 152$ cm²; $N = 1850$ daN; $\varphi_y = f(\lambda_y)$; $\lambda_y = l_f/i$; $I_y = 461$cm;

$$I_z = \frac{2 \cdot 3{,}8 \cdot 20^3}{12} + \frac{3{,}8 \cdot 16^3}{12} = 5080 + 1300 = 6380 \text{ cm}; \; i_y = \sqrt{I_y/A} =$$

$\sqrt{6380/152} = 6{,}45$ cm;

$\lambda_z = 461/45 = 72{,}5 < \lambda_{adm} = 175$; pentru $\lambda_y = 72{,}5$ rezultă $\varphi = 0{,}579$.

După înlocuiri se obține

$$\sigma_y^{ef} = \frac{1850}{152 \cdot 0{,}579} = 21{,}2 < \sigma_{ac} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Din cele prezentate rezultă că diagonala 8—9 este bine dimensionată.

Montantul 9—10 având lungimea mare se alcătuiește dintr-un dulap 3,8 · 16 cm solidarizat cu două eclise 2,8 · 12 cm (fig. 7.102, d); prinderea se face cu cuie de 5 mm diametru amplasate la 20 cm distanță.

În raport cu axa *Oz* bara lucrează ca o secțiune compusă și verificarea se face cu relația:

$$\sigma_z^{ef} = \frac{N}{\varphi_z A} \cong \sigma_{ac},$$

în care $N = 870$ daN; $A = 16 \cdot 3{,}8 = 60{,}8$ cm²; $\varphi_z^{tr} = f(\lambda_z^{tr})$;

$\lambda_z^{tr} = \mu\lambda_z$; $\lambda_z = l_f/i_z$; $i_z = \sqrt{I_z/A}$;

$$I_z = \frac{20 \cdot 3{,}8^3}{12} + 2 \cdot \frac{12 \cdot 3{,}8^3}{12} + 2 \cdot 12 \cdot 2{,}8 \cdot 3{,}3^2 = 867 \text{ cm}^4;$$

$i_z = \sqrt{867/60{,}8} = 3{,}76$ cm; $\lambda_z = 400/3{,}76 = 106$;

$$\mu_0 = \sqrt{1 + \frac{bhr}{l_f^2 n_0}} = \sqrt{1 + \frac{1}{10 \cdot 0{,}5^2} \frac{16 \cdot 9{,}4 \cdot 2}{4^2 \cdot 10}} = 1{,}325;$$

$\lambda_z^{tr} = 1{,}325 \cdot 106 = 141 < \lambda_{adm} = 175$;

pentru $\lambda_z^{tr} = 141$ rezultă $\varphi_z^{tr} = 0{,}156$.

Scanned with OKEN Scanner

După înlocuiri se obține

$$\sigma_z^{ef} = \frac{870}{60{,}8 \cdot 0{,}156} = 92 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

În raport cu axa *Oy* făcînd o verificare identică se obține

$$\sigma_z^{ef} = 26{,}1 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

7.103. Să se dimensioneze stîlpii structurii de rezistență din figura 7.103, *a* supuși la compresiune. La confecționarea stîlpilor se folosesc dulapi cu dimensiunile 4,8 · 20 cm². Pentru dimensionare se iau în considerare două variante posibile: bare pachet (fig. 7.103, *b*) sau bară cu fururi scurte (fig. 7.103, *c*).

Rezolvare. În cazul secțiunii stîlpului pachet acesta este realizat din patru dulapi 4,8 · 20 cm solidarizați cu buloane de diametru 12 mm amplasate la 20 cm distanță (fig. 7.103, *b*).

Stîlpul fiind supus la compresiune este posibil să flambeze. În raport cu axa *Oy* verificarea stabilității stîlpului se realizează cu relația

$$\sigma_y^{ef} = \frac{N}{\varphi_y A} \leqslant \sigma_{ac},$$

unde $N = 6250$ daN; $A = 20 \cdot 19{,}20 = 384$ cm²; $i_y = 0{,}289 \cdot 19{,}2 = 5{,}55$ cm; $l_f = l = 400$ cm (stîlpul fiind dublu articulat); $\lambda_y = l_f/i_y = 400/5{,}55 = 72$.

Coeficientul de zvelțețe echivalent (transformat) al barei compuse este

$$\lambda_y^{tr} = \mu_0 \lambda_y,$$

unde μ_0 este un coeficient de majorare a zvelțeței barei compuse datorită cedării solidarizărilor și se stabilește cu relația [32]

$$\mu_0 = \sqrt{1 + k_0 \frac{bhr}{l_f^2 n_e}},$$

în care b este dimensiunea secțiunii transversale a barei, paralelă cu rosturile, în cm; h — dimensiunea secțiunii transversale perpendiculare pe rosturi; în cm; l_f — lungimea de flambaj a barei, în m; n_e — numărul efectiv de secțiuni de forfecare ale elementelor de îmbinare, pe metru de lungime de rost; r — numărul rosturilor de-a lungul cărora elementele de îmbinare, deformîndu-se pot permite lunecarea reciprocă a elementelor componente ale barei; k_0 — un coeficient ce depinde de tipul îmbinării și este $k_0 = \frac{1}{10d^2}$ la îmbinările cu cuie; $k_0 = \frac{1}{3\ d^2}$ la îmbinările cu dornuri și șuruburi de oțel și $k_0 = \frac{1}{1{,}5\ d^2}$ la îmbinările cu dornuri de stejar.

Scanned with OKEN Scanner

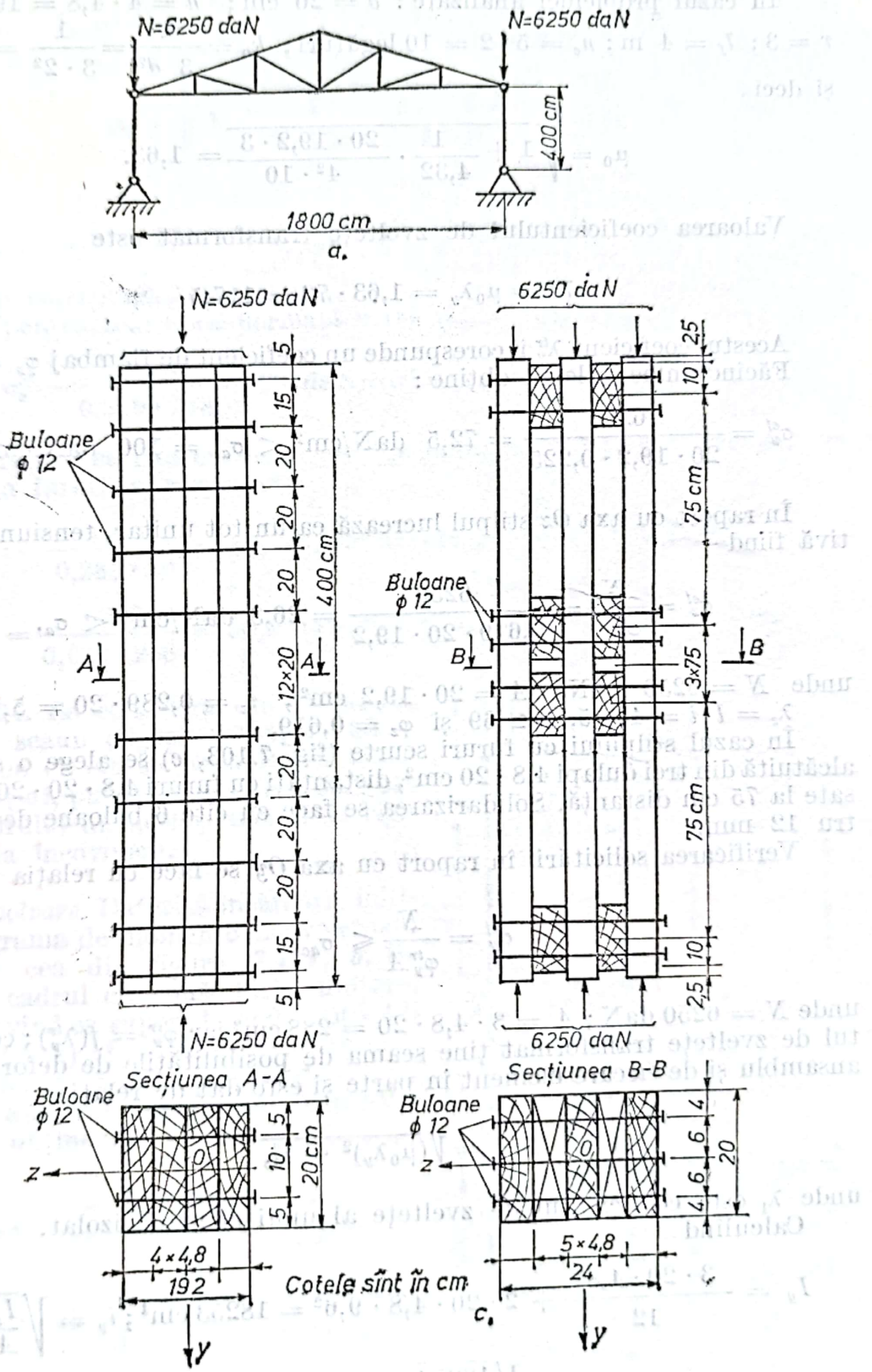


Fig. 7.103

Scanned with OKEN Scanner

În cazul problemei analizate : $b = 20$ cm ; $h = 4 \cdot 4{,}8 = 19{,}2$ cm, $r = 3$; $l_f = 4$ m ; $n_e = 5 \cdot 2 = 10$ legături ; $k_0 = \frac{1}{3\ d^2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = 1/4{,}32$, și deci

$$\mu_0 = \sqrt{1 + \frac{1}{4{,}32} \cdot \frac{20 \cdot 19{,}2 \cdot 3}{4^2 \cdot 10}} = 1{,}63.$$

Valoarea coeficientului de zvelteţe transformat este

$$\lambda_y^{tr} = \mu_0 \lambda_y = 1{,}63 \cdot 72 = 117{,}5.$$

Acestui coeficient λ_y^{tr} îi corespunde un coeficient de flambaj $\varphi_y = 0{,}225$. Făcînd înlocuirile se obţine :

$$\sigma_y^{ef} = \frac{6250}{20 \cdot 19{,}2 \cdot 0{,}225} = 72{,}5 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

În raport cu axa *Oz* stîlpul lucrează ca un tot unitar, tensiunea efectivă fiind

$$\sigma_z^{ef} = \frac{N}{\varphi_z A} = \frac{6250}{0{,}619 \cdot 20 \cdot 19{,}2} = 26{,}3 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a,$$

unde $N = 6250$ daN ; $A = 20 \cdot 19{,}2$ cm² ; $i_z = 0{,}289 \cdot 20 = 5{,}78$ cm ; $\lambda_z = l/i = 400/5{,}79 \cong 69$ și $\varphi_z = 0{,}619$.

În cazul stîlpului cu fururi scurte (fig. 7.103, *c*) se alege o secţiune alcătuită din trei dulapi $4{,}8 \cdot 20$ cm², distanţaţi cu fururi $4{,}8 \cdot 20 \cdot 20$ amplasate la 75 cm distanţă. Solidarizarea se face cu cîte 6 buloane de diametru 12 mm.

Verificarea solicitării în raport cu axa *Oy* se face cu relaţia

$$\sigma_y^{ef} = \frac{N}{\varphi_y^{tr} A} \leqslant \sigma_{ac},$$

unde $N = 6250$ daN ; $A = 3 \cdot 4{,}8 \cdot 20 = 288$ cm² iar $\varphi_y^{tr} = f(\lambda_y^{tr})$; coeficientul de zvelteţe transformat ţine seama de posibilităţile de deformare de ansamblu şi de fiecare element în parte şi este dat de relaţia

$$\lambda_y^{tr} = \sqrt{(\mu_0 \lambda_y)^2 + \lambda_1^2},$$

unde λ_1 este coeficientul de zvelteţe al unui element izolat.

Calculînd

$$I_y = \frac{3 \cdot 20 \cdot 4{,}8^2}{12} + 2 \cdot 20 \cdot 4{,}8 \cdot 9{,}6^2 = 18253 \text{ cm}^4 ; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} =$$

$$\sqrt{\frac{18253}{288}} = 7{,}97 \text{ cm} ;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\lambda_y = \frac{l_f}{i_y} = \frac{400}{7{,}97} = 50{,}2\,;\quad \lambda_1 = \frac{75}{0{,}289 \cdot 4{,}8} = 54{,}1\,;$$

$$\mu_0 = \sqrt{1 + \frac{1}{3 \cdot 1{,}2^2} \cdot \frac{20 \cdot 24 \cdot 4}{4^2 \cdot 8}} = 2{,}11,$$

rezultă

$$\lambda_y^{tr} = \sqrt{(2{,}11 \cdot 50{,}2)^2 + 54{,}1^2} = 119,$$

căruia îi corespunde $\varphi_y^{tr} = 0{,}219$,
rezultă pentru tensiunea normală maximă

$$\sigma_y^{ef} = \frac{6250}{0{,}219 \cdot 288} = 99 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

În raport cu axa Oz verificarea stîlpului se face fără a ține cont de existența fururilor, respectiv

$$\lambda_z = \frac{400}{0{,}289 \cdot 20} = 69, \text{ căreia îi corespunde } \varphi_z = 0{,}619\,;$$

$$\sigma_y^{ef} = \frac{6250}{0{,}619 \cdot 288} = 35{,}1 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 100 \text{ daN/cm}^2 \quad [32]$$

7.104. Se consideră cadrul lateral al unui scaun (figura 7.104, *a*). Să se determine cu cît se apropie, în urma deformației, punctele *A* și *B*. Toate barele cadrului au același modul de rigiditate la încovoiere.

Rezolvare. Datorită încărcării inițiale diagrama de momente încovoietoare M_i este cea din figura 7.104, *b*. Se încarcă cadrul cu două forțe unitare, opuse, avînd ca suport bara dreaptă *AB* (fig. 7.104, *c*) și se trasează diagrama de momente m_i (fig. 7.104, *d*).

Cu ajutorul regulei lui Vereșceaghin se obține :

$$\Delta_{A+B} = \sum \frac{\Omega_i \cdot m_{iGK}}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{3} \cdot 2pa^2 \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2}a = \frac{16\sqrt{2}\,pa^4}{3EI}.$$

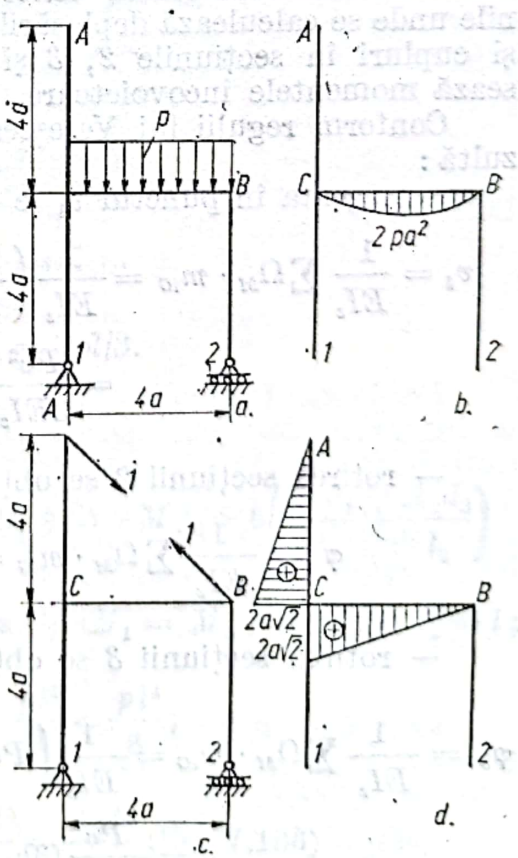


Fig. 7.104

7.105. Pentru încercările experimentale referitoare la îmbinările de

colț în lemn (fig. 7.105, *a*) se utilizează epruvete, ce sînt solicitate ca în figura 7.105, *b*. Ca elemente caracteristice ale rigidității îmbinării se consideră săgeata v_4 și rotirile φ_2, φ_3 și φ_4. Știind că epruvetele au modulul de rigiditate la încovoiere $EI_z = \text{const.}$, se cere să se calculeze v_4, φ_2, φ_3 și φ_4.

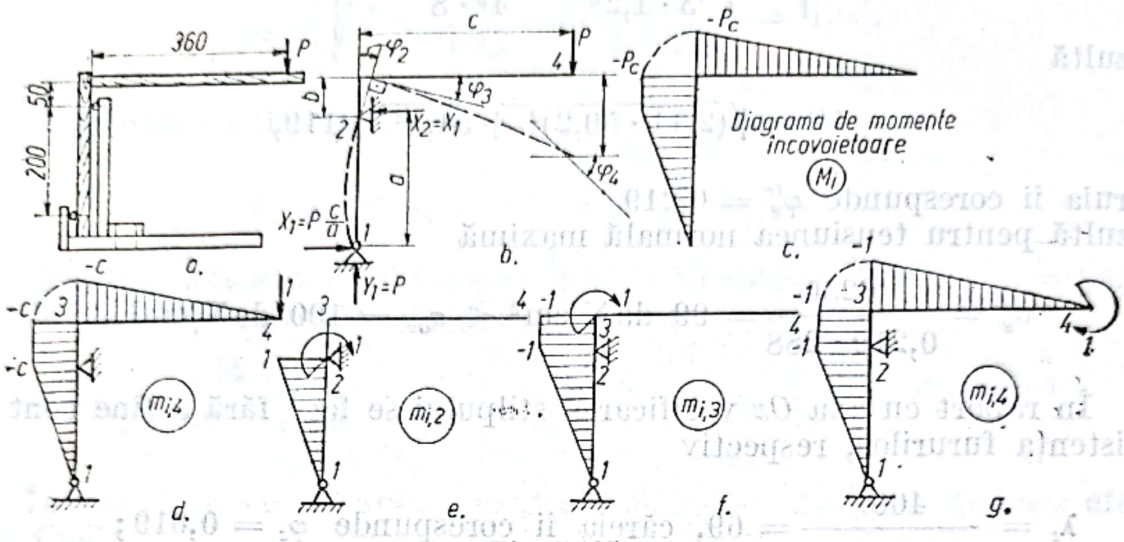


Fig. 7.105

Rezolvare. Pentru a determina săgeata v_4, rotirile φ_2, φ_3 și φ_4 se utilizează regula lui Vereșceaghin. Pentru aceasta se trasează diagrama de momente încovoietoare M datorită sarcinii P (fig. 7.105, *c*) și în secțiunile unde se calculează deplasările se pun sarcini unitare, forțe în punctul 4 și cupluri în secțiunile *2*, *3* și *4* (fig. 7.105, *d*...*g*), pentru care se trasează momentele încovoietoare.

Conform regulii lui Vereșceahghin, de înmulțire a diagramelor, rezultă:

— săgeata în punctul v_4 se obține înmulțind diagramele M_i și $m_{i;4}$:

$$v_4 = \frac{1}{EI_z}\sum \Omega_M \cdot m_{iG} = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}Pc^2 \cdot \frac{2}{3}c + Pc \cdot bc + \frac{1}{2}Pca \cdot \frac{2}{3}c\right) =$$

$$= \frac{Pc^2}{3EI_z}(c + 3b + a);$$

— rotirea secțiunii *2* se obține înmulțind diagramele M_i și $m_{i;2}$:

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI_z}\sum \Omega_M \cdot m_{iG} = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}Pca \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{Pca}{3EI_z};$$

— rotirea secțiunii *3* se obține înmulțind diagramele M_i și $m_{i;3}$;

$$\varphi_3 = \frac{1}{EI_z}\sum \Omega_M \cdot m_{iG} = \frac{1}{EI_z}\left(Pc \cdot b \cdot 1 + \frac{1}{2}Pca \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{Pc}{EI_z}\left(b + \frac{a}{3}\right) =$$

$$= \frac{Pc}{3EI_z}(3b + a) = \varphi_2 + \frac{Pcb}{EI_z};$$

Scanned with OKEN Scanner

— rotirea secțiunii 4 se obține înmulțind diagramele M_i și $m'_{4;4}$:

$$\varphi_4 = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}Pc^2 \cdot 1 + Pcb \cdot 1 + \frac{1}{2}Pca \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{Pc}{6EI_z}(3c + 6b + 2a) =$$

$$= \varphi_3 + \frac{Pc^2}{2EI_z}.$$

7.106. O stivă se sprijină pe trei rînduri de podvale peste care este așezată o grindă de lemn confecționată dintr-un buștean de 20 cm diametru (fig. 7.106). Se cere să se calculeze care trebuie să fie tasarea podvalului B astfel încît sub acțiunea sarcinii uniform distribuite $p = 10$ kN/m reacțiunile din cele trei podvale (reazeme) să fie egale.

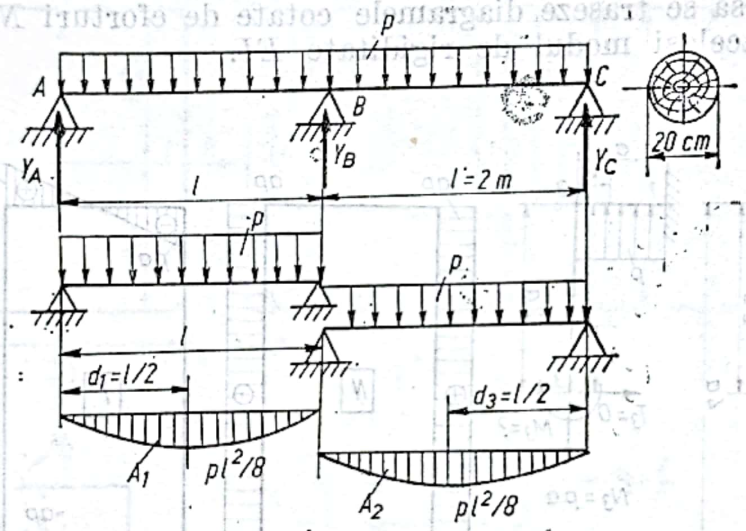


Fig. 7.106

Rezolvare. Valoarea celor trei reacțiuni este

$$Y_A = Y_B = Y_C = 2pl/3.$$

Înlocuind în ecuația lui Clapeyron

$$6EI_z\left(\frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2}\right) = Ml + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 6\left(\frac{A\,d_1}{l_1} + \frac{A_2 d_3}{l_2}\right)$$

pe $v_1 = v_3 = 0$ (căci $1 \equiv A$; $2 \equiv B$ și $3 \equiv C$), $M_1 = M_3 = 0$; $l_1 = l_2 = l$;

$$M_2 = M_B = Y_A l - \frac{pl^2}{2} = \frac{pl^2}{6};$$

$$\frac{A_1 d_1}{l_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot l \cdot \frac{l}{2l} = \frac{pl^3}{24} = \frac{A_2 d_3}{l_2} \text{ (fig. 7.106)}$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține

$$6EI_z\left(\frac{v_B}{l}+\frac{v_B}{l}\right)=\frac{2pl^2}{6}(l+l)+\frac{6pl^3}{12},$$

de unde rezultă

$$v_B=\frac{7pl^4}{72\,EI_z}=\frac{7\cdot 10\cdot 200^4}{72\cdot 10^5\cdot 7854}=1{,}98\text{cm}\cong 2\text{cm}.$$

În relația de mai sus s-a înlocuit $p=10$ kN/m $=10$ daN/cm, $l=200$ cm, $E=10^5$ daN/cm^2 și $I_z=\pi d^4/64=\pi\cdot 20^4/64=7854$ cm^4.

7.107. Pentru cadrul unei prese (fig. 7.107) se cere să se ridice nedeterminarea și să se traseze diagramele cotate de eforturi NTM_i. Barele cadrului au același modul de rigiditate EI.

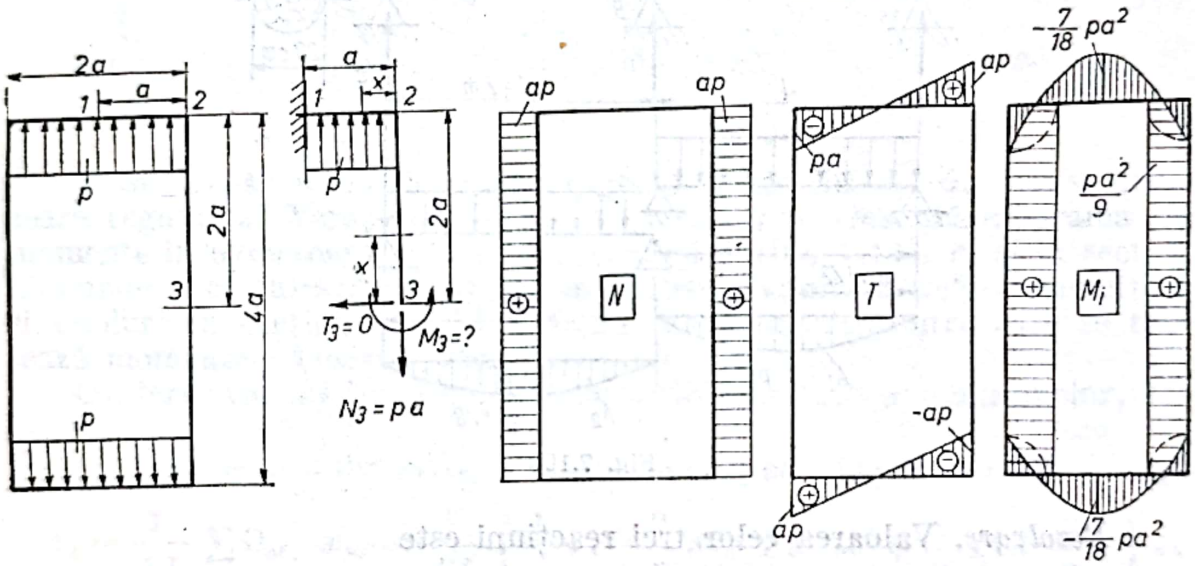


Fig. 7.107

Rezolvare. Datorită simetriei de construcție și de solicitare cadrul se deformează simetric și, ca atare, studiul se poate face numai pe un sfert de cadru. Astfel, în punctul 3, eforturile din cadru sînt: $N_3=pa$; $T=0$ și $M_3=?$. Rămîne o singură necunoscută M_3, cadrul este simplu static nedeterminat interior. Pentru determinarea valorii momentului încovoietor M_3 se are în vedere că în axa de simetrie rotirea, respectiv

$$\varphi_3=\frac{\partial L}{\partial M_3}=\frac{1}{E}\int M_i\frac{\partial M_i}{\partial M_3}\,dx=0.$$

Expresiile momentului încovoietor M și ale derivatelor parțiale pe porțiunile $3-2$ și $2-1$, sînt:

$$M_{32}=M_3;\ \frac{\partial M_{32}}{\partial M_3}=1;\quad M_{21}=M_3-pax+\frac{px^2}{2};\ \frac{\partial M_{21}}{\partial M_3}=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste valori se obține

$$\int_0^{2a} M_3 \mathrm{d}x + \int_0^a \left(M_3 - pax + P\,\frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = 0, \text{ de unde rezultă } M_3 = pa^2/9 \text{ iar } M_1 = -\frac{7}{18}\,pa^2.$$

7.108. Cadrele din structura mobilei pot fi solicitate ca în figura 7.108, *a*, *b* și *c*. Se cere să se ridice nedeterminarea și să se calculeze eforturile N_2, M_i și M_2. Totodată se va calcula variația distanțelor dintre punctele *1—1* și *2—2*.

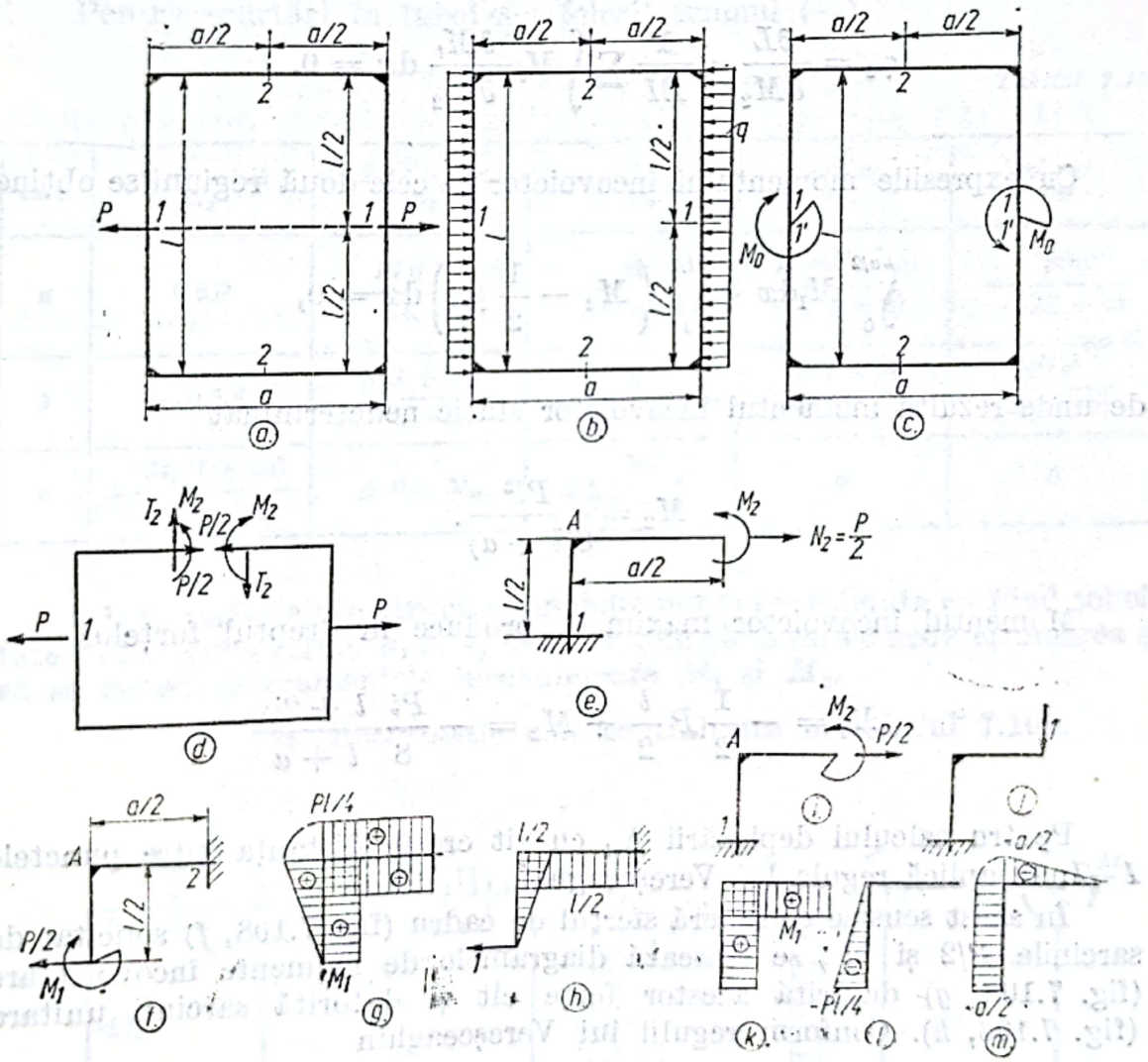


Fig. 7.108

Rezolvare. Pentru cadrul din figura 7.108, *a* se secționează în axa de simetrie una din bare și se pun în evidență eforturile existente, spre exemplu în secțiunea *2*.

Datorită stării simetrice de solicitare, nu pot exista în axa de simetrie eforturi cu caracter antisimetric. Rezultă că este necesar ca $T_1 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Din condiția de echilibru a eforturilor pe o jumătate de cadru delimitat de planul de simetrie orientat perpendicular pe suportul forțelor, rezultă $N_1 = 0{,}5\ P$ (fig. 7.108, *d*). Datorită simetriei este suficient să se studieze numai modul de deformare a unui sfert de cadru, izolat prin secționări în planele de simetrie (fig. 7.108, *e*). Se figurează în secțiunea *2*, forța axială $N_2 = P/2$ și momentul încovoietor static nedeterminat M_2.

Prin încastrarea sfertului de cadru nu se schimbă starea de solicitare a acestuia.

Rotirea φ_2 a fibrei medii în dreptul necunoscutei M_2 este egală cu zero.

Ecuația de echilibru elastic este

$$\varphi_2 = \frac{\partial L}{\partial M_2} = \frac{1}{EI} \sum \int M_i \frac{\partial M_i}{\partial M_2} \, dx = 0.$$

Cu expresiile momentului încovoietor pe cele două regiuni se obține

$$\int_0^{a/2} M_1 dx + \int_0^{l/2} \left(M_2 - \frac{1}{2} px \right) dx = 0,$$

de unde rezultă momentul încovoietor static nedeterminat

$$M_2 = \frac{Pl^2}{8(l + a)}.$$

Momentul încovoietor maxim se produce în dreptul forțelor

$$M_1 = -\frac{1}{2} P \frac{l}{2} + M_2 = -\frac{Pl}{8} \frac{l + 2a}{l + a}$$

Pentru calculul deplasării Δ_{11} cu cît crește distanța între punctele *1—1*, se aplică regula lui Vereșceaghin.

În acest sens se consideră sfertul de cadru (fig. 7.108, *f*) solicitat de sarcinile $P/2$ și M_1, se trasează diagramele de momente încovoietoare (fig. 7.108, *g*) datorită acestor forțe cît și datorită sarcinii unitare (fig. 7.108, *h*). Conform regulii lui Vereșceaghin

$$\Delta_{11} = 2 \frac{1}{EI} \left[M_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + M_i \frac{a}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{Pl}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{Pl^3}{96EI_z} \cdot \frac{l + 4a}{l + a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod asemănător pentru calculul deplasării Δ_{22} cu cît scade distanța $2-2$ se consideră un sfert de cadru (fig. 7.108, *i*) solicitat de forțele $P/2$ și M_2 precum și de o sarcină unitară pe direcția deplasării căutate (fig. 7.108, *j*). Se trasează diagramele de momente încovoietoare pentru aceste cazuri de solicitare (fig. 7.108, *k*, *l* și *m*) și conform regulii lui Veresceaghin se obține

$$\Delta_{22} = 2\frac{1}{EI_z}\left[-M_2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4} - M_2\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{l}{2}\cdot\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{a}{2}\right] = \frac{Pl^2a^2}{32(l+a)}.$$

Procedînd în mod analog și pentru celelalte două cazuri de solicitare a cadrului se obțin valorile din tabelul 7.108.

Pentru scurtări în tabel s-a folosit semnul (—).

Tabelul 7.108

Cazul	Forța axială N_2	Momentul încovoietor M_1	Momentul încovoietor M_2	Deplasarea Δ_{11}	Deplasarea Δ_{22}
a	$0{,}5P$	$-\frac{Pl\,(l+2a)}{8\,(l+a)}$	$\frac{pl^2}{8\,(l+a)}$	$\frac{P\,l^3\,(l+4a)}{96\,(l+a)}$	$-\frac{pl^2a^2}{32(l+a)}$
b	$-0{,}5ql$	$\frac{ql^2(l+3a)}{24(l+a)}$	$-\frac{ql^3}{12(l+a)}$	$-\frac{ql^2(l+5a)}{192(l+a)}$	$\frac{ql^3a^2}{48(l+a)}$
c	$\mp\frac{M_0\,(l+2a)}{l\,(l+2a)}$	$\pm 0{,}5\ M_0$	$\pm\frac{M_0l}{2\,(l+2a)}$	0	0

7.109. Cadrele din structura mobilei pot fi considerate ca fiind solicitate ca în figura 7.109, *a*, *b*, *c*, și *d*. Se cere să se ridice nedeterminarea și să se calculeze momentele încovoietoare M_1 și M_2.

R. Rezultatele sînt centralizate în tabelul 7.109.

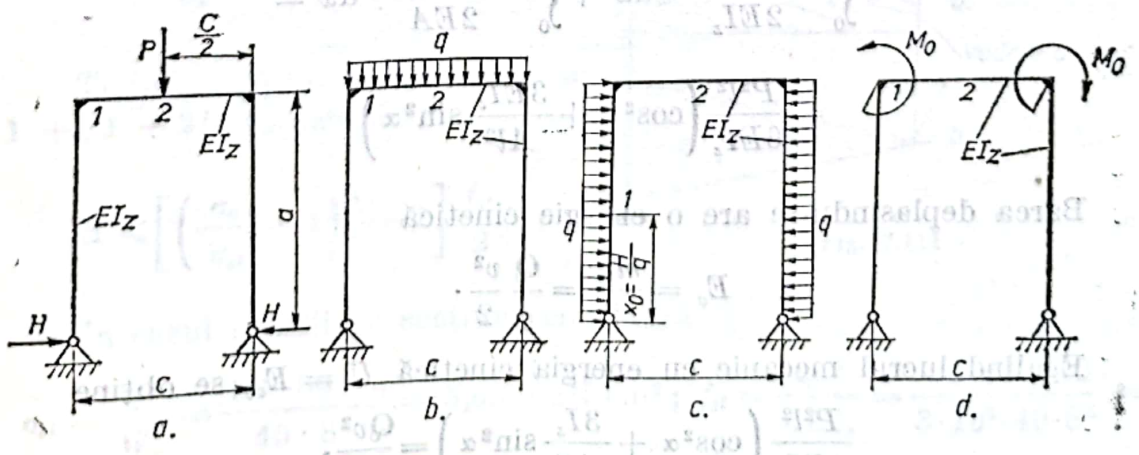


Fig. 7.109

Tabelul 7.109

Cazul	Reacțiunea orizontală H	Momentul încovoietor M_1	Momentul încovoietor M_2
a	$\frac{3Pc^2}{8a(2a+3c)}$	$-\frac{3Pc^2}{8(2a+3c)}$	$\frac{Pc(4a+3c)}{8(2a+3c)}$
b	$\frac{qc^3}{4a(a+2c)}$	$-\frac{qc^3}{4(2a+3c)}$	$\frac{qc^2(2a+c)}{8(2a+3c)}$
c	$-\frac{3qa(a+2c)}{4(2a+3c)}$	$\frac{9qa^2(a+2c)^2}{32(2a+3c)^2}$	$-\frac{qa^3}{4(2a+3c)}$
d	$-\frac{3M_0c}{a(2a+3c)}$	$\frac{3M_0c}{(2a+3c)}$	$-\frac{2M_0a}{(2a+3c)}$

7.110. O barcă de greutate $Q = 100$ daN, deplasîndu-se cu o viteză uniformă $v = 1$ m/s, lovește capătul superior al unui stîlp de lemn de lungime $l = 2$m și înclinat față de verticală cu un unghi $\alpha = 45°$ (fig. 7.110). Se cere să se determine tensiunea maximă din stîlp în momentul șocului, știind că diametrul său este de 20 cm.

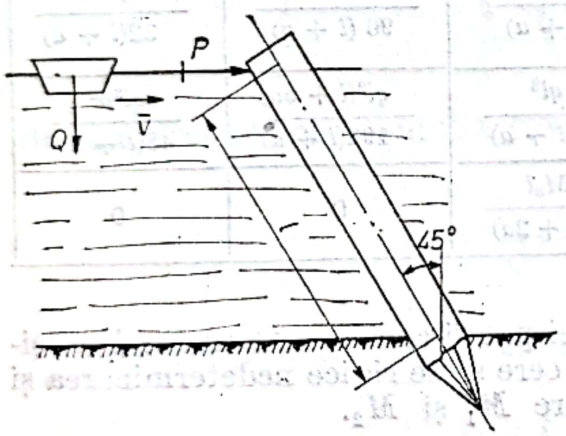


Fig. 7.110

Rezolvare. Fie P forța de impact. Componenta $P\cos\alpha$ produce încovoiere iar componenta $P\sin\alpha$, compresiune.

Într-o secțiune oarecare aflată la distanța x, momentul încovoietor este $M_i = P\ x\cos\alpha$, iar forța de compresiune $N = P\sin\alpha$.

Energia de deformație este

$$U = \int_0^l \frac{M_i^2\,dx}{2EI_z} + \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EA} =$$

$$= \int_0^l \frac{P^2x^2\cos^2\alpha}{2EI_z}\,dx + \int_0^l \frac{P^2\ \sin^2\alpha}{2EA}\,dx =$$

$$= \frac{P^2l^2}{6EI_z}\left(\cos^2\alpha + \frac{3EI_z}{Al^2}\sin^2\alpha\right).$$

Barca deplasîndu-se are o energie cinetică

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{Q}{g}\,\frac{v^2}{2}.$$

Egalînd lucrul mecanic cu energia cinetică $U = E_c$, se obține

$$\frac{P^2l^2}{6EI_z}\left(\cos^2\alpha + \frac{3I_z}{Al^2}\sin^2\alpha\right) = \frac{Qv^2}{2g},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$P = \frac{v}{l}\sqrt{\frac{3EI_z\,Q}{gl\left(\cos^2\alpha + \frac{3EI_z}{Al^2}\sin^2\alpha\right)}} =$$

$$= \frac{100}{200}\sqrt{\frac{3 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 7854}{981 \cdot 200\left(\frac{1}{2} + \frac{3{,}7854}{4 \cdot 10^4 \cdot 314} \cdot \frac{1}{2}\right)}} = 775 \text{ daN}.$$

Tensiunea normală maximă, datorită solicitărilor de încovoiere și compresiune, este

$$\left|\sigma\right|_{max} = \frac{Pl\cos\alpha}{W_z} + \frac{P\sin\alpha}{A} = \frac{775 \cdot 200 \cdot 0{,}707}{785{,}4} +$$

$$+ \frac{775 \cdot 0{,}707}{314} \cong 141 \text{ daN/cm}^2.$$

7.111. Să se determine înălțimea maximă H de la care poate cădea liber o greutate $Q = 30$ daN, pe capătul unei grinzi de lemn în consolă, de lungime $l = 0{,}8$ m, astfel încît în momentul șocului să nu se depășească tensiunea admisibilă $\sigma_a = 110$ daN/cm². Grinda are secțiunea dreptunghiulară constantă (fig. 7.111), de dimensiuni $b = 40$ cm și $h = 8$ cm iar $E = 10$ daN/cm². Cît de mare este H dacă grinda ar fi de secțiune variabilă, corespunzătoare unei bare de egală rezistență la încovoiere 7.111, *b*).

Rezolvare. Pentru ca în momentul șocului tensiunea maximă să nu depășească tensiunea admisibilă se pune condiția

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} \leqslant \sigma_a$$

Ținînd cont de relația lui $\psi = 1 + \sqrt{1 + 2H/f_{st}}$ rezultă

$$H \leqslant \left[\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{st}} - 1\right)^2 - 1\right]\frac{f_{st}}{2}.$$

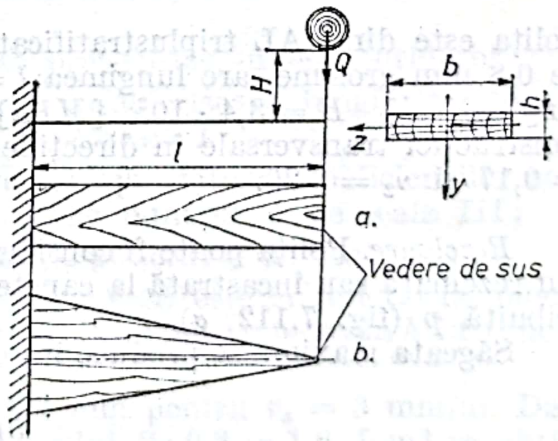


Fig. 7.111

În cazul grinzii de secțiune constantă

$$\sigma_{st} = \frac{Ql}{W_z} = \frac{30 \cdot 80 \cdot 6}{40 \cdot 8^2} = 5{,}62 \text{ daN/cm}^2;\ f_{st} = \frac{Ql^3}{3EI_z} = \frac{30 \cdot 80^3 \cdot 12}{3 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 8^3} =$$

$$= 3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

Cu aceste valori se obţine

$$H \leqslant \left[\left(\frac{110}{5{,}62} - 1\right)^2 - 1\right] \cdot \frac{3}{2} \cdot 10^2 = 5{,}1 \text{ cm}.$$

În cazul barei de egală rezistenţă

$$\sigma_{st} = \frac{Ql}{W_z} = 5{,}62 \text{ daN/cm}^2; \quad f_{st} = \frac{Ql^3}{2EI_z} = 1{,}5 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 4{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

şi deci

$$H \leqslant \left[\left(\frac{100}{5{,}62} - 1\right)^2 + 1\right] \cdot \frac{4{,}5}{2} \cdot 10^{-2} = 7{,}65 \text{ cm}.$$

În cazul barei de egală rezistenţă, care este mai elastică, s-a obţinut o valoare de 1,5 ori mai mare pentru înălţimea de cădere H.

7.112. Să se dimensioneze poliţa unui dulap destinată depozitării îmbrăcămintei avînd greutatea $p = 40 \cdot 10$ [N/mm²] (fig. 7.112, *a*).

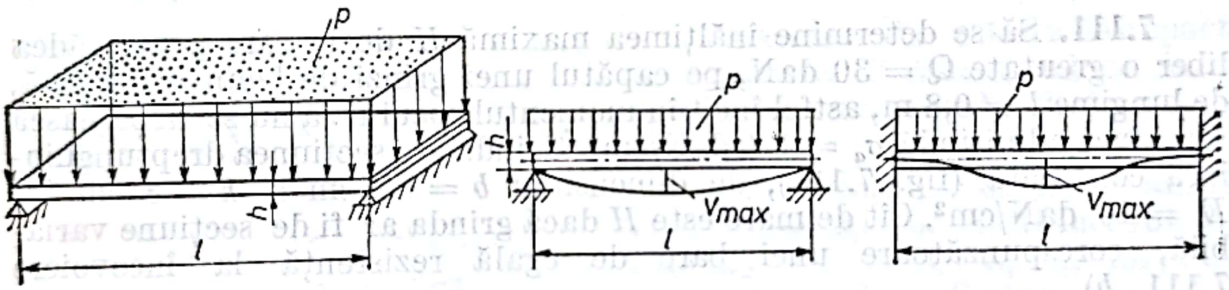


Fig. 7.112, a

Poliţa este din PAL triplustratificat furniruit pe ambele feţe cu furnir de 0,8 mm grosime, are lungimea $l = 1000$ mm, modulul de elasticitate longitudinală $E = 3{,}4 \cdot 10^3$ $[MPa] = 34000$ daN/cm² şi coeficienţii construcţiei transversale în direcţiile principale de anizotropie sînt $\nu_1 = 0{,}17$ şi $\nu_2 = 0{,}20$.

Rezolvare. Poliţa poate fi considerată ca o placă dreptunghiulară simplu rezemată sau încastrată la capete solicitată de o sarcină uniform distribuită p (fig. 7.112, *a*).

Săgeata maximă se produce în mijlocul poliţei şi este dată de relaţia

$$v_{max} = \frac{5pl^4}{384\, D_{11}},$$

în care l este lungimea (deschiderea) poliţei, în mm;

D_{11} — rigiditatea cilindrică a plăcii, în N · mm;

$$D_{11} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)},$$

Scanned with OKEN Scanner

E — modulul de elasticitate longitudinală a materialului poliței, în Pa; ($1Pa = 1N/m^2$);

h — grosimea poliței, mm;

ν_1 și ν_2 — coeficienții contracției transversale în direcțiile principale de anizotropie.

Punînd condiția ca

$$v_{max} < v_a = 0{,}001\ lv_a,$$

unde v_a este săgeata admisibilă ($v_a = 3...5$ mm/m), se obține expresia grosimii necesare a poliței

$$h = l\sqrt{\frac{60\ p(1 - \nu_1\nu_2)}{0{,}384\ v_a\ E}}\ [mm].$$

În cazul în care polița are capetele încastrate (realizate prin încleiere sau alte mijloace mecanice) în mod asemănător se deduce următoarea relație

$$h = l\sqrt[3]{\frac{12p(1 - \nu_1\nu_2)}{0{,}384v_a\ E}}\ [mm].$$

Pentru a facilita utilizarea acestor relații în mod rapid, pe baza calculelor efectuate pe calculator s-au trasat nomogramele din figurile 7.112, *b* și *c*.

Pentru utilizarea nomogramei se procedează în felul următor:

— se unesc prin linia *1—1* punctele ce caracterizează lungimea l a poliței și sarcina p și se obține punctul A pe scala I;

— se unesc prin linia *2—2* punctele corespunzătoare coeficienților contracției transversale ν_1 și ν_2 și se obține punctul B pe scala III;

— se unește punctul A cu B și se obține punctul C pe scala II;

— se unesc prin dreapta *4—4* punctele E și C (E este în funcție de modulul de elasticitate) și se obține valoarea grosimii poliței pe scala h în funcție de $v_a = 3$ mm/m sau $v_a = 5$ mm/m.

Pentru cazul dat rezultă $h = 19{,}4$ mm pentru $v_a = 3$ mm/m. Dacă se scade de două ori grosimea furnirului $2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$ [cm] se obține grosimea PAL de 17,8 mm și deci se pot folosi plăci din așchii de lemn cu grosimea de 18 mm. În cazul considerării poliței ca avînd săgeata admisibilă de 5 mm/m rezultă grosimea necesară a PAL de 15 mm, utilizîndu-se în acest caz plăci de 16 mm grosime.

Pentru materiale diferite se pot utiliza în calcule valorile modulelor de elasticitate E și coeficienților contracției transversale prezentate în tabelul 7.112.

Scanned with OKEN Scanner

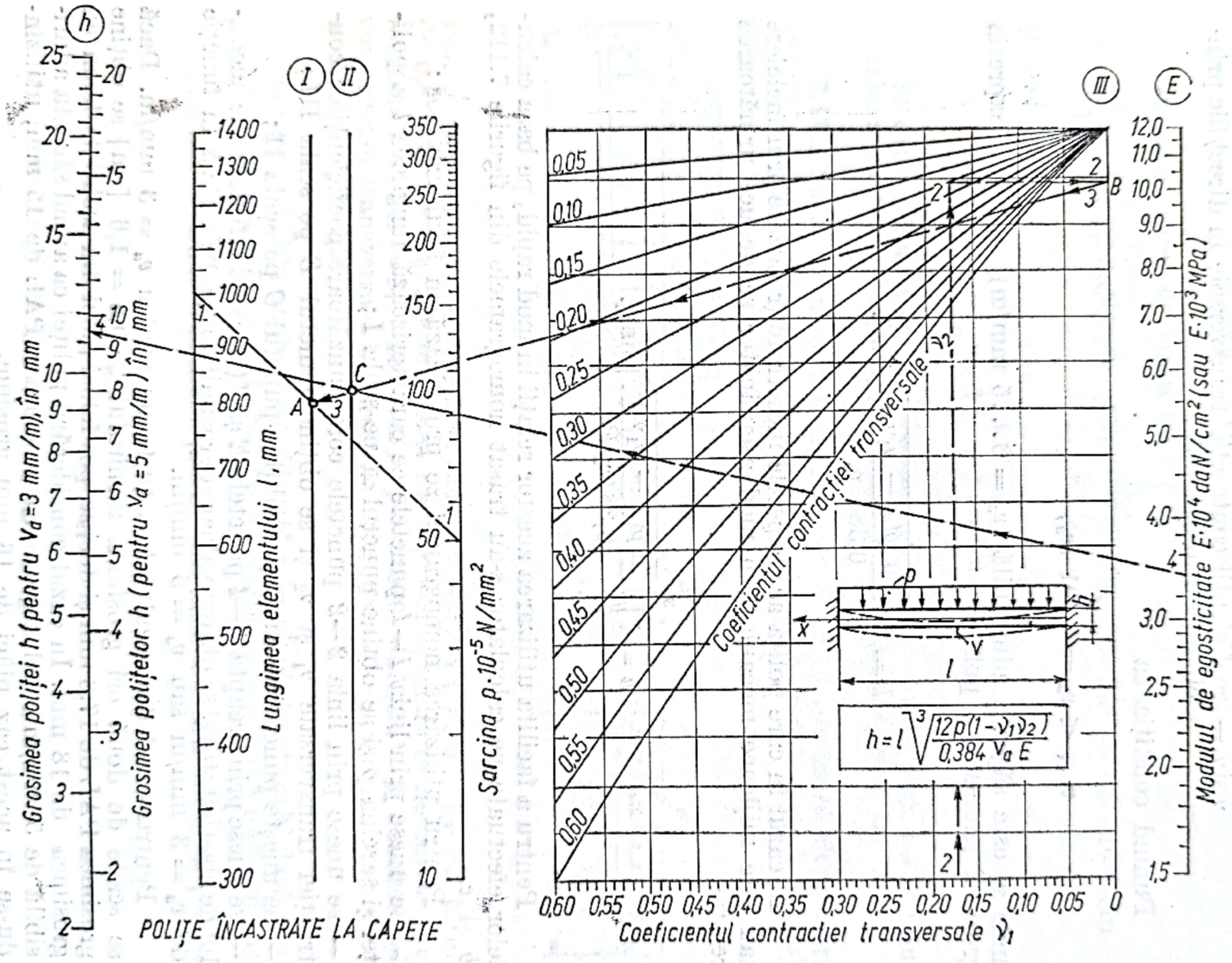

h
I
II
III
E
Grosimea poliței h (pentru V_a=3 mm/m), în mm
Grosimea poliței h (pentru V_a=5 mm/m) în mm
Lungimea elementului l, mm
Sarcina p·10⁻⁵ N/mm²
Coeficientul contracției transversale ν_2
Modulul de egosticitate E·10⁻⁴ daN/cm² (sau E·10³ MPa)
Coeficientul contracției transversale ν_1
POLIȚE ÎNCASTRATE LA CAPETE
$h = l\sqrt[3]{\frac{12p(1-\nu_1\nu_2)}{0{,}384\,V_a\,E}}$

Fig. 7.112, b

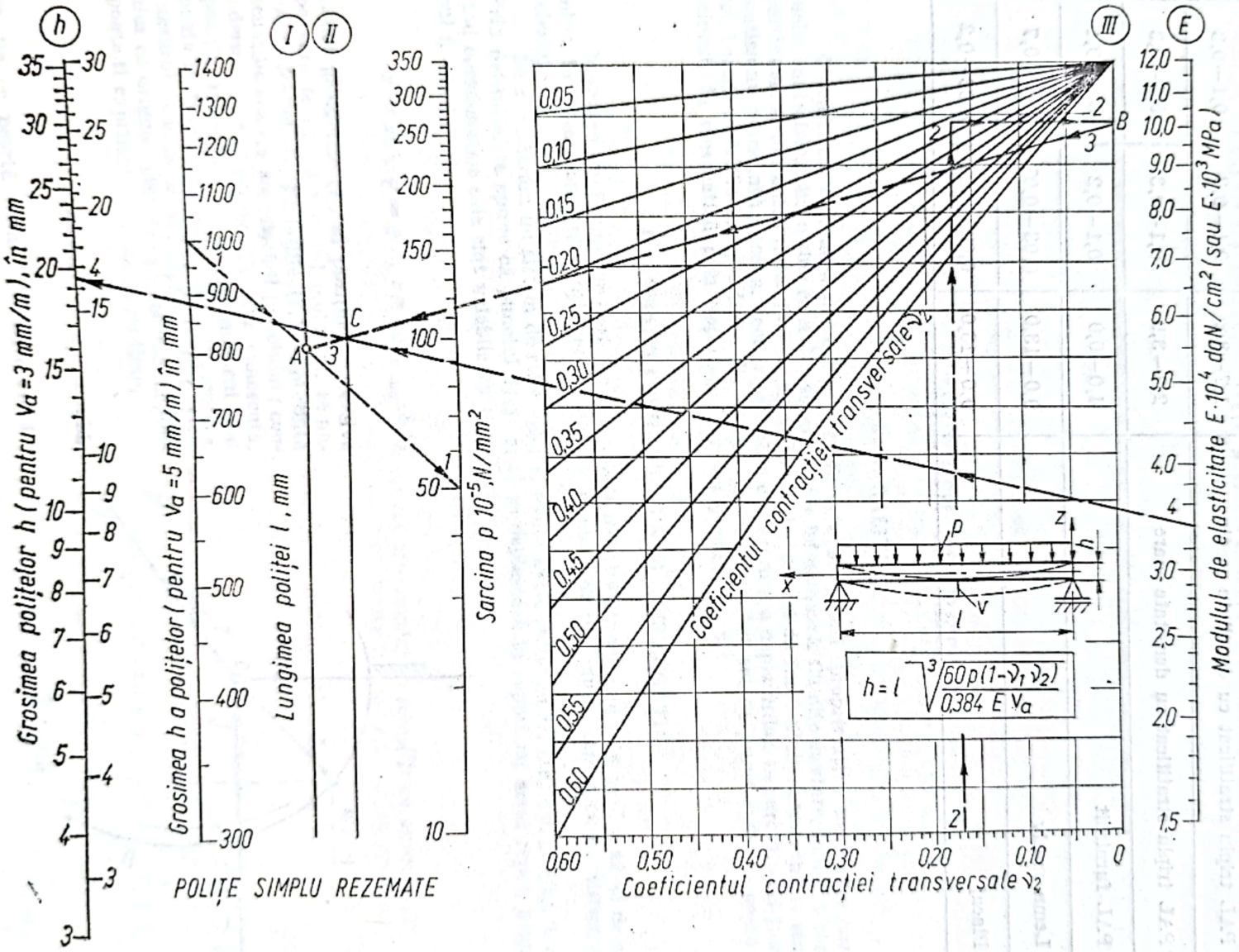
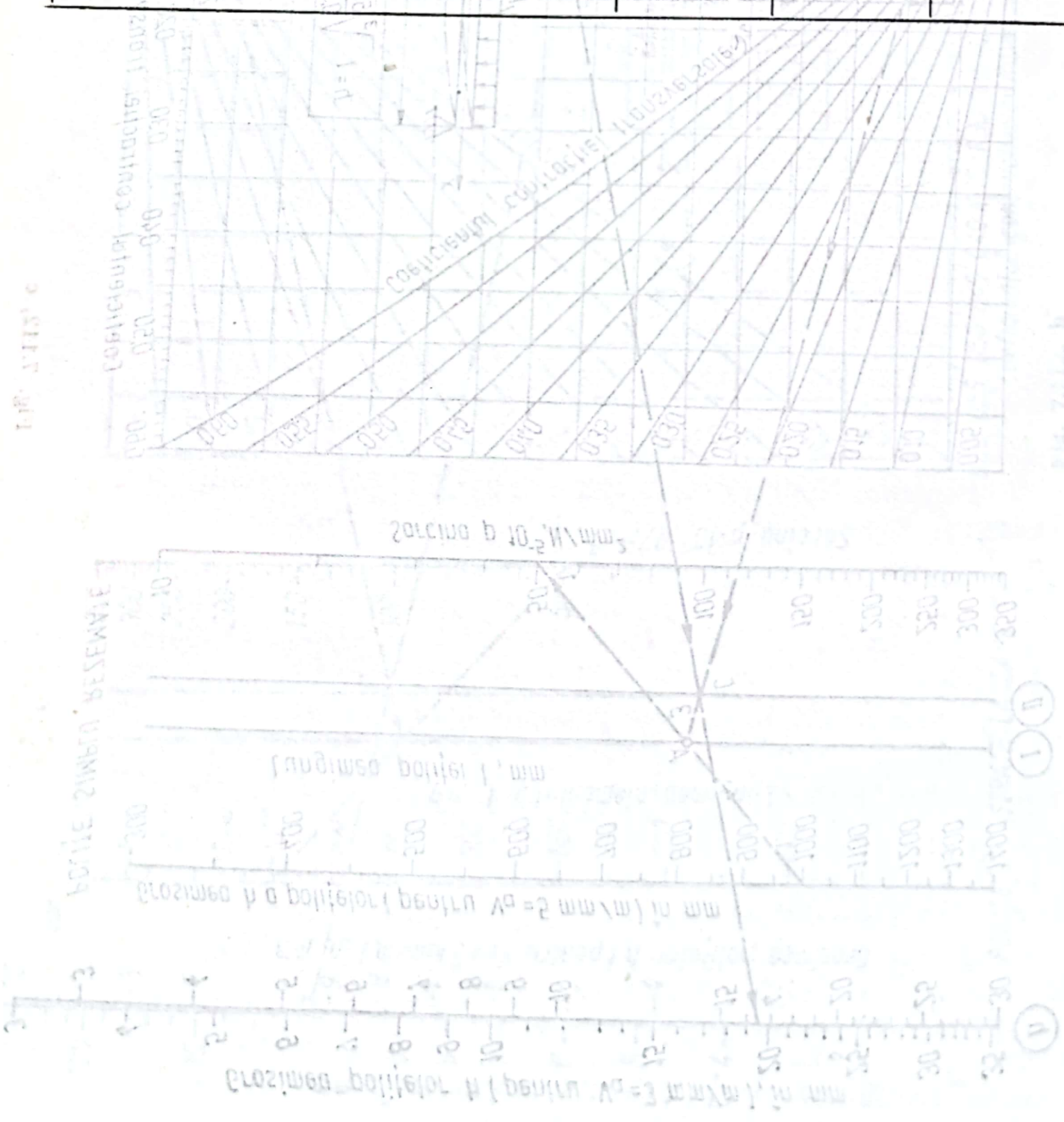

h
I
II
III
E
Grosimea poliților h (pentru Va=3 mm/m), în mm
Grosimea h a poliților (pentru Va=5 mm/m) în mm
Lungimea poliței l, mm
Sarcina p 10⁻⁵, N/mm²
Modulul de elasticitate E·10⁻⁴ daN/cm² (sau E·10³ MPa)
Coeficientul contracției transversale ν₂
POLIȚE SIMPLU REZEMATE
A
B
C
h = l ∛(60p(1-ν₁ν₂) / 0,384 E Va)

Fig. 7.112, c

Tabelul 7.112

Materialul	Modul de elasticitate $E.10^3$ [MPa]	Coef. contracției transversale	
		ν_1	ν_2
PAL triplu stratificat cu densitate medie	1,7—3,2	0,1—0,3	0,1—0,3
PAL triplu stratificat cu densitate mare	2,2—3,9	0,1—0,3	0,1—0,3
PAL furniruit	4,0—6,0	0,1—0,2	0,2—0,4
Lemn masiv	9,0—13,0	0,03—0,07	0,4—0,7
Placaj	9,0—13,0	0,02—0,07	0,06—0,2



Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

STUDIUL CINEMATIC AL MAȘINILOR ȘI AL UNOR INSTALAȚII TEHNOLOGICE DIN ECONOMIA FORESTIERĂ

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

8.1. GENERALITĂȚI

Cinematica este acea parte a mecanicii, care studiează proprietățile mișcărilor sistemelor materiale, fără a ține cont de cauzele care le influențează. Cu alte cuvinte, în acest compartiment al mecanicii nu se face uz de noțiunile de masă și de forță. Sub acest aspect, cinematica nu reprezintă altceva, decît o geometrie a mișcării și a deplasărilor, în care timpul joacă rolul unei variabile independente. În consecință, modelul abstract de *punct material* poate fi înlocuit în cinematică prin noțiunea de *punct geometric*.

8.2. TRAIECTORIE, VITEZĂ ȘI ACCELERAȚIE

Mișcarea unui punct material în spațiu este definită atunci cînd este posibil să se determine, în orice moment, poziția punctului față de un reper fix, sau în raport cu un sistem de referință.

Să considerăm un sistem de referință fix, avînd axele rectangulare Ox, Oy, Oz (fig. 8. *a*). Prin definiție, se spune că punctul $M(x, y, z)$ se deplasează în raport cu acest reper, atunci cînd coordonatele sale sînt valabile cu timpul t, adică:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{8.1}$$

Locul geometric (Γ) al pozițiilor succesive pe care le ocupă punctul mobil M, se numește *traiectorie*. Ecuațiile (8.1) reprezintă ecuațiile scalare ale mișcării punctului; considerînd că traiectoria (Γ) este cunoscută, poziția mobilului M la un moment dat poate fi determinată prin lungimea arcului s, măsurat de la punct fix M_0 de pe traiectorie ales ca origine, pînă la M; această lungime poate fi exprimată ca funcție de timp,

$$s = s(t), \tag{8.2}$$

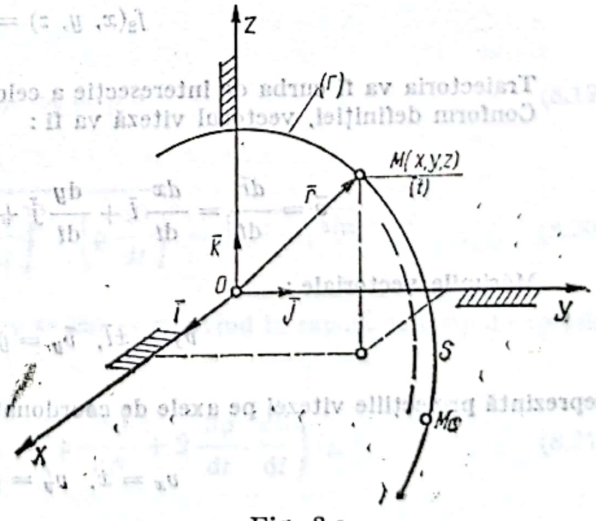


Fig. 8.a

relație ce poartă numele de legea orară a mișcării punctului.

În fine, poziția punctului M poate fi determinată prin vectorul său de poziție $\overline{OM} = \bar{r}$, care depinde de timp, fiind așadar o funcție vectorială de scalarul t:

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \tag{8.3}$$

Viteza punctului material M este un vector legat $\bar{v}$, ce caracterizează direcția, sensul și rapiditatea mișcării punctului în momentul considerat și este egală cu derivata de ordinul întîi a vectorului de poziție în raport cu timpul; vectorul viteză $\bar{v}$, aplicat în M are direcția tangentei în M la traiectoria (Γ). Rezultă prin urmare, relația de definiție a vectorului viteză:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \tag{8.4}$$

Accelerația punctului M este, de asemenea, un vector legat, ce caracterizează rapiditatea de variație a vitezei punctului material considerat și este egală cu prima derivată în raport cu timpul a vectorului viteză, sau cu derivata doua a vectorului de poziție în raport cu timpul; rezultă deci că:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \tag{8,5}$$

8.3. MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL ÎN COORDONATE CARTEZIENE

Raportînd traiectoria descrisă de punctul material la un sistem de referință ortonormat fix (fig. 8. *a*), legea mișcării punctului M care descrie curba (Γ) se exprimă prin vectorul de poziție $\bar{r}$:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \tag{8.6}$$

în care:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t), \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

sînt funcții de timp și definesc parametric traiectoria (Γ) descrisă de punct.

Eliminînd parametrul t între relațiile (8.7), se obțin ecuațiile traiectoriei sub formă implicită:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0; \\ f_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Traiectoria va fi curba de intersecție a celor două suprafețe (8.8).
Conform definiției, vectorul viteză va fi:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}. \tag{8.9}$$

Mărimile vectoriale:

$$\bar{v}_x = \dot{x}\bar{i}, \quad \bar{v}_y = \dot{y}\bar{j}, \quad \bar{v}_z = \dot{z}\bar{k} \tag{8.10}$$

reprezintă proiecțiile vitezei pe axele de coordonate Ox, Oy și Oz, iar mărimile scalare

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \tag{8.11}$$

sînt componentele vitezei pe aceleași axe.

Modulul vitezei are expresia:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{8.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul accelerație se obține derivînd vectorul viteză în raport cu timpul ; avem :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} \tag{8.13}$$

Rezultă modulul accelerației :

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{8.14}$$

8.4. MIȘCAREA PUNCTULUI ÎN COORDONATE POLARE

Dacă se adoptă în planul mișcării un sistem polar de referință, constituit din polul O și axa polară $O\Delta$, poziția în orice moment a punctului M pe traiectoria sa plană (Ω) este determinată de coordonatele polare ρ și θ și deci ecuațiile parametrice ale mișcării punctului M vor și (fig. 8. *b*) :

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho(t) ; \\ \theta &= \theta(t). \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

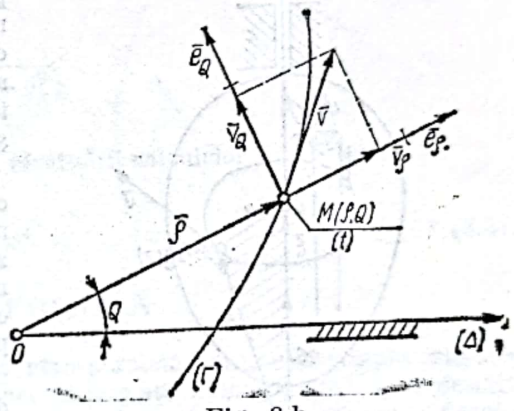


Fig. 8.b

Ecuația traiectoriei va rezulta prin eliminarea parametrului t între relațiile (8.15) și va fi o ecuație de forma :

$$\rho = \rho(\theta), \tag{8.16}$$

Viteza punctului în coordonate polare este :

$$\bar{v} = \frac{d\rho}{dt}\bar{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\bar{e}_\rho = \dot{\rho}\,\bar{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta. \tag{8.17}$$

Proiecțiile vitezei pe axele de coordonate sînt :

$$\bar{v}_\rho = \dot{\rho}\,\bar{e}_\rho \quad \text{și} \quad \bar{v}_\theta = \rho\,\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta, \tag{8.18}$$

iar componentele vitezei pe aceleași axe

$$v_\rho = \dot{\rho} \quad \text{și} \quad v_\theta = \rho\,\dot{\theta}. \tag{8.19}$$

Modulul vitezei este :

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}. \tag{8.20}$$

Vectorul accelerației în coordonate polare se obține derivînd în raport cu timpul expresia (8.17) a vectorului viteză ; se obține :

$$\bar{a} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\bar{e}_\rho + \left(\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)\bar{e}_\theta, \tag{8.21}$$

sau

$$\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\bar{e}_\rho + (\rho\,\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\bar{e}_\theta. \tag{8.22}$$

Proiecțiile accelerației pe axele sisteumlui de referință sînt :

$$\bar{a}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\bar{e}_\rho \quad \text{și} \quad \bar{a}_\theta = (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\theta)\,\bar{e}_\theta. \tag{8.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar componentele acceleraţiei :

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \quad \text{şi} \quad a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}. \tag{8.24}$$

Modulul acceleraţiei va fi :

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right]^2 \quad \left(\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)^2}. \tag{8.25}$$

8.4. MIŞCĂRILE SIMPLE ALE RIGIDULUI

Mişcările cele mai simple, pe care le poate executa un rigid, în raport cu un sistem de referinţă fix, sînt translaţia şi rotaţia în jurul unei axe fixe. Se poate demonstra, că toate celelalte mişcări reprezintă compuneri, după anumite legi, ale unor translaţii şi rotaţii.

Mişcarea de translaţie. Un rigid are o mişcare de translaţie atunci cînd o dreaptă, care uneşte două puncte arbitrare ale rigidului rămîne, în tot timpul mişcării paralelă cu ea însăşi. Caracteristic mişcării de translaţie este faptul că toate punctele rigidului au aceeaşi viteză şi acceleraţie şi descriu aceeaşi traiectorie. Prin urmare, în mişcarea de translaţie viteza şi acceleraţia sînt vectori liberi.

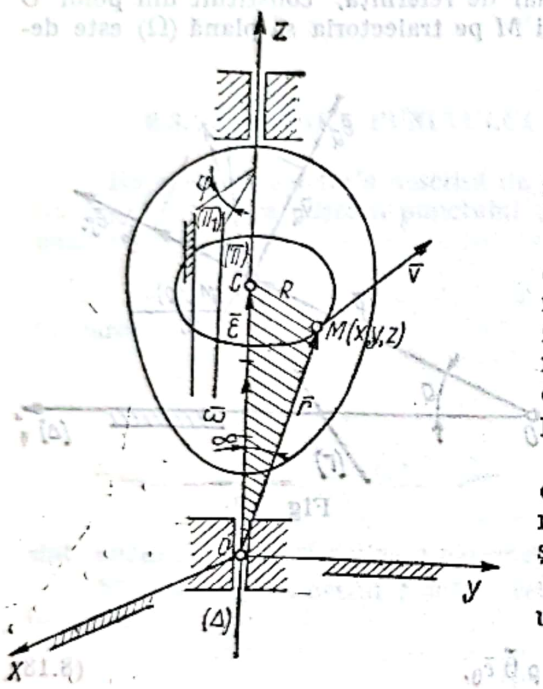


Fig. 8.c

Mişcare de rotaţie cu axă fixă. Un rigid execută o mişcare de rotaţie cu axă, fixă, dacă în tot timpul mişcării cel puţin două puncte ale rigidului au vitezele nule. Dreapta care uneşte punctele cu vitezele nule poartă numele de axă de rotaţie. Un punct oarecare M al rigidului va descrie un cerc cu centrul pe axa de rotaţie (fig. 8. *c*).

Mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe este definită, la un moment dat t, prin poziţia axei fixe de rotaţie, sensul de rotaţie al rigidului în jurul axei fixe şi valoarea vitezei unghiulare $|\bar{\omega}|$.

Viteza unui punct oarecare M al rigidului este un vector egal cu :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{8.26}$$

sau explicînd (8.26) faţă de sistemul cartezian $Oxyz$:

$$v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \tag{8.27}$$

Rezultă proiecţiile vitezei pe axele sistemului cartezian de referinţă (formulele cinematice ale lui Euler) :

$$\left.\begin{aligned} v_x &= z\omega_y - y\omega_z ; \\ v_y &= x\omega_z - z\omega_x ; \\ v_z &= y\omega_x - x\omega_y. \end{aligned}\right\} \tag{8.28}$$

Valoarea vitezei va fi :

$$v = \sqrt{(z\omega_y - y\omega_z)^2 + (x\omega_z - z\omega_x)^2 + (y\omega_x - x\omega_y)^2} = \omega \cdot R. \tag{8.29}$$

Expresia vectorului acceleraţie $\bar{a}$ a punctului M se obţine derivînd în raport cu timpul relaţia (8.26) a vitezei $\bar{v}$; rezultă :

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{8.30}$$

în care $\bar{\varepsilon}$ este acceleraţia unghiulară.

Scanned with OKEN Scanner

Relaţia (8.30) se mai scrie :

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) \cdot \bar{\omega} - \bar{\omega}^2 \cdot \bar{r}, \tag{8.31}$$

sau

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \tag{8.32}$$

Explicitind (8.32) în raport de sistemul cartezian $Oxyz$, se obţine în urma identificării coeficienţilor versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= z\varepsilon_y - y\varepsilon_z + v_z\varepsilon_y - v_y\varepsilon_z ; \\ a_y &= x\varepsilon_z - z\varepsilon_x + v_x\varepsilon_z - v_z\varepsilon_x ; \\ a_z &= y\varepsilon_x - x\varepsilon_y + v_y\varepsilon_x - v_x\varepsilon_y. \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

Valoarea acceleraţiei va fi :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y + a_z^2} ;$$

înlocuind expresiile proiecţiilor acceleraţiilor, în urma efectuării calculelor, se obţine :

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{8.34}$$

8.5. MIŞCAREA PLAN-PARALELĂ

Se spune că un solid rigid execută o mişcare plan-paralelă (sau, mai simplu mişcare plană), atunci cînd se pot găsi, cel puţin trei puncte necoliniare ale solidului rigid, care descriu traiectorii paralele cu un plan fix (π). Rezultă, prin urmare, că toate punctele rigidului descriu traiectorii, care se găsesc în plane paralele sau confundate cu planul (π), iar punctele situate pe o normală Oz la (π) execută traiectorii identice (fig. 8. *d*).

Într-o mişcare plan-paralelă, tot ceea ce se întîmplă într-un plan al rigidului se produce identic în toate planele acestuia, paralele cu planul considerat. De aceea este suficient să se studieze mişcarea unei secţiuni ce se găseşte într-un plan paralel cu direcţia mişcării. O astfel de secţiune se află într-un plan denumit plan director.

În mişcarea plan-paralelă vitezele tuturor punctelor la un moment dat sînt aceleaşi, ca şi cum planul director ar avea o rotaţie cu o viteză unghiulară ω, în jurul unei axe perpendiculară pe plan, într-un punct determinat I, numit *centru instantaneu de rotaţie* (fig. 8. *e*).

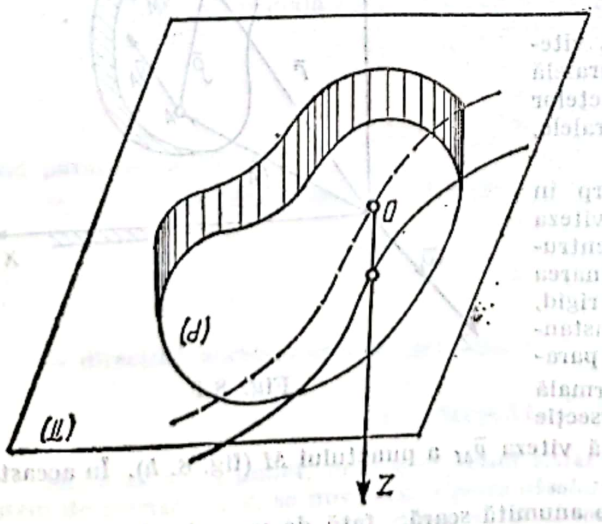


Fig. 8.d

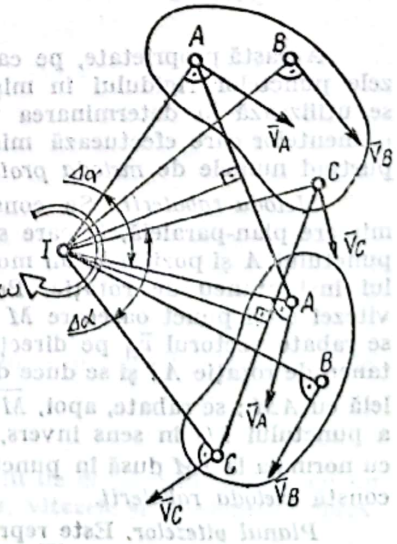


Fig. 8.e

Considerînd trei puncte arbitrare A, B şi C ale unui rigid în mişcare plan-paralelă, ca în figura 8. *e*, vom putea scrie :

$$|\bar{v}_A| = |\overline{IA}|\,\omega\,;\quad |\bar{v}_B| = |\overline{IB}|\cdot\omega\,;\quad |\bar{v}_C| = |\overline{IC}|\cdot\omega. \tag{8,35}$$

Fie un solid rigid în mişcare plan-paralelă ; pentru a putea efectua studiul mişcării, se aleg trei puncte conţinute în planul director : un reper fix O, un punct de referinţă legat de rigid, A şi un punct oarecare al rigidului M (fig. 8. *f*).

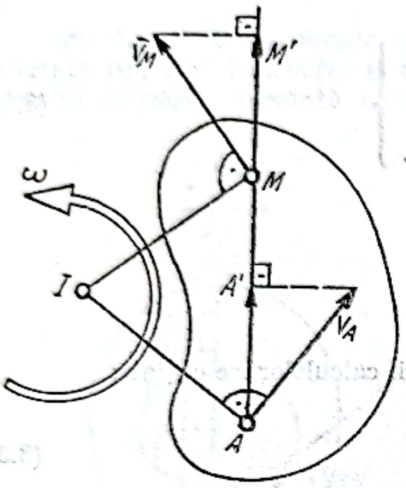


Fig. 8.g

Vom raporta mişcarea la un sistem de referinţă fix $Oxyz$, iar planul director se presupune conţinut în planul xOy ; considerînd vectorul $\bar{v}_A$ conţinut în planul director, viteza $\bar{v}_M$ a punctului M va fi şi ea conţinută în planul director şi va avea următoarea expresie :

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AM}. \tag{8.36}$$

Derivînd relaţia (8.36) în raport cu timpul, se obţine acceleraţia punctului M :

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AM}). \tag{8.37}$$

Centroide. Este important de remarcat faptul că, centrul instantaneu de rotaţie nu rămîne fix în timpul mişcării plan-paralele a solidului rigid şi că, în general, el se schimbă de la un moment la altul. Locul geometric descris de centrul instantaneu de rotaţie se numeşte *centroidă.* Dacă solidul rigid se raportează la un sistem de referinţă fix, locul geometric al centrului instantaneu de rotaţie se numeşte centroidă fixă, sau *bază.* Dacă mişcarea plan-paralelă a solidului rigid este raportată la un sistem de referinţă mobil, centroida se numeşte şi ea centroidă mobilă, sau *rostogolitoare.* Centroida mobilă se rostogoleşte fără alunecare pe centroida fixă, punctul de tangenţă dintre cele două centroide fiind chiar centrul instantaneu de rotaţie.

Metode grafice pentru determinarea vitezelor şi acceleraţiilor în mişcarea plană. În mişcarea plan-paralelă a unui solid rigid, proiecţiile vitezelor a două din punctele sale pe dreapta determinată de aceste puncte sînt egale (fig. 8. *g*), adică :

$$\overline{AA'} = \overline{MM'} \tag{8.38}$$

Această proprietate, pe care o prezintă vitezele punctelor rigidului în mişcare plan-paralelă se utilizează la determinarea vitezelor punctelor elementelor care efectuează mişcări plan-paralele, purtînd numele de *metoda proiecţiilor.*

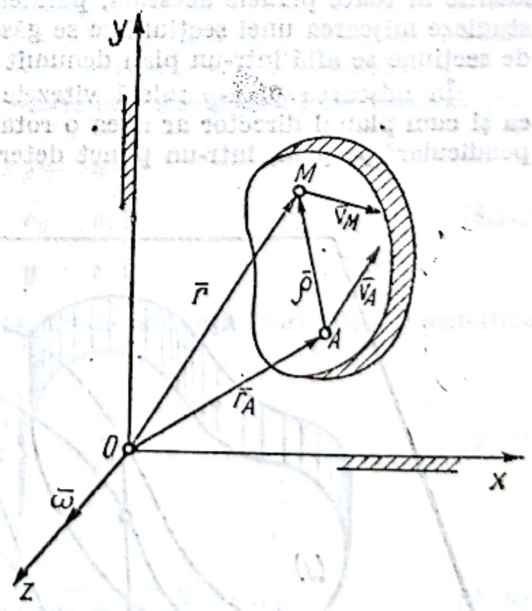


Fig. 8.f

Metoda rabaterii. Se consideră un corp în mişcare plan-paralelă, la care se cunoaşte viteza punctului A şi poziţia la un moment dat a centrului instantaneu de rotaţie. Pentru determinarea vitezei unui punct oarecare M al solidului rigid, se rabate vectorul $\bar{v}_A$ pe direcţia centrului instantaneu de rotaţie AI şi se duce dreapta $A'M'$ paralelă cu AM ; se rabate, apoi, $\overline{MM'}$ (viteza normală a punctului M) în sens invers, şi prin intersecţie cu normala la IM dusă în punctul M, rezultă viteza $\bar{v}_M$ a punctului M (fig. 8. *h*). În aceasta constă *metoda rabaterii.*

Planul vitezelor. Este reprezentarea la o anumită scară, faţă de un pol arbitrar ales, a vitezelor punctelor unui solid rigid, sau a unui sistem de rigide, în mişcare plan-paralele, la

Scanned with OKEN Scanner

un moment dat. Construcția planului vitezelor se bazează pe relația (8.36), care se mai scrie sub următoarea formă :

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}. \tag{8.39}$$

Viteza unui punct oarecare M se poate determina cu ajutorul planului vitezelor, dacă se cunosc : viteza punctului de referință A, direcția vitezei punctului M, sau poziția centrului

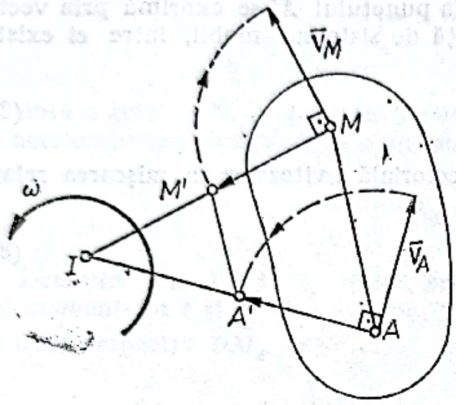


Fig. 8.h

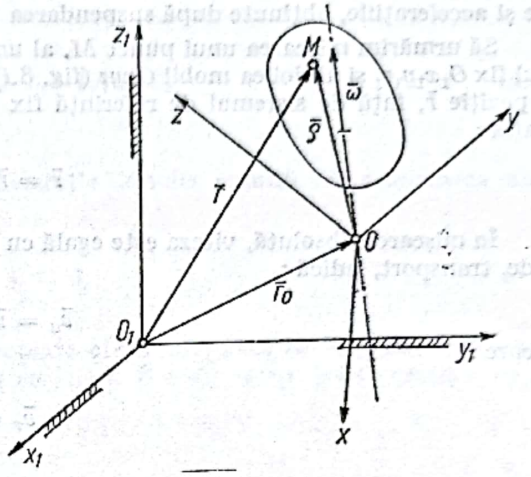


Fig. 8.i

instantaneu de rotație I, sau viteza unghiulară de rotație în jurul lui I, sau viteza unghiulară de rotație în jurul lui I, în momentul considerat.

Planul accelerațiilor. Ca și planul vitezelor, este reprezentarea la o scară potrivit aleasă, față de un pol arbitrar ales, a accelerațiilor diferitelor puncte ale unui solid rigid, sau ale unui sistem de rigide în mișcarea plan-paralelă la un anumit moment dat. Considerînd un corp în mișcare plan-paralelă, între acele rațiile a două puncte A și M ale acestuia, există relația :

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}. \tag{8.40}$$

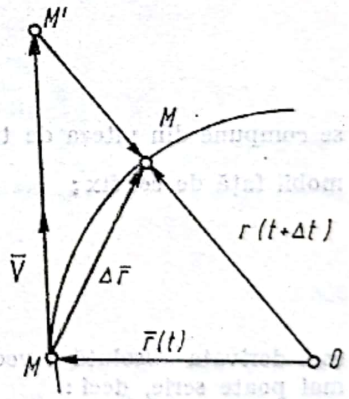


Fig. 8.j

Construcția planului accelerațiilor se bazează pe ecuația vectorială (8.40), în care se presupun cunoscute :

— accelerația punctului A, $\bar{a}_A$, în mărime, direcție și sens ;

— accelerația normală $\bar{a}^n_{MA}$, în mărime, direcție și sens :

$$a^n_{MA} = \frac{v^2_{MA}}{MA},$$

fiind paralelă cu MA ;

— a^n_M, cunoscută în mărime, direcție și sens ;

$$a^n_M = \frac{v^2_M}{\rho};$$

— direcțiile accelerațiilor tangențiale, care sînt perpendiculare pe accelerațiile normale.

8.6. MIȘCAREA RELATIVĂ

Mișcarea unui punct, unui corp, unui sistem de puncte sau de corpuri în raport cu un sistem de referință fix, se numește *mișcare absolută* ; traiectoriile, vitezele și accelerațiile corespunzătoare, acestei mișcări, se numesc și ele absolute.

Mişcarea unui punct, unui corp, unui sistem de puncte sau de corpuri în raport cu un sistem de referinţă mobil, se numeşte *mişcare relativă*; traiectoriile, vitezele şi acceleraţiile corespunzătoare acestei mişcări se numesc şi ele relative.

Mişcarea punctului, corpului etc. presupuse imobile în raport cu sistemul de referinţă mobil, odată cu sistemul de referinţă mobil, faţă de sistemul de referinţă fix, se numeşte *mişcare de transport*. Mişcarea de transport (antrenare) se determină uşor suspendînd mişcarea relativă, adică considerînd la un anumit moment că punctul, corpul, sistemul de puncte sau de corpuri pe care le studiem se fixează faţă de sistemul de referinţă mobil. Traiectoriile, vitezele şi acceleraţiile, obţinute după suspendarea mişcării relative se numesc de transport.

Să urmărim mişcarea unui punct M, al unui solid rigid, faţă de două sisteme de referinţă, unul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi al doilea mobil $Oxyz$ (fig. 8.*i*). Poziţia punctului M se exprimă prin vectorii de poziţie $\bar{r}$, faţă de sistemul de referinţă fix şi $\bar{\rho}$ faţă de sistemul mobil, între ei existînd relaţia:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{\rho}, \tag{8.41}$$

În mişcarea absolută, viteza este egală cu suma vectorială a vitezelor în mişcarea relativă şi de transport, adică:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t, \tag{8.42}$$

în care:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}$$

este egală cu derivata relativă sau locală a vectorului $\bar{\rho}$ în raport cu timpul;

$$\bar{v}_t = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} \tag{8.43}$$

se compune din viteza de translaţie $\frac{d\bar{r}_0}{dt}$ şi cea de rotaţie $\bar{\omega} \times \bar{\rho}$ a sistemului de referinţă mobil faţă de cel fix;

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}}{dt} \tag{8.44}$$

este derivata absolută a vectorului $\bar{r}$ în raport cu timpul. Relaţia vitezei absolute (8.42) se mai poate scrie, deci:

$$\bar{v}_a = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \tag{8.45}$$

în care:

$$\bar{v}_0 = \frac{d\bar{r}_0}{dt}$$

este viteza de translaţie a punctului M.

Derivînd (8.43) în raport cu timpul, se obţine expresia acceleraţiei absolute:

$$\bar{a}_a = \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial t^2} + \frac{d^2 \bar{r}_0}{dt^2} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \rho \left(\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right). \tag{8.46}$$

Remarcînd că

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial t^2} = \bar{a}_r \tag{8.47}$$

este acceleraţia relativă, iar

$$\bar{a}_t = \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) \tag{8.48}$$

este acceleraţia de transport, iar produsul vectorial :

$$2\left(\omega \times \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}\right) = 2(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) = \bar{a}_c \tag{8.49}$$

reprezintă o acceleraţie suplimentară, numită acceleraţie Coriolis, rezultă că în mişcarea absolută acceleraţia are următoarea expresie :

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c. \tag{8.50}$$

Deviaţia. Fie M şi M_1 două poziţii apropiate ale unui punct în mişcare corespunzătoare momentelor t şi $t + \Delta t$ (fig. 8. *j*). Notînd cu $\bar{r}(t)$ şi $\bar{r} + \Delta\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t)$ vectorii de poziţie $\overline{OM}$, respectiv $\overline{OM_1}$, rezultă :

$$\Delta\bar{r} = \overline{MM_1} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t). \tag{8.51}$$

Dezvoltînd vectorul $\bar{r}(t)$ în serie Taylor, avem :

$$\bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r}(t) + \dot{\bar{r}}(t)\frac{\Delta t}{1!} + \ddot{\bar{r}}(t)\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dddot{\bar{r}}(t)\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \ldots,$$

de unde, neglijînd infiniţii mici de ordin superior lui doi şi observînd că $\dot{\bar{r}}(t) = \bar{v}$ şi $\ddot{\bar{r}}(t) = \bar{a}$, se obţine :

$$\overline{MM_1} = \bar{v} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\bar{a}(\Delta t)^2. \tag{8.52}$$

În formula (8.52), vectorul

$$\overline{MM'} = \bar{v} \cdot \Delta t \tag{8.53}$$

reprezintă deplasarea punctului M în ipoteza că viteza sa ar fi constantă, iar vectorul

$$\overline{M'M_1} = \frac{1}{2}\bar{a}(\Delta t)^2 \tag{8.54}$$

măsoară abaterea punctului, intervalul de timp Δt, de la traiectoria rectilinie, pe care ar fi descris-o în absenţa acceleraţiei. Această abatere poartă denumirea de *deviaţie*.

II. APLICAŢII

8.1. Să se determine expresia vitezei la strunjire a unei bare cilindrice de lemn, care se roteşte cu o turaţie n şi are raza după strunjire R, iar viteza de avans a cuţitului $\bar{u}$.

Rezolvare. În cazul strunjirii, traiectoria descrisă de un punct M de pe muchia tăietoare a cuţitului este o elice cilindrică dreaptă, ca efect al compunerii mişcării de rotaţie cu axa fixă a barei de lemn cu mişcarea de avans a cuţitului.

Coordonatele punctului M în raport cu sistemul de referinţă $xOyz$ sînt :

$$x = R\cos\theta\,; \quad y = \frac{\theta}{2\pi}u_c\,; \quad z = -R\sin\theta,$$

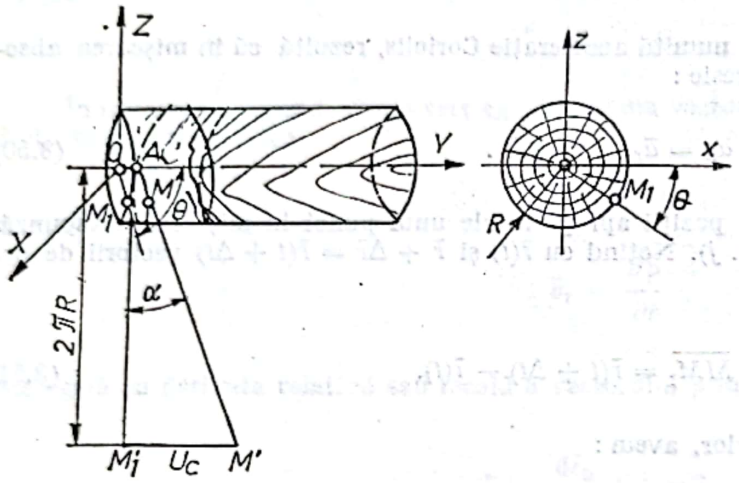


Fig. 8.1

în care $y = MM_1$; din triunghiurile asemenea ΔAMM_1 şi $\Delta AM'M_1'$ rezultă $MM_1 = \frac{\theta}{2\pi} M_1'M' = \frac{\theta}{2\pi} u_c$, u_c fiind avansul la o rotaţie.

Atunci vectorul de poziţie al punctului M este :

$$\bar{r} = \overline{OM} = R\cos\theta\,\bar{i} + \frac{\theta}{2\pi}u_c\bar{j} - R\sin\theta\,\bar{k},$$

iar viteza

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\cos\theta\,\bar{i} + \frac{\theta}{2\pi}u_c\bar{j} - R\sin\theta\,\bar{k}\right) = -R\,\dot{\theta}\sin\theta\,\bar{i} + \frac{u_c}{2\pi}\dot{\theta}\bar{j} - R\dot{\theta}\cos\theta\,\bar{k}.$$

Viteza va avea deci valoarea numerică :

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \left(\frac{u_c}{2}\right)^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta} = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + \left(\frac{u_c}{2\pi}\right)^2}\,;$$

$$u_c = \frac{1000\,u}{n}\ [\text{mm}],$$

în care u este viteza de avans în m/min şi n este turaţia în rot/min.

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{\pi \cdot n}{30}\,;$$

Scanned with OKEN Scanner

deci :

$$v = \frac{\pi n}{30}\sqrt{R^2 + \left(\frac{1000\,u}{2\pi n}\right)^2}\ [\text{mm/s}].$$

8.2. Să se determine expresia vitezei de tăiere la un ferăstrău circular de spintecat. Se cunoaşte turaţia n, a discului circular şi viteza de avans u a materialului lemnos.

Rezolvare. Prin compunerea mişcării de rotaţie cu axă fixă a discului circular cu mişcarea de translaţie (avans) a materialului lemnos, traiectoria reală descrisă în lemn de muchia tăietoare a unui dinte este MM_1.

Faţă de sistemul de referinţă xOy, coordonatele punctului M_1 vor fi :

$$x = R\sin\theta + u_z\,;\quad y = R\cos\theta.$$

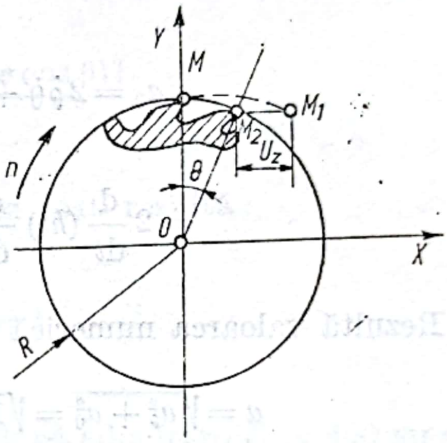


Fig. 8.2

Considerînd că traiectoria MM_1 este parcursă în timpul t rezultă $\theta = \omega t$; $u_z = u \cdot t$, în care $\bar{\omega}$ este viteza unghiulară a discului şi u este avansul materialului de debitat. Atunci :

$$x = R\sin\omega t + u\cdot t\,;\quad y = R\cos\omega t$$

Viteza de tăiere va fi :

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\omega^2R^2 + u^2 + 2u\omega R\cos\omega t},$$

în care :

$$\omega = \pi\cdot n/30.$$

8.3. La derularea furnirului, muchia cuţitului se mişcă după următoarea lege : $\rho = ht$; $\theta = 2\pi t$. Să se afle traiectoria, viteza de derulare şi acceleraţia (h este grosimea furnirului derulat).

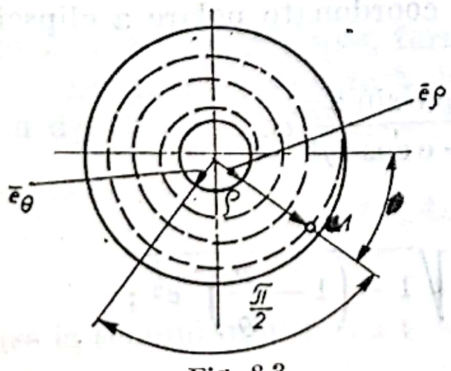


Fig. 8.3

Rezolvare. Traiectoria este

$$\rho = ht = h\cdot\frac{\theta}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}\,\theta\,;$$

traiectoria reprezintă spirala lui Arhimede. Viteza unui punct M, de pe muchia tăietoare în coordonate polare este

$$\bar{v} = v_\rho\cdot\bar{e}_\rho + v_\theta\cdot\bar{e}_\theta\,;\quad v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}(ht) = -h\,;\ (\rho \text{ scade cînd } t \text{ creşte}).$$

Scanned with OKEN Scanner

$$v_\theta = \rho \cdot \frac{d\theta}{dt} = \rho \cdot \frac{d}{dt}(2\pi t) = 2\pi\rho$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{h^2 + 4\pi^2 \cdot \rho^2}.$$

Accelerația punctului M, în coordonate polare este:

$$\bar{a} = a_\rho \cdot \bar{e}_\rho + a_\theta \cdot \bar{e}_\theta.$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\rho\left[\frac{d}{dt}(2\pi t)\right] = -4\pi^2\rho;$$

$$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} =$$

$$= 2\frac{d}{dt}(ht)\frac{d}{dt}(2\pi t) + \rho\frac{d^2}{dt^2}(2\pi t) = -4\pi h.$$

Rezultă valoarea numerică a accelerației:

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \sqrt{16\rho^2 \cdot \pi^4 + 16\pi^2 h^2} = 4\pi\sqrt{\rho^2\pi^2 + h^2}.$$

8.4. În figura 8.4 este reprezentat schematic procedeul de frezare a lemnului prin copiere; șablonul *1*, are profil de elipsă cu ecuația polară $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$ (în care $p = b^2/a$ și $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ și se rotește în jurul punctului O cu o viteză unghiulară constantă ω, împingînd tija AB la capătul căreia se află freza. Să se afle viteza și accelerația tijei.

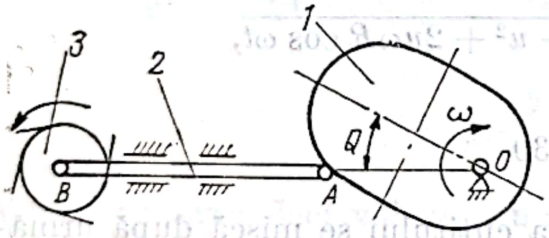


Fig. 8.4

Rezolvare. Se pornește de la ecuația în coordonate polare a elipsei. Viteza tijei este:

$$v = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{-p\,e\sin\theta}{(1 - e\cos\theta)^2}\omega.$$

Înlocuind valorile:

$$p = b^2/a,\quad e^2 = (b^2 - a^2)/a^2 \text{ și } \sin\theta = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{p}{\rho}\right)^2 e^{\frac{1}{2}}};$$

rezultă expresia vitezei:

$$v = -\frac{\rho\omega}{b}\sqrt{2a\rho - \rho^2 - b^2};$$

Accelerația tijei este :

$$a = \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} =$$

$$= \frac{-pe^2\cos\theta(1-e\cos\theta)^2 + pe^2\omega^2\sin^2\theta\cdot 2(1-e\cos\theta)}{(1-e\cos\theta)^4} =$$

$$= \frac{-pe\omega^2\cos\theta + pe^2\omega^2\cos^2\theta + 2pe^2\omega^2\sin^2\theta}{(1-e\cos\theta)^3} =$$

$$= \frac{pe\omega^2[2e - \cos\theta(1+e\cos\theta)]}{(1-e\cos\theta)^3}$$

sau făcînd înlocuiri pentru valorile lui p, e și $\cos\theta$ rezultă :

$$a = \frac{\omega^2 r}{b^2}(3a\rho - 2\rho^2 - b^2).$$

8.5. Dintr-un buștean, avînd diametrul după cilindrare $D = 400$ mm se derulează furnir avînd grosimea $h = 1{,}1$ mm ; știind că diametrul rolei este $d = 140$ mm să se determine : a) lungimea furnirului derulat ; *b*) durata derulării, știind că bușteanul are o mișcare de rotație cu o turație $n = 70$ rot/min.

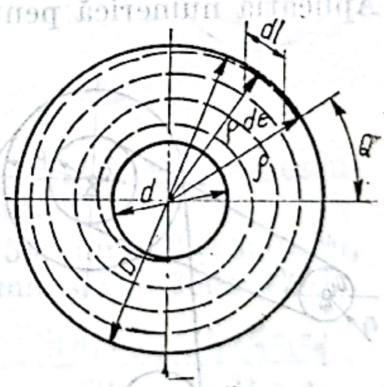


Fig. 8.5

Rezolvare. a) Derularea se face după o traiectorie de ecuații parametrice $\rho = ht$ și $\theta = 2\pi t$; deci

$$\rho = \frac{h}{2\pi}\theta,$$

în care h este grosimea furnirului.

Lungimea elementară dl, la variația razei cu $d\rho$ va fi :

$$dl = \rho\, d\theta\,;\ \text{dar}\ \theta = \frac{2\pi\rho}{h}\ \text{și}\ d\theta = -\frac{2\pi}{h}d\rho$$

(se ia semnul minus căci θ crește, iar ρ scade), atunci :

$$dl = -\frac{2\pi}{h}\rho\cdot d\rho.$$

Prin integrare rezultă:

$$\int_0^l dl = -\frac{2\pi}{h}\int_R^r \rho d\rho;\quad L = -\frac{2\pi}{h}\frac{\rho^2}{2}\Big|_R^r = \frac{\pi}{h}(R^2 - r^2) = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4H}.$$

Aplicaţia numerică pentru $h = 1{,}1$ mm, $D = 400$ mm şi $d = 140$ mm:

$$L = \frac{\pi}{4h}(D^2 - d^2) = \frac{3{,}14}{4 \cdot 1{,}1}(400^2 - 140)^2 = 10 \text{ mm} = 100 \text{ m}.$$

b) Viteza de derulare este

$$|\bar{v}| = \sqrt{h^2 + 4\pi^2 \cdot \rho^2} \cong 2\pi\rho,$$

dar $v = \frac{dl}{dt}$; atunci $dl = v \cdot dt = 2\pi\rho\, dt = 2\pi h \cdot t \cdot dt$ deoarece $\rho = ht$.
Prin integrare rezultă:

$$L = \int_0^L dl = 2\pi h \int_0^T t dt = 2\pi h \frac{t^2}{2}\Big|_0^T = 2\pi h \frac{T^2}{2};$$

dar

$$\theta = 2\pi t;\quad \frac{d\theta}{dt} = 2\pi = \omega;\quad T = \sqrt{\frac{2L}{\omega h}};\quad \omega = \frac{\pi n}{30};\quad \text{deci: } T = \sqrt{\frac{60\,L}{\pi n h}}.$$

Aplicaţia numerică pentru $n = 70$ rot/min, $L = 100$ m şi $h = 1{,}1$ mm;

$$T = \sqrt{\frac{60\,L}{\pi n h}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 100}{3{,}14 \cdot 70 \cdot 1{,}1}10^3} =$$

$$= 10^3\sqrt{\frac{6}{3{,}14 \cdot 7 \cdot 1{,}1 \cdot 10}} = 156 \text{ s}.$$

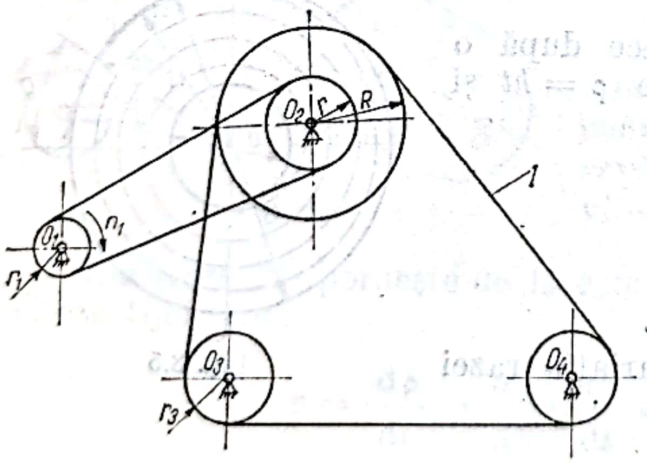


Fig. 8.6

8.6. În figura 8.6 este reprezentată transmisia utilizată la antrenarea benzii de şlefuit *1*, la o maşină de şlefuit cu bandă lată cu contact de jos. Se cere să se determine viteza benzii şi viteza unghiulară a axului O_3. Se cunosc: n_1, r_1, R, r_3 şi r.

R. $v = \frac{\pi n_1 r_1 R}{30r}$; $\omega_3 = \frac{\pi n_1 r_1 R}{30 r r_3}$.

8.7. Transportorul de presărarea aşchiilor *4*, este antrenat de motorul electric de turaţie $n_1 = 1500$ rot/min, prin intermediul transmisiei

prezentate în figura 8.7. Să se afle viteza transportorului știind că se cunosc : $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm ; $r = 6$ cm, $R_2 = 6{,}5$ cm și $R = 14$ cm.

R. $v = \dfrac{r_1 r_2 r}{R R_2}\,\omega_1 = \dfrac{r_1 r_2 r}{R_2 R} \cdot \dfrac{\pi n_1}{30} = 15{,}7\,\dfrac{\text{cm}}{\text{s}} = 9{,}4\,\dfrac{\text{m}}{\text{min}}$.

8.8. Discul circular, al unui ferăstrău circular pendular pentru retezat, este antrenat ca în figura 8.8, prin intermediul unei transmisii cu curele. Să se determine viteza de tăiere și accelerația unui punct M de pe circumferința discului știind că acesta are un diametru $D = 700$ mm.

R. $v_2 = \dfrac{\pi n R}{30} = 54{,}7$ m/s ; $a_M = \dfrac{\pi^2 n^2 R}{900} = 8650$ m/s^2.

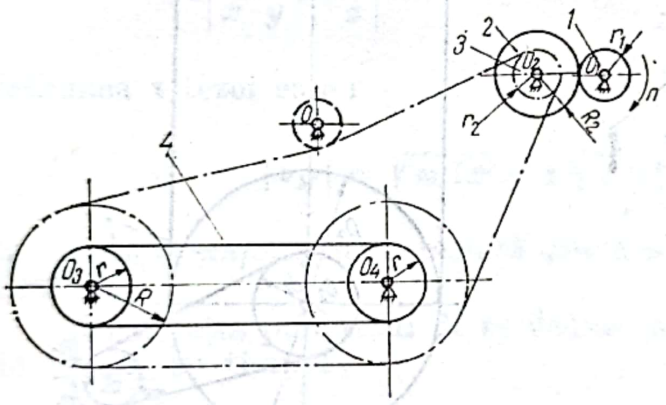


Fig. 8.7

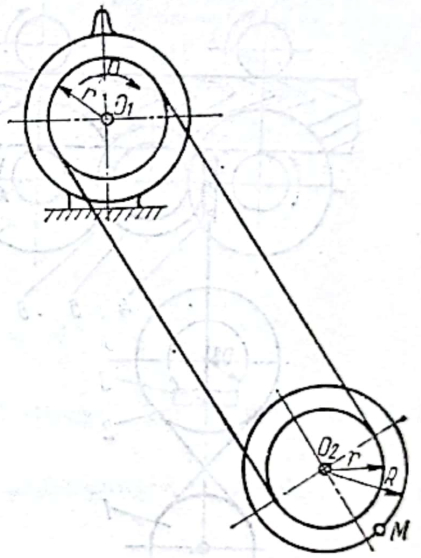


Fig. 8.8

8.9. La un gater cu avans continuu, sistemul de avans este reprezentat în figura 8.9. Se cere viteza de avans a bușteanului.

Aplicația numerică pentru : $D_1 = 350$ mm, $D_2 = 500$ mm, $D_3' = 300$ mm, $D_3 = 280$ mm $z_4 = 2$, $z_5 = 50$, $z_6 = 20$, $z_7 = 34$, $D = 180$ mm și $n_1 = 300$ rot/min.

R. $u = \dfrac{\pi n_1 D_8}{60} \cdot \dfrac{D_1 D_3' z_4 z_6}{D_2 D_3 z_5 z_7}$.

8.10. Volantul inferior, 1, (fig. 8.10) al ferăstrăului panglică este antrenat de motor prin intermediul unei transmisii cu curele ; la volantul superior 2 mișcarea este transmisă de pînza tăietoare. Cunoscînd turația n_1 a roții motoare se cere să se determine viteza și accelerația unui punct M de pe volantul 2.

De asemenea, știind că roata motoare ajunge la turația n_1 în 8 s să se determine viteza și accelerația punctului M după 6 s de la pornire.

Aplicație numerică pentru :

$n_1 = 1000$ rot/min, $D_1 = 350$ mm, $d_2 = 600$ mm, $D_2 = 1500$ mm.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Viteza punctului M se determină astfel:

$$n_1 D_1 = n_2 d_2;\ n_2 = n_1 \frac{D_1}{d_2};\ v_M = \omega_2 \cdot \frac{D_2}{2} = \frac{\pi n_2}{60} D_2 = \frac{\pi n_1 D_2 D_2}{60\, d_2} = 46 \text{ m/s}.$$

Accelerația punctului M are numai componentă normală:

$$a_M = \omega_2^2 \cdot \frac{D_2}{2} = \left(\frac{\pi n_2}{30}\right)^2 \cdot \frac{D_2}{2} = \left(\frac{\pi n_1 D_1}{30\, d_2}\right)^2 \cdot \frac{D_2}{2} = 2830 \text{ m/s}^2.$$

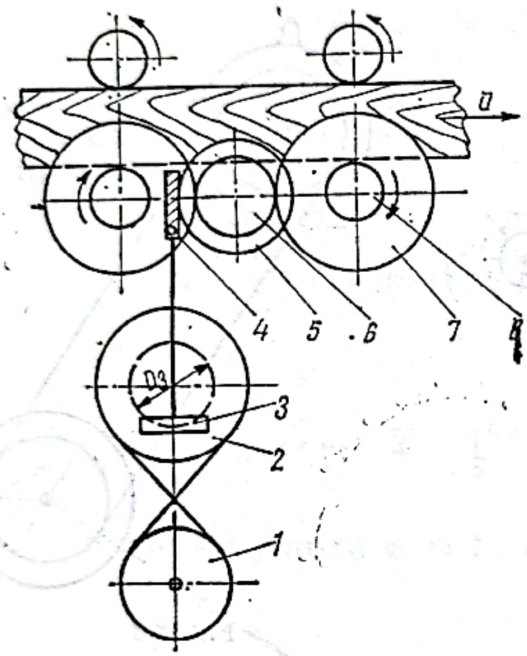


Fig. 8.9

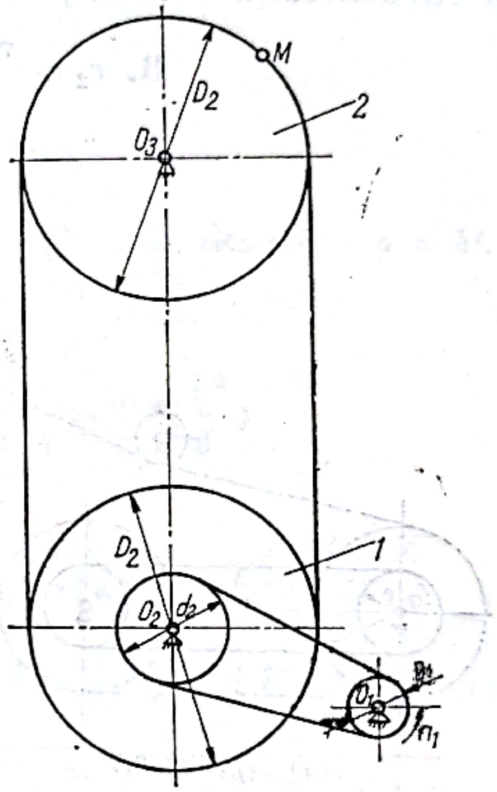


Fig. 8.10

Viteza și accelerația punctului M după 6 secunde de la pornire se determină cu relația:

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_2}{t} = \frac{\pi n_1 D_1}{30 \cdot t \cdot d_2} = 7{,}63 \text{ rad/s}^2,$$

iar ω_2 la timpul $t_1 = 6$ s, este:

$$(\omega_2)_{t=6} = \varepsilon_2 t_1 = 7{,}63 \cdot 6 = 45{,}78 \text{ rad/s}.$$

Atunci:

$$v_{1M} = (\omega_2)_{t=6} \cdot \frac{D_2}{2} = 45{,}78 \cdot \frac{1{,}5}{2} = 34{,}3 \text{ m/s}.$$

Accelerația punctului M la momentul $t_1 = 6$ s este:

$$a_{1M} = \frac{D_2}{2} \sqrt{\varepsilon_2^2 + (\omega_2)_{t=6}^4} = 1557 \text{ m/s}^2.$$

8.11. În figura 8.11 este reprezentat un burghiu elicoidal pentru prelucrarea lemnului; știind că burghiul are o mișcare elicoidală ce provine din compunerea unei rotații de turație n cu o translație cu viteza u (u este viteza mișcării de avans). Se cere să se determine expresiile vitezei și accelerației unui punct M situat pe muchia tăietoare.

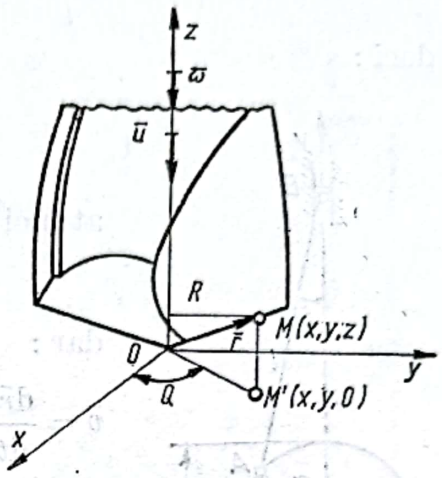


Fig. 8.11

Rezolvare. Viteza punctului M este suma vectorială a vitezelor în mișcările simple:

$$\bar{v}_M = \bar{u} + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Analitic se obține:

$$\bar{v}_M = -u\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -u\bar{k} + \omega y\bar{i} - \omega x\bar{j}.$$

Mărimea vitezei este:

$$|\bar{v}_M| = \sqrt{\omega^2(x^2+y^2)+u^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + u^2},$$

în care $\omega = \pi n/30$ și R reprezintă distanța de la punctul M la axa mișcării elicoidale.

Accelerația punctului M se deduce prin derivarea vectorului viteză în raport cu timpul:

$$\bar{a}_M = \dot{\bar{u}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{v} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}) = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}),$$

deoarece $\bar{u}$ și $\bar{\omega}$ sînt constante.

În expresie analitică $\bar{a}_M$ este:

$$\bar{a}_M = \bar{\omega} \times (\omega y\bar{i} - \omega x\bar{j}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ \omega y & -\omega x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x\bar{i} - \omega^2 y\bar{j},$$

iar în mărime

$$|\bar{a}_M| = \sqrt{\omega^4(x^2+y^2)} = \omega^2 R.$$

8.12. Cadrul cu pînze al gaterului este antrenat în mișcare alternativă printr-un sistem bielă-manivelă. Se cere expresia vitezei de tăiere.

Rezolvare. Viteza de tăiere este egală cu viteza punctului B, al mecanismului bielă-manivelă de antrenare a cadrului cu pînze.

Față de un sistem de referință xOy, vectorul de poziție al punctului B va fi:

$$\bar{r} = y\bar{j} = (R\cos\alpha + l\cos\beta)\bar{j};$$

Scanned with OKEN Scanner

dar în ΔOAB aplicînd teorema sinusurilor rezultă :

$$\frac{\sin\alpha}{l} = \frac{\sin\beta}{R}\,;\quad \sin\beta = \frac{R}{l}\sin\alpha\,;$$

deci :

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\alpha}}{l}\,;$$

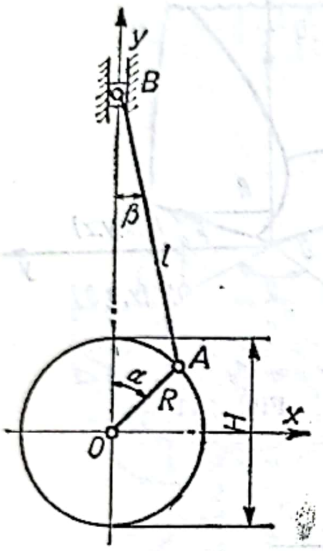


Fig. 8.12

atunci :

$$\bar{r} = (R\cos\alpha + \sqrt{l^2 - R^2\sin^2\alpha})\,\bar{j}\,;$$

dar :

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \left(-R\cdot\sin\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{-2R^2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\alpha}}\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right)\bar{j} =$$

$$= -\left(R\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} + \frac{R^2\sin 2\alpha}{2l\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}\sin^2\alpha}}\,\frac{d\alpha}{dt}\right)\bar{j}.$$

Se notează :

$$\frac{R}{l} = \lambda\,;\quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega,$$

deci :

$$\bar{v} = -R\omega\left(\sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\,\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\alpha}}\right)\bar{j},$$

sau :

$$|\bar{v}| = R\omega\left(\sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\,\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\alpha}}\right).$$

Pentru calcule, în practică : $|\bar{v}| \cong R\omega\left(\sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha\right)$, deoarece $\lambda < 1$ și $|\sin\alpha| \leqslant 1$ deci termenul $(\lambda^2\sin^2\alpha)$ se poate neglija. Expresia vitezei pentru diferite valori ale unghiului α se dă în tabelul următor :

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2
v	0	$\frac{\omega R}{2}(\lambda + \sqrt{2})$	$R\omega$	$\frac{R\omega}{2}(1 + \sqrt{2})$	0	$-\frac{R\omega}{2}(\lambda + \sqrt{2})$	$-\omega R$	$-\frac{\omega R}{2}(\lambda + \sqrt{2})$	0

Aplicația numerică pentru : $n = 300$ rot/min, $R = 300$ mm și $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rezultă $v = 9{,}24$ m/s.

Scanned with OKEN Scanner

8.13. În figura 8.13 este reprezentat mecanismul biela manivelă dezaxat, utilizat la gater. Să se determine expresiile vitezei şi acceleraţiei punctului B situat pe cadrul cu pînze tăietoare. Se cunosc $\omega = \text{ct}$, $OA = R$, $AB = L$ şi a.

Rezolvare. Spaţiul parcurs de punctul B este :

$$y_B = R\cos\alpha + L\cos\beta.$$

Din triunghiul dreptunghic ABA_1 se deduce :

$$\sin\beta = \frac{AA_1}{L} = \frac{R\sin\alpha + a}{L}$$

deci :

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{R\sin\alpha + a}{L}\right)^2}.$$

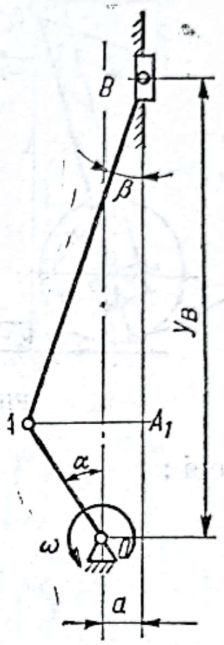


Fig. 8.13

Se dezvoltă în serie binomul :

$$\left[1 - \left(\frac{R\sin\alpha + a}{L}\right)^2\right]^{1/2}$$

şi se obţine :

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a + R\sin\alpha}{L}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{a + R\sin\alpha}{L}\right)^4 + \ldots,$$

şi dacă se iau în considerare doar primii doi termeni ai seriei ; atunci :

$$y_B = R\cos\alpha + L - \frac{(a + R\sin\alpha)^2}{2L}.$$

Viteza punctului B se determină prin derivarea spaţiului în raport cu timpul :

$$v_B = \frac{dy_B}{dt} = -R\omega\sin\alpha - \frac{a + R\sin\alpha}{L}R\omega\cos\alpha =$$

$$= -R\omega\left(\sin\alpha + \frac{a}{L}\cos\alpha + \frac{R}{2L}\sin 2\alpha\right).$$

Acceleraţia punctului B este :

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = -R\omega^2\left(\cos\alpha - \frac{a}{L}\sin\alpha + \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right).$$

8.14. Un ferăstrău circular pendular de retezat are construcţia din figura 8.14. Discul circular O_2 de diametru $D = 500$ mm se roteşte cu o turaţie $n = 3000$ rot/min iar suportul discului, bara O_1O_2 de lungime $l = 2000$ mm are o viteză unghiulară $\omega_1 = 1$ rad/s. Se cere să se determine: poziţia axei instantanee de rotaţie şi viteza punctelor $O_2(v_{02})$ şi M, (v_M = viteza de tăiere).

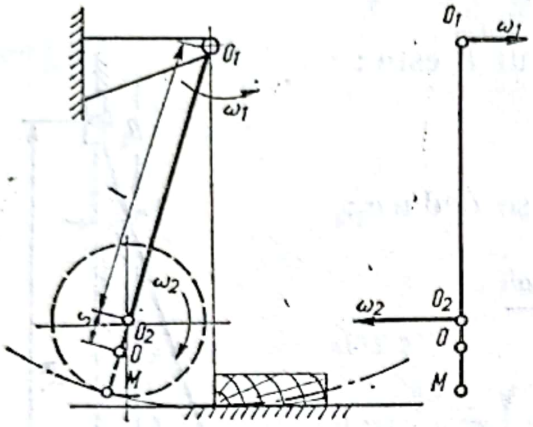


Fig. 8.14

Rezolvare. Se consideră că punctul 0 este punct de viteză nulă;

$\bar{v}_0 = 0$ şi se determină distanţa s în această ipoteză:

$$\bar{v}_0 = \overline{OO_2} \times \bar{\omega}_2 - \overline{OO_1} \times \bar{\omega}_1 = O;$$

$$\omega_2 > \omega_1;$$

$$|\bar{v}_0| = s\,\omega_2 - (l + s)\,\omega_1 = 0;$$

deci:

$$s = \frac{\omega_1 l}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Deci axa instantanee de rotaţie este perpendiculară pe dreapta O_1O_2 la o distanţă egală cu $(l + s)$ faţă de punctul O_1.
Viteza punctului O_2 este

$$\bar{v}_{02} = \overline{O_1O_2} \times \bar{\omega}_1;\ |\bar{v}_{02}| = l\,\omega_1.$$

Viteza punctului M:

$$\bar{v}_M = \overline{MO_2} \times \bar{\omega}_2 - \overline{MO_1} \times \bar{\omega}_1, \text{ sau: } |\bar{v}_M| = \frac{D}{2}\,\omega_2 - \left(l + \frac{D}{2}\right)\omega_1.$$

Aplicaţie numerică pentru:

$$\omega_1 = 1 \text{ rad/s},\ \omega_2 = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 3000}{30} = 314 \text{ rad/s};\ l = 2000 \text{ mm şi } D = 500 \text{ mm}$$

Deci:

$$s = \frac{\omega_1 l}{\omega_2 - l_1} = \frac{1.2000}{314 - 1} = 6{,}38 \text{ mm};\ v_{02} = l\,\omega_1 = 2000 \cdot 1 = 2000 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s};$$

$$v_M = \frac{D}{2}\,\omega_2 - \left(1 + \frac{D}{2}\right)\omega_1 = 250 \cdot 314 - 2250 \cdot 1 = 76250 \text{ mm/s} = 76{,}25 \text{ m/s}.$$

8.15. În figura 8.15 este reprezentată schema de acţionare a cilindrilor de dozare, la o presă de extrudarea plăcilor din aşchii. Se cere expresia

Scanned with OKEN Scanner

vitezei unghiulare la axul O_3. Se cunosc: ω_1, r_2, r, R, $AB = L$ şi r_3; *1* — volant, *2* — piston, *3* — cremalieră, *4* — roţi dinţate, coaxiale cu cilindrii de dozare.

Rezolvare. Presupunînd că nu există alunecare între curea şi roata pe care este înfăşurată rezultă:

$$r_1 \omega_1 = R \omega_2;$$

deci $\omega_2 = \dfrac{r_1 \omega_1}{R}$. Viteza punctului B se determină în felul următor

$$s_B = r \cos \alpha + L \sqrt{1 - \left(\frac{r}{L} \sin \alpha\right)^2} \cong$$

$$\cong r \cos \alpha + L - \frac{r^2}{2L} \sin^2 \alpha$$

şi atunci:

$$v_B = \frac{ds_B}{dt} = -\left(r \sin \alpha + \frac{r^2}{2L} \sin 2\alpha\right) \cdot \frac{d\alpha}{dt} =$$

$$= -r \omega_2 \left(\sin \alpha + \frac{r}{2L} \sin 2\alpha\right),$$

sau în valoare absolută

$$|\bar{v}_B| = r \omega_2 \cdot \left(\sin \alpha + \frac{r}{2L} \sin 2\alpha\right).$$

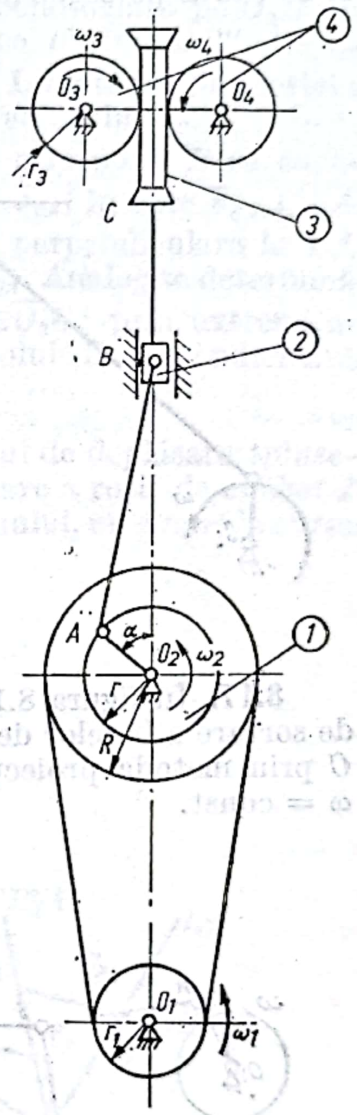


Fig. 8.15

Atunci viteza unghiulară la axul O_3 este:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{r_3} = \frac{r \omega_2}{r_3} \left(\sin \alpha + \frac{r}{2L} \sin 2\alpha\right) = \frac{r r_1 \omega_1}{r_3 R} \left(\sin \alpha + \frac{r}{2L} \sin 2\alpha\right).$$

8.16. Pentru mecanismul de avans intermitent al benzii transportoare a aparatului de parafinare a beţelor de chibrituri, să se traseze planul de viteze.

Rezolvare. Viteza lui A este $v_A = O_1 A \cdot \omega$ şi este perpendiculară pe O_1A. Viteza lui B se determină din relaţia $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, în care se cunoaşte $\bar{v}_{BA} \perp BA$ şi $\bar{v}_B \perp O_2B$.

Se consideră un pol P şi se construieşte la scară vectorul $\bar{v}_A$. Prin extremitatea lui $\bar{v}_A$ se construieşte o dreaptă perpendiculară pe dreapta

BA; prin polul P se construieşte o dreaptă perpendiculară pe O_2B. Rezultă $\bar{v}_B$ şi $\bar{v}_{BA}$.

Viteza lui C are aceeaşi direcţie şi sens cu $\bar{v}_B$; pentru a găsi mărimea ei se caută pe segmentul pb un punct c astfel că:

$$\frac{Pc}{cb} = \frac{O_2C}{CB}.$$

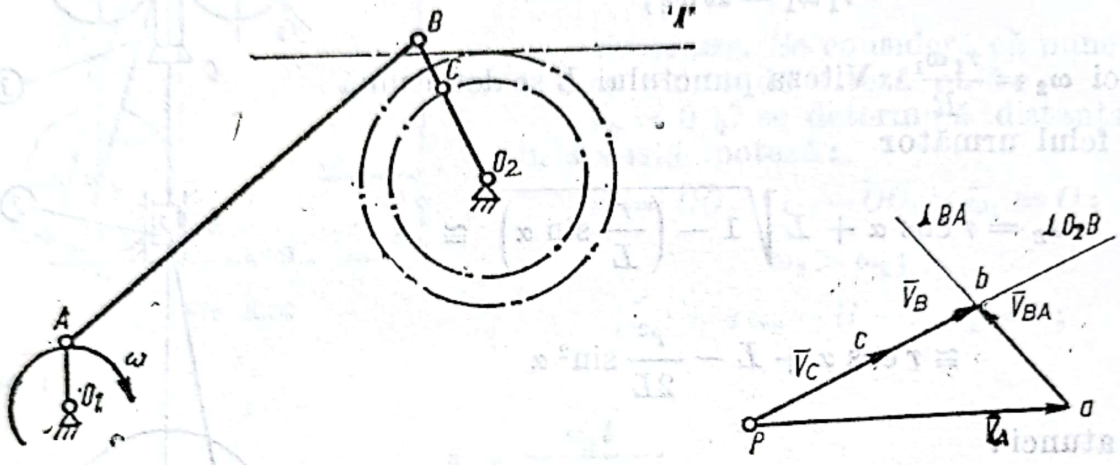


Fig. 8.16

8.17. În figura 8.17 este reprezentat mecanismul de acţionare a sitei de sortare a beţelor de chibrituri. Să se determine vitezele punctelor B şi C prin metoda proiecţiilor şi metoda poligonului vitezelor. Se cunoaşte $\omega = \text{const}$.

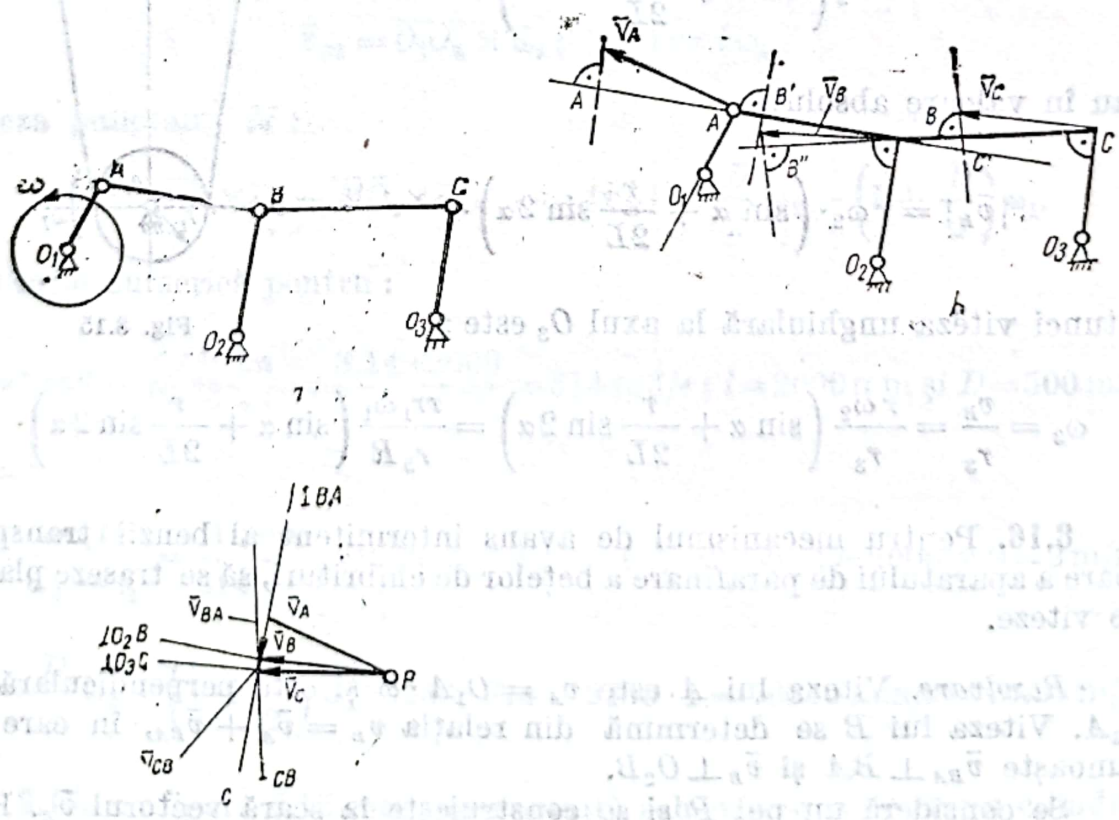


Fig. 8.17

Rezolvare. În figura 8.17, *b* este dată metoda proiecţiilor. Viteza punctului A se cunoaşte $|\bar{v}_A| = \omega \cdot O_1A$ şi $\bar{v}_A \perp O_1A$. Se proiectează $\bar{v}_A$ pe dreapta $\overline{AB}$ şi se ia pe $\overline{AB}$ segmentul $\overline{BB'} = \overline{AA'}$ şi prin B' se duce o perpendiculară la $\overline{AB}$. Intersecţia acesteia cu perpendiculara pe O_2B ne dă $\bar{v}_B$. Se proiectează $\bar{v}_B$ pe direcţia lui BC şi se obţine BB''. Se ia $\overline{BB''} = \overline{CC'}$ şi prin C' se duce perpendiculara pe BC. La intersecţia acesteia cu perpendiculara pe O_3c se obţine extremitatea vectorului $\bar{v}_C$.

În figura 8.17, *c* este dat poligonul vitezelor; prin polul P se construieşte $\bar{v}_A$. Viteza $\bar{v}_B$ se obţine din relaţia $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, în care $\bar{v}_{BA} \perp \overline{BA}$ şi $\bar{v}_B \perp \overline{O_2B}$; deci prin extremitatea lui $\bar{v}_A$ se duce perpendiculara la BA iar prin pol perpendiculara pe O_2B. Se obţine $\bar{v}_B$ şi $\bar{v}_{BA}$. Analog se determină $\bar{v}_C$ şi anume: $\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}$ în care $\bar{v}_{CB} \perp \overline{CB}$ şi $\bar{v}_C \perp \overline{O_3C}$; prin extremitatea lui $\bar{v}_B$ se duce perpendiculara pe CB şi prin polul P perpendiculara pe O_3C. Se obţine $\bar{v}_C$ şi $\bar{v}_{CB}$.

8.18. În figura 8.18 este reprezentat mecanismul de deplasarea pînzelor de gater O_1DE şi mecanismul O_1ABC, de antrenare a roţii de clichet *1* prin clichetul C al mecanismului de avans al buşteanului, cu avans la cursa

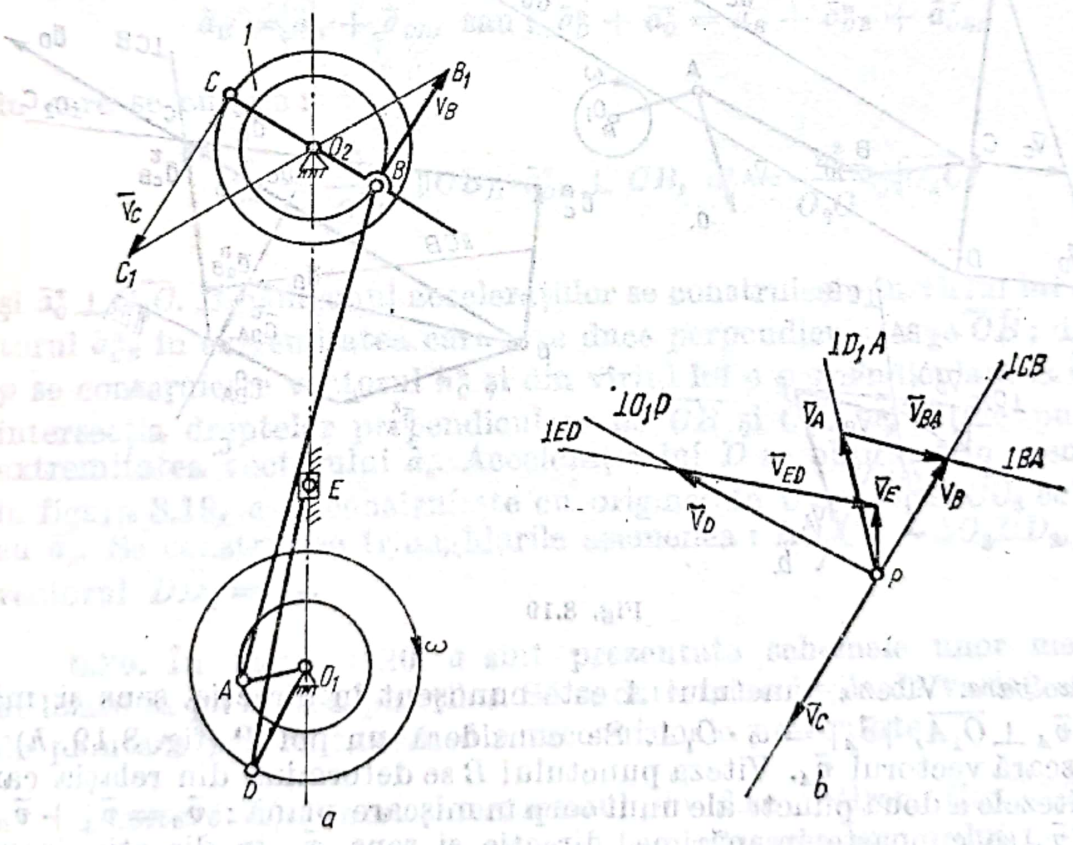


Fig. 8.18

ascendentă. Să se determine vitezele punctelor E, B şi C prin metoda poligonului vitezelor.

Rezolvare. Viteza punctului D se cunoaşte în mărime, direcţie şi sens: $\bar{v}_D \perp \overline{O_1D}$, $|\bar{v}_D| = \omega \cdot O_1D$; viteza punctului E se determină cu relaţia $\bar{v}_E = \bar{v}_D + \bar{v}_{ED}$ în care $\bar{v}_{ED}$ se cunoaşte în direcţie ($\perp \overline{ED}$) şi $\bar{v}_E$ este paralelă

Scanned with OKEN Scanner

cu suportul culisei E. Se alege un pol P (fig. 8.18, b) şi se ia la scară $\bar{v}_D$ cu originea în P, prin extremitatea lui $\bar{v}_D$ se duce perpendiculara pe FD iar prin polul P o paralelă la suportul culisei F. Se obţine $\bar{v}_{ED}$ şi $\bar{v}_E$.

Viteza punctului A se cunoaşte în mărime, direcţie şi sens : $\bar{v}_A \perp \overline{O_1A}$ şi $|\bar{v}_A| = \omega \cdot O_1A$. Viteza $\bar{v}_B$ se determină din relaţia : $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, în care $\bar{v}_{BA} \perp \overline{BA}$ şi $\bar{v}_B \perp \overline{CB}$; în planul vitezelor prin extremitatea lui v_A se duce o perpendiculară pe $\overline{BA}$ şi prin pol perpendiculară pe $\overline{CB}$ şi rezultă $\bar{v}_{BA}$ şi $\bar{v}_B$. Viteza punctului C se obţine construind triunghiurile asemenea $\Delta O_2BB_1 \sim \Delta O_1CC_1$ în care $\overline{BB_1}$ este echipolent cu $\bar{v}_B$ iar $\overline{CC_1} = \bar{v}_C$. Se transpune în poligonul vitezelor vectorul $\bar{v}_C$.

8.19. Să se determine vitezele şi acceleraţiile punctelor C şi D aflate pe capul de presărarea aşchiilor la maşina de împîslire, prin metoda poligonului vitezelor şi poligonului acceleraţiilor. Mecanismul de acţionarea capului de presărare a aşchiilor este reprezentat în figura 8.19, a. Se cunoaşte ω = constant.

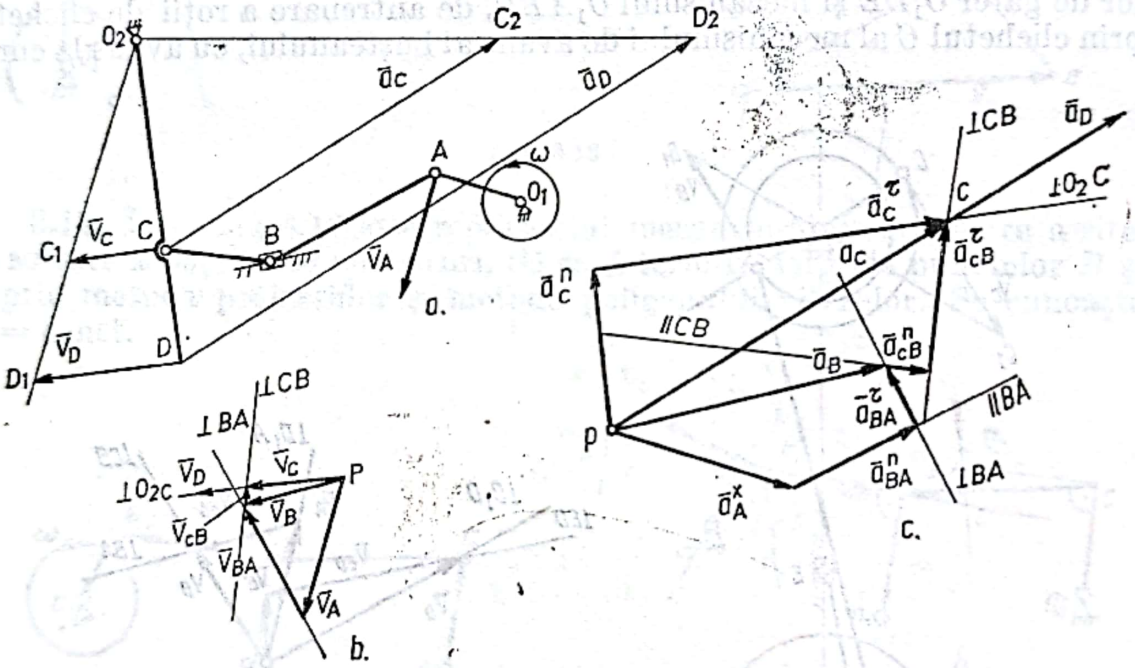


Fig. 8.19

Rezolvare. Viteza punctului A este cunoscut în direcţie, sens şi mărime : $\bar{v}_A \perp \overline{O_1A}$, $|\bar{v}_A| = \omega \cdot O_1A$. Se consideră un pol P (fig. 8.19, h) şi se ia la scară vectorul $\bar{v}_A$. Viteza punctului B se determină din relaţia care leagă vitezele a două puncte ale unui corp în mişcare plană : $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, în care $\bar{v}_A$ se cunoaşte în mărime, direcţie şi sens, $\bar{v}_B$ în direcţie (paralelă cu suportul culisei) şi $\bar{v}_{BA}$ în direcţie ($\perp \overline{BA}$). Se duce prin vîrful lui $\bar{v}_A$ o perpendiculară pe $\overline{BA}$ şi prin polul P o paralelă la suportul culisei B. Rezultă $\bar{v}_B$ şi $\bar{v}_{BA}$. Analog $\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}$ în care $\bar{v}_B$ este cunoscută din poligonul vitezelor, $\bar{v}_{CB}$ cunoscută ca direcţie ($\perp CB$) şi $\bar{v}_C \perp \overline{O_2C}$. Se trasează deci prin vîrful lui $\bar{v}_B$, o perpendiculară pe $\overline{CB}$ şi prin pol o perpendiculară pe $\overline{O_2C}$. Se obţin $\bar{v}_{CB}$ şi $\bar{v}_C$. Viteza punctului D se determină prin ase-

Scanned with OKEN Scanner

mănare : cunoscînd viteza $\bar{v}_C = \overline{CC_1}$ (fig. 8.19, *a*) se construiesc triunghiurile $\Delta O_2CC_1 \sim \Delta O_2DD_1$, în care $\overline{DD_1} = \bar{v}_D$ şi se transpune în poligonul vitezelor (fig. 8.19, *b*).

Acceleraţia punctului A are numai componentă normală :

$$a_A = a_A^n = O_1A \cdot \omega^2.$$

Se consideră un pol p (fig. 8.19, *c*) şi se construieşte vectorul $\bar{a}_A^n$ cunoscut în mărime, direcţie şi sens ($\| \overline{AO_1}$) orientat de la A spre O_1.

Acceleraţia punctului B se determină din relaţia : $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$, sau : $\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$, în care $a_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{BA}$ ($\| \overline{BA}$), $\bar{a}_{BA}^\tau$ cunoscută ca direcţie ($\perp \overline{BA}$) şi $\bar{a}_B$ paralelă cu suportul culisei B.

În poligonul acceleraţiilor se construieşte prin vîrful lui $\bar{a}_A^n$, vectorul $\bar{a}_{BA}^n$; prin vîrful lui $\bar{a}_{BA}^n$ se duce perpendiculara pe $\overline{BA}$ iar prin pol paralela la suportul culisei. B. Se obţine $\bar{a}_{BA}^n$, $\bar{a}_{BA}^\tau$ şi $\bar{a}_B$.

Acceleraţia punctului C se determină folosind relaţia :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}, \text{ sau : } \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau,$$

în care se cunosc :

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{CB} (\| CB), \ \bar{a}_{CB}^\tau \perp CB, \ a_C^n = \frac{v_C^2}{O_2O} (\| \overline{O_2C})$$

şi $\bar{a}_C^\tau \perp \overline{O_2C}$. În poligonul acceleraţiilor se construieşte în vîrful lui $\bar{a}_B$, vectorul $\bar{a}_{CB}^n$ în extremitatea căruia se duce perpendiculara pe $\overline{CB}$; din polul p se construieşte vectorul $\bar{n}_C^n$ şi din vîrful lui o perpendiculară la $\overline{O_2C}$. La intersecţia dreptelor perpendiculare pe $\overline{CB}$ şi $\overline{O_2C}$ se obţine punctul c, extremitatea vectorului $\bar{a}_c$. Acceleraţia lui D se obţine prin asemănare : în figura 8.19, *c* se construieşte cu originea în C vectorul $\overline{CC_2}$ echipolent cu $\bar{a}_c$. Se construiesc triunghiurile asemenea : $\Delta O_2CC_2 \sim \Delta O_2DD_2$, în care vectorul $\overline{DD_2} = \bar{a}_D$.

8.20. În figura 8.20, *a* sînt prezentate schemele unor mecanisme utilizate la plantarea puieţilor. Să se determine legile de variaţie a vitezei de plantare pentru fiecare din mecanismele prezentate.

Rezolvare : a) Pentru mecanismul de disc rotitor, (fig. 8.20, *a*, 1) componenta orizontală v_x a vitezei, la deplasarea punctului material pe arcul de cerc $\overset{\frown}{BB_1}$ are expresia :

$$v_x = \omega R \cos \alpha,$$

în care R este raza discului, ω este viteza unghiulară de rotaţie a discului şi α unghiul între raza punctului şi direcţia verticală.

Scanned with OKEN Scanner

Graficul variaţiei componentei v_x a vitezei se dă în figura 8.20, *b*, 2.

b) Pentru mecanismul cu braţ rotitor (fig. 8.20, *a*, 2) variaţia componentei orizontale v_x a vitezei la deplasarea punctului material pe arcul $\overset{\frown}{BB_1}$ are expresia:

$$v_x = \omega R \cos \alpha,$$

în care R este lungimea braţului rotitor, ω este viteza unghiulară şi α este unghiul de poziţie.

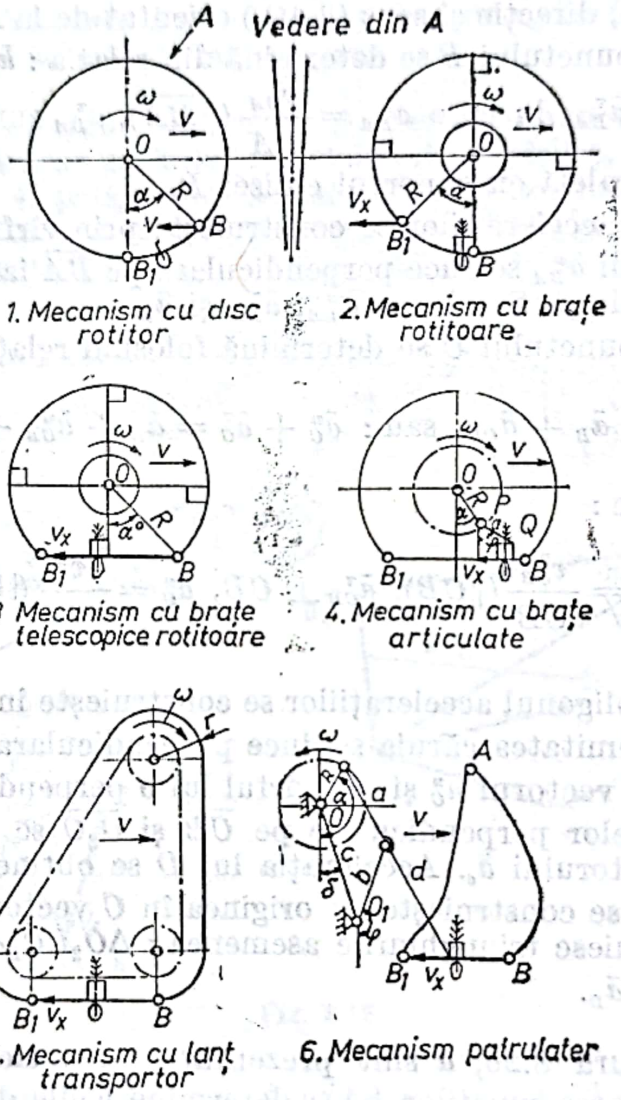


Fig. 8.20 a

Legea de variaţie a componentei orizontale v_x a vitezei este dată în graficul din figura 8.20, *b*, 2.

c) Componenta v_x a vitezei, în cazul mecanismului cu braţe telescopice, variază pe distanţa BB_1 după legea:

$$v_x = \omega R \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos^2 \alpha},$$

în care α_0 este unghiul iniţial (BOO_1) iar α este unghiul de poziţie.

Legea de variaţie componentei v_x este redată în graficul 8.20, *b*, 3.

d) În figura 8.20, *a*, 4 este reprezentat mecanismul cu bare articulate, componenta orizontală v_x a vitezei are expresia :

$$v_x = \omega R\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}\right),$$

în care α este unghiul de poziţie al barei OP ; φ este unghiul de poziţei al barei PQ ; R este lungimea barei OP şi ω este viteza unghiulară a barei OP.

Graficul variaţiei lui v_x este dat în figura 8.20, *b*, 4.

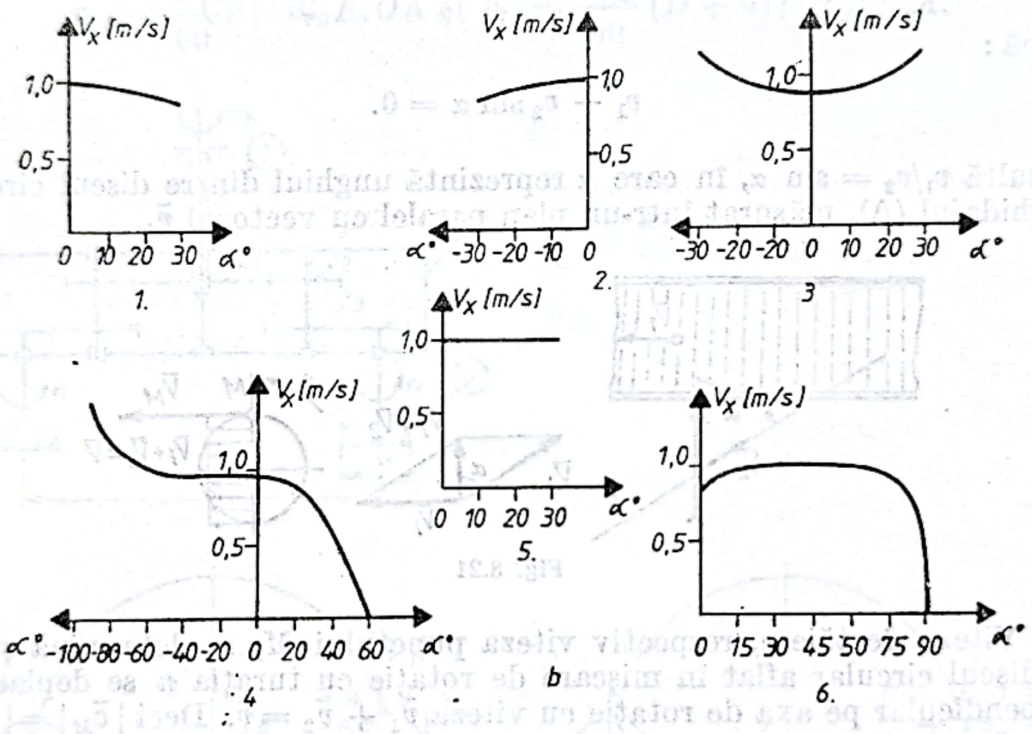


Fig. 8.20 b

Mecanismul cu lanţ transportor este reprezentat în figura 8.20, *a*, 5. Viteza v_x, pe distanţa de lucru BB_1 este constantă şi egală cu $v_x = \omega r$, în care r, este raza roţii conducătoare şi ω este viteza unghiulară. Graficul vitezei v_x este reprezentat în figura 8.20, *b*, 5.

f) În figura 8.20, *a*, 6 este prezentată schema de lucru a mecanismului patrulater. La deplasarea punctului material pe distanţa BB_1 viteza v_x are expresia :

$$v_x = \omega R\left[\frac{d}{a}\cos\alpha - \frac{(a+d)\,b}{aR}\cos\alpha\,\frac{\sin(\alpha-\varphi)+\dfrac{c}{b}\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\alpha-\varphi)+\dfrac{c}{R}\sin(\varphi-\delta)}\right],$$

în care a, b, c, d sînt lungimile barelor mecanismului ; δ este unghiul între bara c şi verticală, φ este unghiul între bara b şi verticală.

Graficul variaţiei vitezei v_x este redat în figura 8.20, *b*, 6.

8.21. Covorul de fibre la fabricarea P.F.L. se deplasează pe o bandă transportoare cu viteza $\bar{v}_1$, iar discul circular pentru formatizat panouri avînd o turaţie de n rot/min se deplasează într-un ghidaj (Δ) cu viteza $\bar{v}_2$ (fig. 8.21). Să se determine : relaţia între $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ în condiţia obţinerii de panouri dreptunghiulare şi expresia vitezei de tăiere.

Rezolvare. În ipoteza obţinerii de panouri dreptunghiulare rezultă că :

$$(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \cdot \bar{v}_1 = 0 ;$$

deci : $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = 0$, sau : $v_1^2 + v_1 \cdot v_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0$,

adică :

$$v_1 - v_2 \sin \alpha = 0.$$

Rezultă $v_1/v_2 = \sin \alpha$, în care α reprezintă unghiul dintre discul circular şi ghidajul (Δ), măsurat într-un plan paralel cu vectorul $\bar{v}_1$.

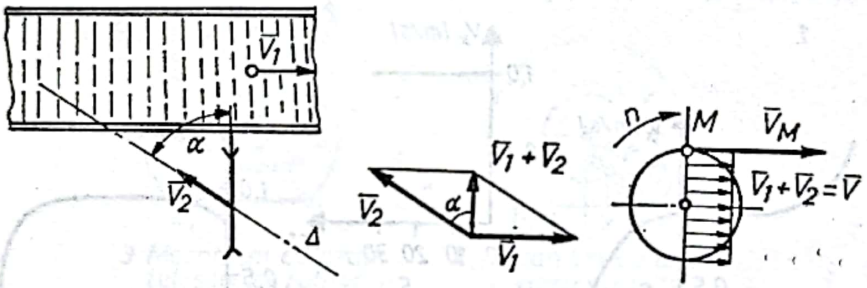


Fig. 8.21

Viteza de tăiere, respectiv viteza punctului M, se determină ştiind că discul circular aflat în mişcare de rotaţie cu turaţia n se deplasează perpendicular pe axa de rotaţie cu viteza $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}$. Deci $|\bar{v}_M| = |\bar{v}| + \frac{\pi D n}{60}$ în care D este diametrul discului circular.

8.22. La o maşină de finisat, discurile de lucru 2 sînt acţionate de la axul motor *1*, iar carcasa *3* este rigidizată de axul motor (fig. 8.22, a). Să se afle turaţia discurilor de lucru, viteza absolută şi acceleraţia absolută pentru poziţiile A, B şi C. Se cunosc : α, n_1 = constant, z_1, z_2, z_3, z_4, d şi D.

Rezolvare. Turaţia discurilor de lucru, n se determină din relaţiile :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \text{ şi } \frac{n_2}{n} = \frac{z_4}{z_3} .$$

de unde rezultă :

$$n = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} .$$

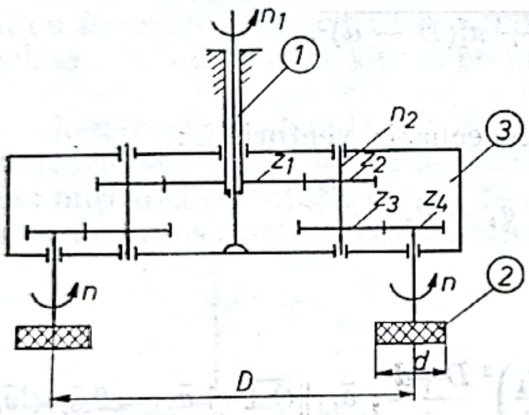
Pentru determinarea componentelor vitezei şi acceleraţiei se va avea în vedere că discurile de lucru se rotesc cu o turaţie n, iar întreg ansamblul carcasă şi discuri de lucru se rotesc cu turaţia n_1 faţă de axul motor. Atunci viteza absolută se determină din relaţia

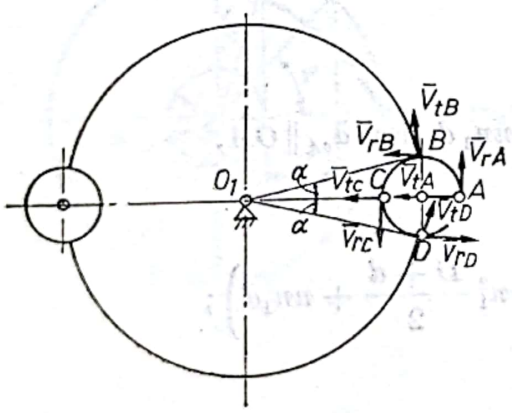
$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

şi va fi (fig. 8.22, *b*):

— Pentru poziţia A:

$$v_{rA} = \frac{\pi n}{60} d\,;\quad \bar{v}_{rA} \perp \overline{OA} \text{ şi } v_{tA} = \frac{\pi n_1}{60}(D+d)\,;\quad \bar{v}_{tA} \parallel \overline{O_1A}.$$





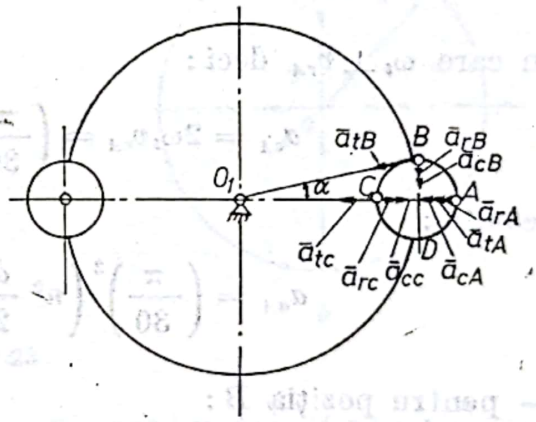


Fig. 8.22

Atunci:

$$v_{aA} = \frac{\pi}{60}\sqrt{n^2d^2 + n_1^2(D+d)^2}.$$

— Pentru poziţia B:

$$v_{rB} = \frac{\pi n}{60} d\,;\quad \bar{v}_{rB} \perp \overline{OB}\,;\quad v_{tB} = \frac{\pi n_1}{30} O_1B = \frac{\pi n_1}{60}\sqrt{D^2 + d^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

$\bar{v}_{tB} \perp \overline{O_1B}$; atunci unghiul dintre $\bar{v}_{rB}$ și $\bar{v}_{tB}$ este $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ și deci:

$$v_{aB} = \frac{\pi}{60}\sqrt{n^2d^2 + n_1^2(D^2 + d^2) + 2nn_1d\sqrt{D^2 + d^2}\sin\alpha}.$$

— Pentru poziția C:

$$v_{rC} = \frac{\pi n}{60}d,\ \bar{v}_{rC} \perp \overline{OC};\ v_{tC} = \frac{\pi n_1}{60}(D - d) \text{ și } \bar{v}_{tC} \| \overline{OC}.$$

Rezultă:

$$v_{aC} = \frac{\pi}{60}\sqrt{n^2d^2 + n_1^2(D - d)^2}.$$

Accelerația absolută se obține utilizînd ecuația vectorială:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

care va fi (fig. 8.22, *c*):
— pentru poziția A:

$$a_{rA} = \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \cdot \frac{d}{2};\ \bar{a}_{rA} \| \overline{OA};\ a_{tA} = \left(\frac{\pi n_1}{30}\right)^2 \frac{D+d}{2};\ \bar{a}_{tA} \| \overline{OA} \text{ și } \bar{a}_{cA} = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{rA},$$

în care $\omega_t \perp \bar{v}_{rA}$ deci:

$$a_{cA} = 2\omega_t v_{rA} = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 nn_1d, \text{ iar } \bar{a}_{cA} \| \overline{OA},$$

rezultă:

$$a_{aA} = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \left(n^2\frac{d}{2} + n_1^2\frac{D+d}{2} + nn_1d\right);$$

— pentru poziția B:

$$a_{rB} = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 n^2\frac{d}{2};\ \bar{a}_{rB} \| \overline{BO};\ a_{tB} = \left(\frac{\pi n_1}{30}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{2};$$

$$\bar{a}_{tB} \| \overline{O_1B} \text{ și } \bar{a}_{cB} = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{rB},\ a_{cB} = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 nn_1d \text{ și } \bar{a}_{cB} \| \overline{BO},$$

se obține:

$$a_{aB} = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \sqrt{n_1^4\frac{D^2 + d^2}{4} + \left(n^2\frac{d}{2} + nn_1d\right)^2 + n_1^2\frac{d}{2}(n^2 + 2nn_1)\sqrt{D^2 + d^2}};$$

Scanned with OKEN Scanner

— pentru poziţia C :

$$a_{rC} = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \cdot n^2 \cdot \frac{d}{2}, \quad \bar{a}_{rC} \| \overline{CO}\,; \quad a_{tC} = \left(\frac{\pi}{30}\right) n_1^2 \cdot \frac{D-d}{2}\,; \quad \bar{a}_{tC} \| \overline{CO_1}\,;$$

$$\bar{a}_{cC} = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{rC}\,; \quad a_{cC} = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 n n_1 d \text{ şi } \bar{a}_{cC} \| \overline{CO},$$

rezultă :

$$a_{aC} = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \left(n^2 \frac{d}{2} + n n_1 d - n_1 \frac{D-d}{2}\right).$$

8.23. În figura 8.23, *a* este redată schema de lucru la aşchierea lemnului cu freze frontale. Să se determine traiectoria şi viteza efectivă de aşchiere a unui punct situat pe muchia tăietoare.

Rezolvare. În planul orizontal al directoarei un punct situat pe muchia tăietoare descrie o mişcare rezultată din compunerea a două mişcări simple : mişcarea de rotaţie cu axă fixă a sculei de turaţie n [rot/min] şi mişcarea de translaţie rectilinie (mişcarea de avans) de viteză constantă $\bar{u}$.

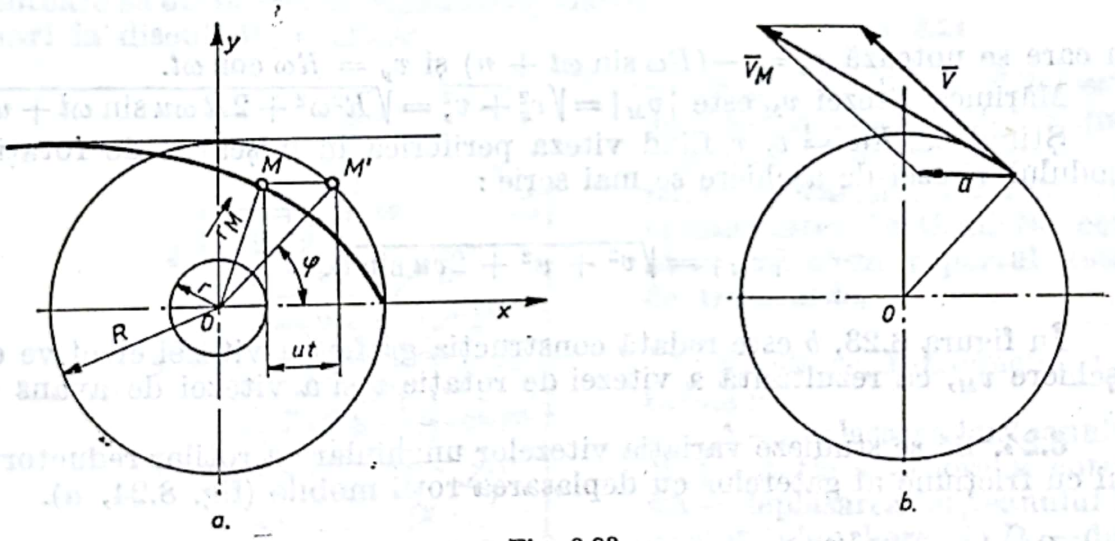


Fig. 8.23

În figura 8.23 este reprezentată poziţia unui punct M situat pe traiectorie. Vectorul de poziţie $\bar{r}_M$ are expresia :

$$\bar{r}_M = \overline{OM'} + \overline{M'M} = (R\cos\varphi \bar{i} + R\sin\varphi \bar{j}) - ut\,\bar{i},$$

adică

$$\bar{r}_M = (R\cos\varphi - ut)\,\bar{i} + R\sin\varphi\,\bar{j}.$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sînt :

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\varphi - ut\,; \\ y &= R\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

30 c. — 618

Scanned with OKEN Scanner

Ştiind că $\varphi = \omega t$, ecuaţiile parametrice (a) ale traiectoriei devin :

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\omega t - ut; \\ y &= R\sin\omega t, \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

şi reprezintă ecuaţiile unei *cicloide*.

Eliminînd parametrul t între cele două ecuaţii se obţine ecuaţia cicloidei în coordonate carteziene :

$$x^2 + y^2 + \frac{2ux}{\omega}\arcsin\frac{y}{R} + \frac{u^2}{\omega^2}\left(\arcsin\frac{y}{R}\right)^2 - R^2 = 0. \qquad (c)$$

Viteza efectivă de aşchiere reprezintă viteza de deplasarea punctului M pe traiectorie şi anume :

$$\bar{v}_M = \dot{\bar{r}}_M = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(R\cos\omega t - ut)\bar{i} + R\sin\omega t\bar{j}\right] =$$

$$= -(R\omega\sin\omega t + u)\bar{i} + R\omega\cos\omega t\bar{j},$$

în care se notează $v_x = -(R\omega\sin\omega t + u)$ şi $v_y = R\omega\cos\omega t$.

Mărimea vitezei v_M este $|\bar{v}_M| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + 2R\omega u\sin\omega t + u^2}$.

Ştiind că $R\omega = v$, v fiind viteza periferică în mişcarea de rotaţie, modulul vitezei de aşchiere se mai scrie :

$$|\bar{v}_M| = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\sin\varphi}.$$

În figura 8.23, b este redată construcţia grafică a vitezei efective de aşchiere $\bar{v}_M$, ca rezultantă a vitezei de rotaţie $\bar{v}$ şi a vitezei de avans $\bar{u}$.

8.24. Să se studieze variaţia vitezelor unghiulare a roţilor reductorului cu fricţiune al gaterelor cu deplasarea roţii mobile (fig. 8.24, a).

Rezolvare. Notînd ω_A — viteza unghiulară a discului (fig. 8.24, a) şi ω_B — viteza unghiulară a roţii mobile se poate scrie raportul de transmisie variabil direct

$$i_{BA} = \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{x}{r} \qquad (a)$$

şi invers

$$i_{AB} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r}{x}, \qquad (b)$$

unde x este distanţa de la axul de rotaţie al discului cu fricţiune pînă la punctul de contact cu roata de antrenare de rază r.

Aceste relaţii permit exprimarea variaţiei vitezelor unghiulare cu deplasarea rolei

$$\frac{d\omega_A}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\omega_B \frac{r}{x}\right) = -\frac{\omega_B r}{x^2}, \qquad (c)$$

respectiv

$$\frac{d\omega_B}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\omega_A \cdot \frac{x}{r}\right) = \frac{\omega_A}{r}. \qquad (d)$$

Relaţiile (c) şi (d) sînt reprezentate grafic în figura 8.24, *b*.

Se observă că viteza unghiulară a rolei de rază r variază liniar cu distanţa x iar viteza unghiulară a discului de fricţiune prezintă o variaţie hiperbolică.

Evident şi din grafic se observă că vitezele unghiulare ale rolei şi discului devin egale cînd $x = r$, ceea ce corespunde intersecţiei dreptei (d) cu hiperbola echilaterală (c). Pentru valori foarte mici ale razei variabile, la turaţii mici ale roţii motoare se obţin viteze unghiulare foarte mari la discul de fricţiune.

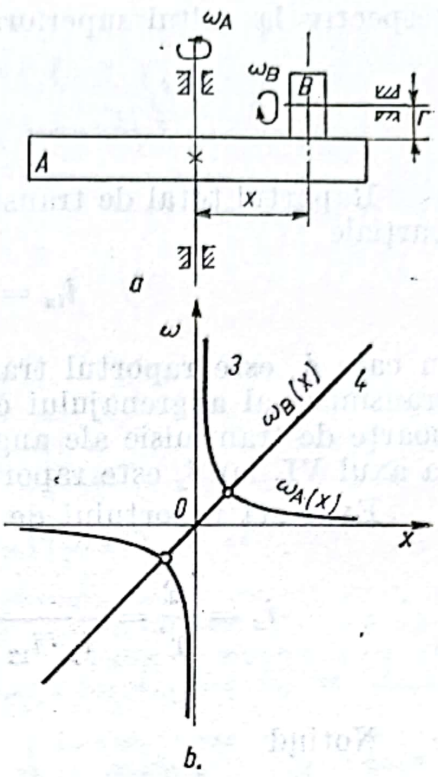


Fig. 8.24

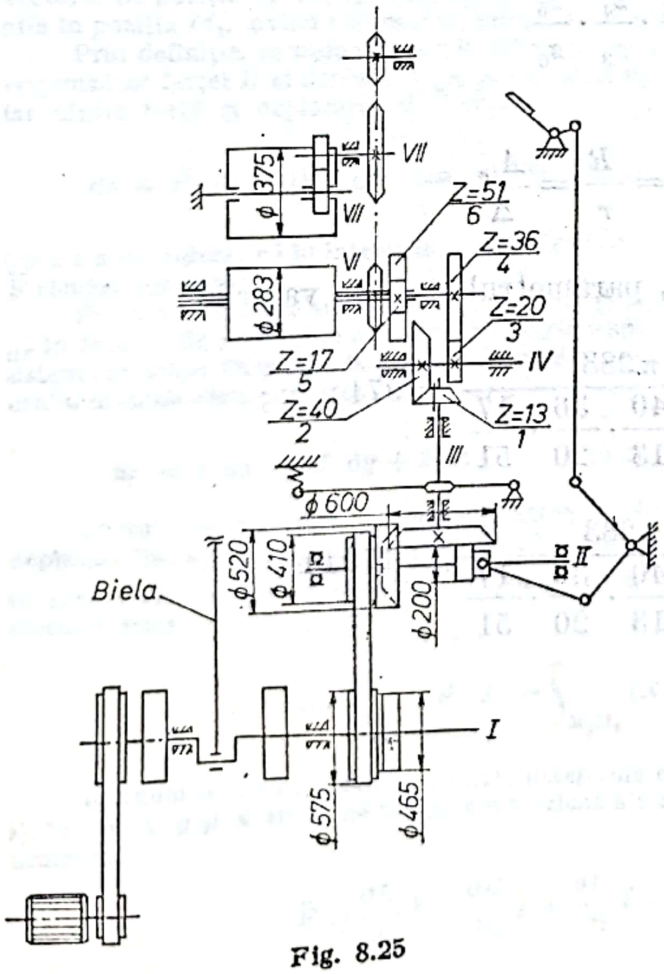


Fig. 8.25

8.25. În figura 8.25 este dată schema cinematică a mecanismului de transmisie cu reductor variabil cu fricţiune al unui gater vertical. Se cere să se calculeze raportul total de transmisie.

Rezolvare. Introducînd notaţiile :

Δ — deplasarea buşteanului la o rotaţie a arborelui cotit ; $n\Delta$ — deplasarea buşteanului la n rotaţii ale arborelui ; D_{in} — diametrul valţului inferior ; D_s — diametrul valţului superior, se pot scrie egalităţile :

$$n\Delta = n_{in}\pi D_{in} = n_s \pi D_s,$$

unde n_{in} şi n_s sînt turaţiile valţului inferior şi superior.

Se defineşte raportul de transmisie final al valţul inferior

$$i_{in} = \frac{n}{n_{in}} = \frac{\pi D_{in}}{\Delta},$$

Scanned with OKEN Scanner

respectiv la valțul superior.

$$i_s = \frac{n}{n_s} = \frac{\pi D_s}{\Delta}.$$

Raportul total de transmisie este produsul rapoartelor de transmisie parțiale

$$i_{in} = i_p \cdot i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{45} \cdot i_{56} \cdot i_x,$$

în care i_p este raportul transmisiei cu curele; $i_{12} = z_2/z_1$ — raportul de transmisie al angrenajului conic; $i_{34} = z_4/z_3$, $i_{45} = 1$; $i_{56} = z_5/z_6$ sînt rapoarte de transmisie ale angrenajelor cilindrice exterioare de la axul IV la axul VI, iar i_x este raportul variabil al reductorului cu fricțiune.

Expresia raportului de transmisie la reductor este

$$i_x = \frac{R}{r} = \frac{i_{in}}{i_p \cdot i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{45} \cdot i_{56}} = \frac{\pi D_{in}}{i_p \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_5}{z_6} \cdot \Delta}.$$

Notînd

$$\frac{\pi D_{in}}{i_p \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_5}{z_6}} = A_{in}$$

se obține

$$i_x = \frac{R}{r} = \frac{A_{in}}{\Delta}.$$

Cu valorile din figura 8.25, parametrul A_{in} are valorile:

$$A_{in_1} = \frac{\pi 283}{\frac{410}{575} \cdot \frac{40}{13} \cdot \frac{36}{20} \cdot \frac{17}{51}} \cong 974 \text{ mm};$$

$$A_{in_2} = \frac{\pi 283}{\frac{520}{465} \cdot \frac{40}{13} \cdot \frac{36}{20} \cdot \frac{17}{51}} = 1794 \text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IX

CALCULUL DINAMIC AL UNOR UTILAJE TEHNOLOGICE DIN ECONOMIA FORESTIERĂ

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

9.1. TEOREMA ENERGIEI CINETICE ȘI LUCRULUI MECANIC

Generalități. Orice schimbare, orice transformare reprezintă, în sens general, o mișcare. Energia reprezintă măsura, la un anumit moment dat, a mișcării, sub toate formele sale și în toate transformările. Lucrul mecanic măsoară, cantitativ, variația în timp a energiei între două stări ale unui sistem material. Rezultă, deci, că energia măsoară capacitatea de a produce lucrul mecanic.

Lucrul mecanic. Să considerăm un punct material M, care se deplasează pe traiectoria curbilinie (Ω), fiind acționat de forța variabilă $\bar{F}$ (fig. 9. *a*). La momentul t punctul material se află în poziția M_1, având față de un reper fix O, vectorul de poziție $\bar{r}$, iar la momentul $t + dt$ se află în poziția M_2, având vectorul de poziție $\bar{r}+d\bar{r}$.

Prin definiție, se numește lucru mecanic, corespunzător forței $\bar{F}$ și deplasării $\overline{dr}$, produsul scalar dintre forță și deplasarea $d\bar{r}$, adică:

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{r} = |\bar{F}| \cdot d\bar{r}| \cdot \cos(\bar{F}, d\bar{r}), \quad (9.1)$$

unde s-a considerat că în intervalul de timp de forța $\bar{F}$ rămîne constantă.

Folosind expresia analitică a vectorilor $\bar{F}$ și $\overline{dr}$ în funcție de proiecțiile acestora pe axele unui sistem cartezian $Oxyz$ (fig. 9. *a*), expresia (9.1) lucrului mecanic elementar devine:

$$dL = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \quad (9.2)$$

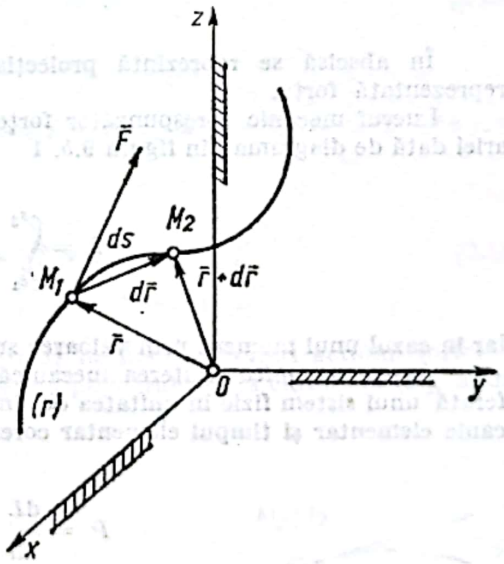


Fig. 9.a

Lucrul mecanic finit, L, corespunzător unei deplasări finite a punctului de aplicație al forței $\bar{F}$ în lungul arcului de traiectorie $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ a lucrului mecanic elementar dL va fi:

$$L = \int_{M_1M_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{M_1M_2} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \quad (9.3)$$

În anumite cazuri, forța F se poate determina cu ajutorul unei funcții scalare $U = U(x,y,z)$, în care x, y și z sînt coordonatele carteziene ale punctului de aplicație al forței după cum urmează:

$$\bar{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = \text{grad } U = \nabla U. \quad (9.4)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, componentele scalare ale forței pe axele de coordonate sînt chiar derivatele parțiale ale funcției U în raport cu x, y și z, adică :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{9.5}$$

Funcția U se numește *funcție de forță*, iar forța F poartă numele, în acest caz, *forță conservativă*.

Reprezentarea grafică a lucrului mecanic. În figura 9.*b* se arată reprezentarea grafică a lucrului mecanic cu ajutorul unei diagrame.

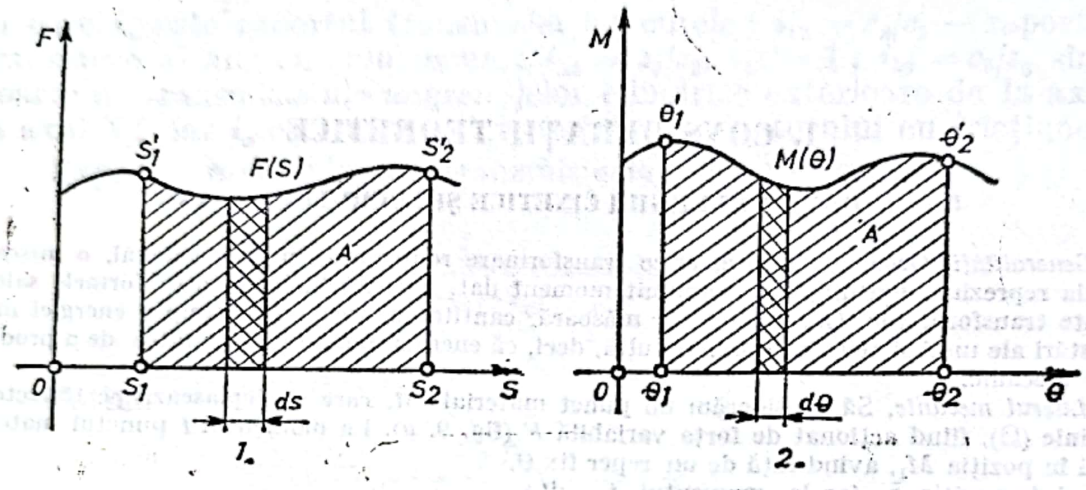


Fig. 9.b

În abscisă se reprezintă proiecția deplasării pe direcția forței, iar în ordonată este reprezentată forța.

Lucrul mecanic corespunzător forței $F(s)$ și deplasării finite s_1s_2 este egal cu valoarea ariei dată de diagrama din figura 9.*b*, 1

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds = \text{aria } s_1s'_1s'_2s_2, \tag{9.6}$$

iar în cazul unui moment prin valoarea suprafeței dată de diagrama din figura 9, *b*, 2.

Putere mecanică. Puterea mecanică este mărimea scalară ce caracterizează energia transferată unui sistem fizic în unitatea de timp și care se exprimă prin raportul dintre lucrul mecanic elementar și timpul elementar corespunzător :

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}; \tag{9,7}$$

$$P = \frac{\vec{M} \cdot d\vec{\theta}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}. \tag{9.8}$$

Puterea este o mărime scalară caracteristică oricărei instalații producătoare de energie și oricărei mașini. Unitatea de măsură a puterii în sistemul internațional (SI) este watul (W) ;

$$1 \text{ W} = 1 \text{ Joule/s}.$$

Unitatea de măsură a puterii în sistemul tehnic este : $\frac{\text{kg} \cdot f \cdot m}{\text{s}}$; în practica inginerească

se mai utilizează și calul putere (CP). Relația dintre kilowat și calul — putere este :

$$1\ \text{kW} = 1{,}36\ \text{CP}.$$

Cunoscînd turația n, în rot/min și momentul M, în $N \cdot m$, se poate calcula puterea cu ajutorul relației :

$$P = \frac{\pi \cdot n}{30} M \ [\text{W}] \tag{9.9}$$

Randament mecanic. Orice mașină primește, în timpul funcționării ei în regim permanent, un lucru mecanic motor L_i, care îi permite să dezvolte un lucru mecanic util L_e, măsurat la ieșirea din mașina respectivă. Efectuînd diferența dintre lucrul mecanic motor L_i (respectiv puterea P_i) și lucrul mecanic util L_e (respectiv puterea P_e), se obține lucrul mecanic L_p (respectiv puterea P_p) consumat de mașină datorită frecărilor, deformărilor, efectelor termice etc. Rezultă :

$$L_i = L_e + L_p\,; \quad P_i = P_e + P_p\,. \tag{9.10}$$

Se numește randament mecanic mărimea care reprezintă funcția de transfer a lucrului mecanic sau a puterii printr-o mașină :

$$\eta = \frac{L_i - L_p}{L_i} = 1 - \frac{L_p}{L_i} = 1 - \varphi\,; \tag{9.11}$$

$$\eta = \frac{P_i - P_p}{P_i} = 1 - \frac{P_p}{P_i} = 1 - \varphi, \tag{9.12}$$

în care φ este coeficientul de pierdere.

În cazul unui lanț de mașini sau mecanisme legate în serie, randamentul total este egal cu produsul randamentelor mașinilor lanțului :

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdots \eta_n = \prod_{k=1}^{n} \eta_k. \tag{9.13}$$

Energie cinetică. Considerînd un punct material M de masă m supus acțiunii forței $\bar{F}$ (fig. 9.c), sub acțiunea acestei forțe punctul se deplasează pe o traiectorie curbilinie (Ω), avînd la momentul t viteza v.

Expresia :

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \tag{9.14}$$

poartă numele de *energia cinetică* a punctului material.

Prin urmare, energia cinetică este o mărime scalară strict pozitivă care caracterizează starea de mișcare a punctului material la un moment dat. Unitatea de măsură a energiei cinetice în sistemul SI este jouleul, iar în sistemul tehnic, kilogram-forță-metru (v. anexa 2). În cazul unui sistem discret de puncte materiale (deformabile sau rigid), energia cinetică a sistemului de puncte materi-

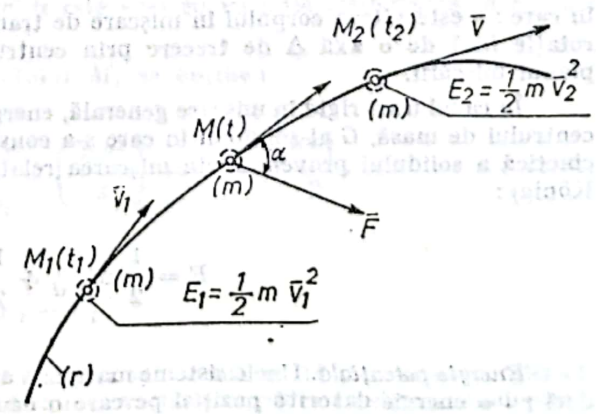


Fig. 9.c

ale M_i, avînd masele m_i şi vitezele $\bar{v}_i$ $(i = q, 2, \ldots, n)$ este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor ce compun sistemul, adică :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 . \tag{9.15}$$

În cazul solidului rigid în mişcare de translaţie, avînd masa M, vitezele instantanee ale tuturor punctelor rigidului fiind egale, expresia energiei cinetice este :

$$E = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} v^2 \int dm = \frac{1}{2} M v^2, \tag{9.16}$$

unde $\int dm = M$ — reprezintă masa totală a rigidului.

În cazul solidului rigid în mişcarea de rotaţie cu axă fixă, distribuţia de viteze corespunzătoare punctelor rigidului se exprimă prin relaţia :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{9.17}$$

sau, în modul

$$|\bar{v}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega \cdot R,$$

unde R este distanţa de la axa de rotaţie, fie ea Δ. Expresia energiei cinetice este, în acest caz :

$$E = \frac{1}{2} \int R^2 \omega^2 \, dm = \frac{\omega^2}{2} \int R^2 \, dm = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 , \tag{9.18}$$

unde :

$$J_\Delta = R^2 dm .$$

În cazul solidului în mişcare plan — paralelă expresia energiei cinetice este :

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2, \tag{9.19}$$

în care : v este viteza corpului în mişcare de translaţie, iar ω viteza unghiulară în mişcarea de rotaţie faţă de o axă Δ de trecere prin centrul de greutate al corpului şi este normală la planul mişcării.

În cazul unui rigid în mişcare generală, energia cinetică este egală cu suma dintre energia centrului de masă, G al solidului în care s-a considerat întreaga masă M a solidului şi energia cinetică a solidului provenită din mişcarea relativă faţă de centrul de masă G (formula lui König) :

$$E = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_{G\Delta} \cdot \omega^2. \tag{9.20}$$

Energie potenţială. Unele sisteme materiale au posibilitatea de a produce un lucru mecanic, deci au o energie datorită poziţiei pe care o ocupă. Ca exemple se pot da : un resort întins, o greutate situată la înălţime oarecare, un recipient conţinînd gaz sub presiune etc. Pentru a calcula energia potenţială a unui corp, se presupune corpul plasat într-o poziţie în care energi

sa **potențială** este nulă și se calculează lucrul mecanic consumat pentru a aduce corpul într-o altă **poziție.** Lucrul mecanic astfel calculat și luat cu semnul schimbat, reprezintă energia potențială a corpului corespunzător poziției respective :

$$V = -L = -\int (X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z). \tag{9.21}$$

Unitatea de măsură a energiei potențiale în sistemul internațional, SI, este jouleul.

Energia mecanică a unui sistem material este suma energiilor cinetică și potențială la un moment dat, adică :

$$E_m = E + V. \tag{9.22}$$

Dacă într-un sistem nu se produc pierderi de energie, sistemul se numește *conservativ.* Într-un sistem conservativ se poate produce transformarea energiei cinetice în energie potențială și invers.

Teorema variației energiei cinetice. Să considerăm un punct material M de masă m, care se deplasează, sub acțiunea unui sistem de forțe $\bar{F}_i (i = 1, 2, \ldots . n)$, a căror rezultantă este $\bar{R}$, pe traiectoria curbilinie (Γ) din poziția inițială M_1 în poziția finală M_2. Fie $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ — vitezele corespunzătoare pozițiilor M_1 și M_2 și v — viteza punctului la momentul t (fig. 9.*d*).

Conform principiul al doilea al mecanicii se poate scrie :

$$\bar{R} = m\bar{a} = m\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.23}$$

Înmulțind (9.23) scalar cu $\overline{dr}$, rezultă :

$$\bar{R}\cdot \mathrm{d}\bar{r} = m\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\bar{v} = m\cdot\bar{v}\cdot \mathrm{d}\bar{v} = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{9.24}$$

Ținînd seama de definiția lucrului mecanic elementar al unei forțe și expresia energiei cinetice al unui punct material, rezultă :

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}\left(m\frac{v^2}{2}\right) = \mathrm{d}E. \tag{9.25}$$

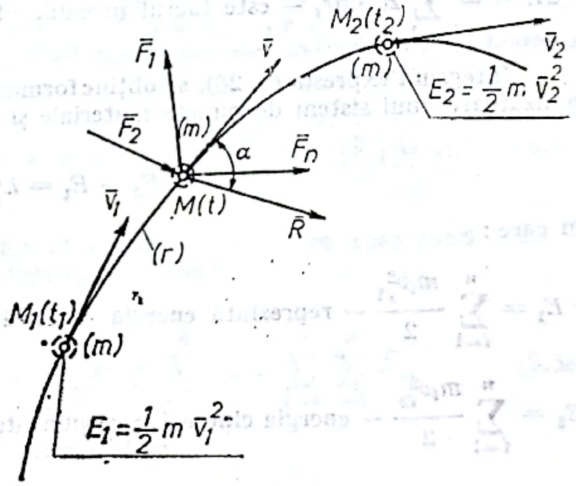


Fig. 9.d

Prin urmare, lucrul mecanic elementar corespunzător forței $\bar{R}$ și deplasării ds a punctului M efectuată în intervalul de timp infinit mic dt este egal cu variația elementară a energie cinetice.

Pentru deplasarea finită M_1M_2 a punctului M, se obține :

$$L_{1-2} = \int_{M_1}^{M_2} \bar{R}\,\mathrm{d}\bar{r} = \int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \tag{9.26}$$

sau

$$L_{1-2} = E_2 - E_1$$

Relația (9.16) exprimă teorema variației energiei sub formă finită (teorema energiei cinetică și a lucrului mecanic), care are următorul enunț : variația energiei cinetice a unui punct material într-un interval finit $(t_2 - t_1)$ este egală cu lucrul mecanic al forțelor ce acționează asupra punctului corespunzător deplasării efectuate de acestea în același interval de timp.

În cazul unui sistem discret de puncte materiale $M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, avînd masele m_i, vitezele $\bar{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, la momentul t, poziționat față de un punct fix O prin vectorii de poziție $\bar{r}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, asupra punctului M_i aparținînd sistemului acționează următoarele forțe:

— rezultanta forțelor exterioare, $\bar{R}_i$;

— forțele interioare $\sum_j F_{ij}$, provenite din acțiunea celorlalte puncte aparținînd sistemului asupra punctului M_i.

Aplicînd fiecărui punct al sistemului relația (9.25) și însumînd, se obține:

$$\mathrm{d}(E) = \mathrm{d}L^{\mathrm{int}} + \mathrm{d}L^{\mathrm{ext}}, \tag{9.28}$$

în care:

$\mathrm{d}(E) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}\right)$ — reprezintă diferențiala energiei cinetice a sistemului;

$\mathrm{d}L^{\mathrm{int}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} = \bar{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\bar{r}_{ij}$ — este lucrul mecanic elementar corespunzător forțelor interioare;

$\mathrm{d}L^{\mathrm{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i \cdot \mathrm{d}\bar{r}_i$ — este lucrul mecanic elementar corespunzător forțelor exterioare.

Integrînd expresia (9. 28), se obține forma finită a teoremei variației energiei cinetice corespunzătoare unui sistem de puncte materiale și unor deplasări finite ale punctelor sistemului:

$$E_2 - E_1 = L_{1-2}^{\mathrm{ext}} + L_{1-2}^{\mathrm{int}}, \tag{9.29}$$

în care:

$E_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_{i1}^2}{2}$ — reprezintă energia cinetică corespunzătoare poziției inițiale a sistemului;

$E_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_{i2}^2}{2}$ — energia cinetică corespunzătoare poziției finale a sistemului;

$L_{1-}^{\mathrm{ext}} = \int_1^2 \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i \mathrm{d}\bar{r}_j$ — lucrul mecanic corespunzător forțelor exterioare aplicate sistemului;

$L_{1-2}^{\mathrm{int}} = \int_1^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \bar{F}_{ij}\, \mathrm{d}\bar{r}_{ij}$ — lucrul mecanic corespunzător forțelor interioare.

Enunțul teoremei variației energiei cinetice sub formă finită este următorul: variația finită a energiei cinetice a unui sistem material este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare corespunzătoare forțelor exterioare și interioare ce acționează asupra sistemului material și deplăsărilor elementare ale acestora.

9.2 TEOREMELE IMPULSULUI ȘI MOMENTULUI CINETIC

Teoremele impulsului. Fie un punct M de masă constantă m, căruia o forță F îi imprimă o accelerație a; legea fundamentală a mecanicii newtoniene:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{9.30}$$

mai poate fi scrisă sub forma :

$$m\dot{\bar{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\bar{v}) = \bar{F}, \tag{9.31}$$

în care $\bar{v}$ este viteza punctului material.

Mărimea vectorială :

$$\bar{H} = m\bar{v}, \tag{9.32}$$

avînd direcţia şi sensul sensul vitezei (fig. 9.e) poartă denumirea de *impulsul punctului material* şi reprezintă o măsură a mişcării mecanice a particulei.

Derivînd (9.32) în raport cu timpul, rezultă :

$$\dot{\bar{H}} = m\bar{a} = \bar{F};$$

relaţia :

$$\dot{\bar{H}} = \bar{F} \tag{9.33}$$

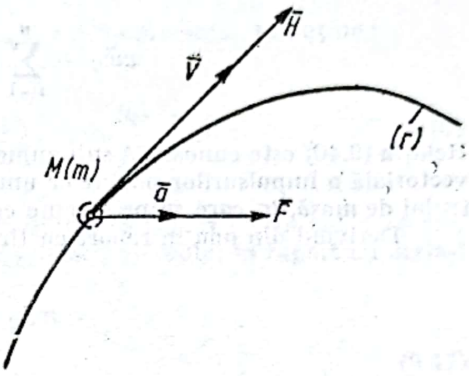


Fig. 9.e

constituie teorema variaţiei impulsului unui punct material, care poate fi enunţată astfel : derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta forţelor care acţionează la momentul considerat asupra particulei.

În cazul unui sistem discret de puncte materiale $M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, avînd masele m_i, vitezele $\bar{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ şi fiind supuse forţelor exterioare $\bar{F}_i$, teorema (9.33) se scrie în cazul punctului M_i (fig. 9. *f*) ;

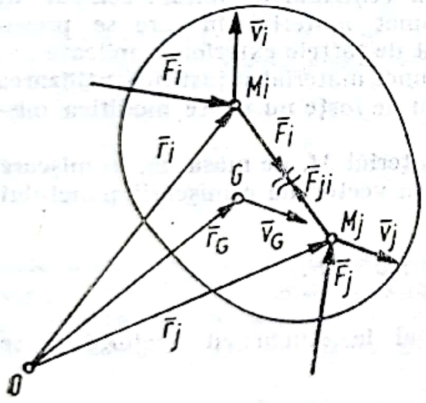


Fig. 9.f

$$m_i \dot{\bar{v}}_i = \dot{\bar{H}}_i = \dot{\bar{F}}_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}, \ (\bar{F}_{ii} = 0). \tag{9.34}$$

Prin însumarea ecuaţiilor (9.34), ce corespund celor n puncte materiale, se obţine :

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{H}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} \tag{9.35}$$

Prin definiţie, mărimea

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^{n} \bar{H}_i \tag{9.36}$$

poartă denumirea *impulsului sistemului de puncte materiale.*

Observînd că suma dublă din (9.35) este nulă, deoarece forţele interioare se anulează două cîte două, relaţia (9.35) devine :

$$\dot{\bar{H}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{H}}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \tag{9.37}$$

constituind teorema variaţiei impulsului unui sistem de puncte materiale : derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu suma vectorială a forţelor exterioare, care acţionează la momentul considerat sistemul.

Teoremele mişcării centrului de masă. Se ştie că poziţia centrului de masă a unui sistem material este dată de relaţia :

$$r_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{9.38}$$

de unde:

$$m\bar{r}_G = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i m_i, \text{ unde } m = \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{9.39}$$

Derivînd în raport cu timpul prima relație (9. 39), se obține:

$$m\bar{v}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{H}_i = \bar{H}. \tag{9.40}$$

Relația (9.40) este cunoscută sub numele de prima teoremă a mișcării centrului de masă: suma vectorială a impulsurilor punctelor unui sistem material în mișcare este egală cu impulsul centrului de masă, în care se presupune concentrată întreaga masă a sistemului.

Derivînd din nou în raport cu timpul și ținînd seama de (9.34), se obține:

$$m\bar{a}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{H}}_i,$$

sau ținînd cont de (9.38),

$$m\bar{a}_G = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{R}. \tag{9.41}$$

S-a obținut, astfel, cea de a doua teoremă a mișcării centrului de masă: centrul de masă al unui sistem material se mișcă identic ca un punct material, în care se presupune concentrată masa întregului sistem și care ar fi acționat de forțele exterioare aplicate sistemului. Această teoremă oferă o concretizare a noțiunii de punct material și justifică utilizarea ei în mecanică. În virtutea acestei teoreme [46, 63], un cuplu de forțe nu poate modifica mișcarea centrului de masă al unui sistem material.

Teoremele momentului cinetic. Se consideră un punct material M, de masă m, în mișcare pe traiectoria (Γ) sub acțiunea unei forțe F (fig. 9. *g*) Ecuația vectorială a mișcării punctului material, conform principiului al doilea al dinamicii este:

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

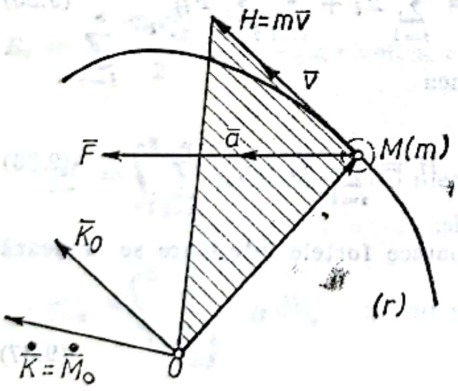


Fig. 9.g

Înmulțind vectorial la stînga cu vectorul $\bar{r}$, se obține:

$$\bar{r} \times (m\bar{a}) = \bar{r} \times \bar{F},$$

sau

$$r \times \left(m\frac{d\bar{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}[\bar{r} \times (m\bar{v})] = \bar{r} \times \bar{F}. \tag{9.42}$$

Momentul polar al impulsului punctului material M, de masă m și viteză v, în raport cu punctul O, adică expresia:

$$\bar{K}_0 = \bar{r} \times (m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{H} \tag{9.43}$$

este denumit *moment cinetic polar*.
Prin urmare, din (9.42) rezultă:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0, \tag{9.44}$$

relație ce constituie teorema variației momentului cinetic în cazul unui punct material: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material în mișcare, calculat față de un pol oarecare este egală cu momentul forței rezultante, care acționează asupra punctului, față de același pol.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui sistem discret de puncte materiale $M_i(i = 1, 2, \ldots, n)$, care se interacționează, avînd vitezele $\bar{v}_i(i = 1, 2' \ldots, n)$ și impulsurile $\bar{H}_i(i = 1, 2, \ldots, n)$, fiind supuse forțelor exterioare $\bar{F}_i$, teorema variației momentului cinetic aplicată punctului M_i se scrie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r}_i \times \bar{H}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i + r_i \times \sum_{j=1}^{n} F_{ij}, (F_{ii} = 0). \tag{9.45}$$

Însumînd relațiile (9.45), ce corespund celor n puncte materiale ale sistemului, se obține :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}(\bar{r}_i \times \bar{H}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\bar{r}_i \times \bar{F}_i) + \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i \times \sum_{j=1}^{n}\bar{F}_{ij}. \tag{9.46}$$

Prin definiție, *momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale*, în raport cu un pol oarecare, este egal cu suma vectorială a momentelor cinetice ale punctelor sistemului în raport cu același pol. Prin urmare :

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^{n}(\bar{r} \times \bar{H}_i). \tag{9.47}$$

Suma dublă (9.46) este nulă, deoarece se compune din termeni de forma :

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_i \times \bar{F}_{ji} = \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + (\bar{r}_i + \overline{A_iA_j}) \times (-\bar{F}_{ij}) = -\overline{A_iA_j} \times \bar{F}_{ij} = 0.,$$

cunoscînd că vectorii $\overline{A_iA_j}$ și $\bar{F}_{ij}$ sînt coliniari.
În consecință, relația (9.46) devine :

$$\bar{k}_0 = \sum_{i=1}^{n}(\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \bar{M}_0, \tag{9.48}$$

constituind teorema variației momentului cinetic în cazul unui sistem de puncte materiale : derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale în mișcare, calculat față de un pol oarecare este egală cu suma momentelor forțelor exterioare, la care este supus sistemul, față de același pol.

9.3. METODA CINETO-STATICĂ (PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT)

Principiul lui d'Alembert permite tratarea problemelor de dinamică cu ajutorul metodelor de calcul ale staticii, constituind „metoda cineto-statică", deosebit de comodă în numeroase cazuri.

Fie M un punct material de masă m, care face parte dintr-un sistem material în mișcare și $\bar{P}$ rezultanta forțelor exterioare, date (active), care tind să pună în mișcare punctul considerat (fig. 9.*h*). Sub efectul forțelor de legătură, a căror rezultantă s-a notat cu $\bar{R}$ punctul material M poate fi considerat izolat de restul sistemului, devenind astfel un punct liber. Forța $\bar{F} = \bar{P} + \bar{R}$ poartă denumirea de *forță efectivă* și datorită ei particula capătă accelerația $a = F/m$. Aplicînd în punctul M două forțe egale și de sens contrar, în particular $\bar{F}$ și $\bar{F}_M = -\bar{F}$ (fig. 9.*i*), sistemul de forțe $(\bar{P}, \bar{R})$ a fost înlocuit prin sistemul $(\bar{P}, \bar{R}, \bar{F}, \bar{F}_M)$. Echivalența celor două sisteme de forțe se exprimă prin condiția :

$$\bar{P} + \bar{R} + \bar{F}_M = 0. \tag{9.49}$$

Problema mișcării punctului material M sub efectul forței F este, prin urmare, echivalentă cu cea a echilibrului forțelor $\bar{P}$, $\bar{R}$ și $\bar{F}_M$. Aceasta oferă posibilitatea aplicării metodelor staticii la rezolvarea problemelor de dinamică. Forța $\bar{F}_A$ se numește forță de inerție sau forță d'Alember-

tiană. Condiția (9.49) constituie principiul lui d'Alembert, care are următorul enunț: în mișcarea unui punct material, forța de inerție echilibrează în fiecare moment rezultanta forțelor active și de legătură.

Forța de inerție este legată de accelerație a punctului material în mișcare, prin relația:

$$\bar{F}_i = \bar{F}_M = -m\bar{a}. \tag{9.50}$$

În cazul unui sistem discret de puncte materiale $M_k(k = 1, 2, \ldots, n)$, supuse forțelor exterioare $\bar{F}_k$, principiul lui d'Alembert se exprimă prin relațiile vectoriale:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} + \bar{R}_i &= 0; \\ \bar{M} + \bar{M}_i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.51}$$

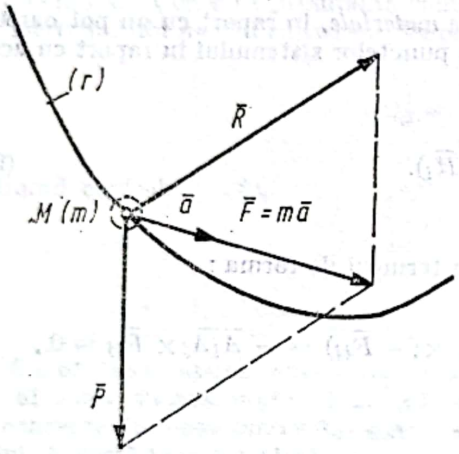


Fig. 9.h

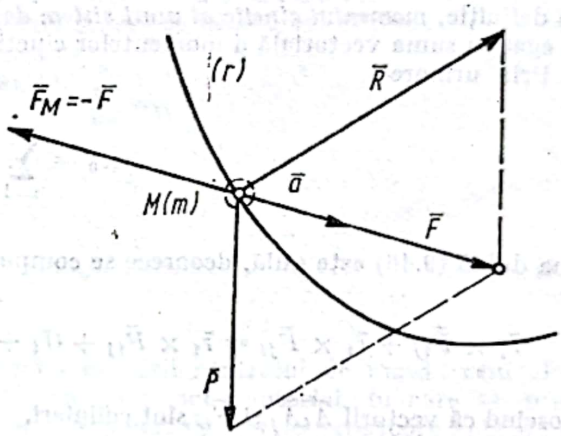


Fig. 9.i

în care $\bar{R} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$ este rezultanta forțelor exterioare (date) și de legătură;

$\bar{P}_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-m_k \bar{a}_k)$ este rezultanta forțelor de inerție;

$\bar{M} = \sum_{k=1}^{n} (\bar{r}_k \times \bar{F}_k)$ este momentul forțelor exterioare (date) și se legătură în raport cu un punct oarecare;

$\bar{M}_i = \sum_{k=1}^{n} (\bar{r}_k \times \bar{F}_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} [\bar{r}_k \times (-m_k \bar{F}_{ik})]$ este momentul forțelor de inerție.

Ecuațiile vectoriale (9.51) conduc la șase ecuații scalare de echilibru dinamic, ecuațiile metodei cineto-statice.

9.4. PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Deplasare reală; deplasare virtuală. Fie un corp așezat pe o suprafață plană, lucie și fixă, supus acțiunii unui sistem de forțe exterioare date $\bar{F}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, avînd rezultanta $\bar{R}$ și reacțiunea normală a planului $\bar{N}$ (fig. 9. *j*). Sub acțiunea sistemului de forțe care-l acționează, corpul se va deplasa pe plan ocupînd diferite poziții-reale, efectuînd între aceste poziții o serie de deplasări reale. Aceste deplasări sînt unice, pentru că ele sînt bine definite și condiționate de forțele date și de legătură.

Se numeşte deplasare reală elementară deplasarea infinitezimală a unui sistem material permisă de legături, care se efectuează sub acţiunea forţelor exterioare date şi de legătură ce acţionează asupra sistemului.

În afara deplasărilor reale ale corpului, se pot imagina o infinitate de deplasări ale acestuia pe suprafaţa plană considerată, compatibile cu legătura, care însă au loc fără a se ţine seama de forţele exterioare date, care acţionează asupra corpului.

O astfel de deplasare, care are un caracter geometric (deoarece timpul este considerat constant) este denumită *virtuală*.

Se numeşte deplasarea virtuală, compatibilă cu legăturile, a unui sistem material, orice deplasare elementară a sistemului care ar avea loc fără a se ţine cont de forţele care lucrează asupra sistemului şi pentru care timpul este considerat constant.

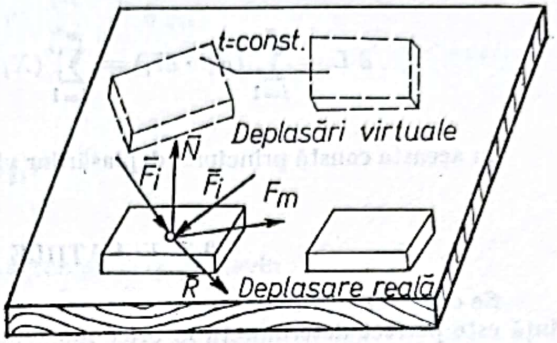


Fig. 9.j

Deplasările reale şi virtuale, compatibile cu legăturile, sînt deplasări posibile ale unui sistem material în cadrul legăturilor pe care acesta la posedă. Rezultă, prin urmare, că deplasarea reală se efectuează într-un interval de timp şi este compatibilă cu ecuaţiile de mişcare, iar deplasarea virtuală se efectuează în afara timpului şi este incompatibilă cu ecuaţiile de mişcare.

Lucru mecanic virtual. Să presupunem un sistem discret de puncte materiale M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) supus acţiunii unui sistem de forţe date şi la anumite legături (fig. 9.*k*). În urma unei deplasări virtuale, particula M_i se deplasează în poziţia M_i' cu deplasarea virtuală $\overline{M_iM_i'} = \delta\bar{r}_i, \bar{r}_i$ fiind vectorul de poziţie al punctului M_i'. Lucrul mecanic virtual elementar, corespunzător acestei deplasări a particulei, va fi:

$$\delta L_i = \bar{F}_{i1} \cdot \delta\bar{r}_i = x_i' \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta_i z_i \cdot \quad (9.52)$$

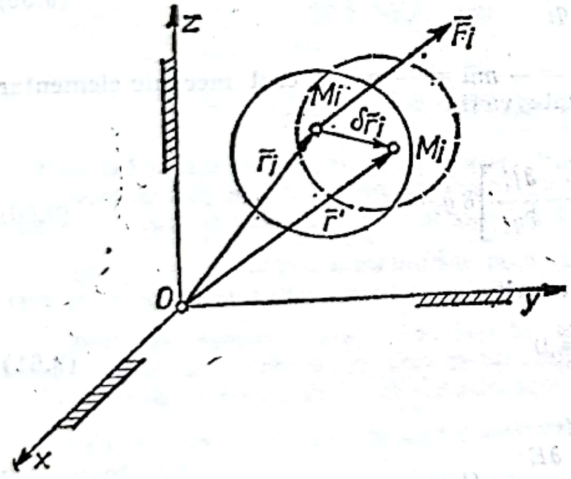


Fig. k.9

Lucrul mecanic virtual, corespunzător întregului sistem este:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta z_i) \quad (9.53)$$

În cazul sistemului în mişcare de translaţie, rezultă:

$$\delta L = X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z, \quad (9.54)$$

unde:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i; \quad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Dacă sistemul material efectuează o rotaţie în jurul unei axe (Δ), care trece prin originea sistemului de referinţă $Oxyz$, lucrul mecanic virtual are expresia

$$\delta L = M_x \cdot \delta\theta_x + M_y \cdot \delta\theta_y + M_z \cdot \delta\theta_z, \quad (9.5)$$

în care:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}; \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}; \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz},$$

iar $\delta\theta_x$, $\delta\theta_y$ şi $\delta\theta_z$ sînt rotaţiile virtuale în jurul axelor sistemului cartezian de referinţă.

Dacă sistemul material efectuează o mişcare oarecare, lucrul mecanic virtual total este:

$$\delta L = M_x \cdot \delta\theta_x + M_y \cdot \delta\theta_y + M_z \cdot \delta\theta_z + X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z \cdot \quad (9.56)$$

Scanned with OKEN Scanner

Principiul deplasărilor virtuale. Se consideră un sistem material, supus acțiunii unui sistem de forțe date și la legături fără frecări. Pentru ca sistemul să fie în echilibru, trebuie ca suma lucrurilor mecanice virtuale, corespunzătoare tuturor forțelor date și de legătură la care este supus sistemul să fie nulă, adică :

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} (X_i \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta z_i) = 0. \tag{9.57}$$

În aceasta constă principiul deplasărilor virtuale.

9.5. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

Se consideră un sistem material în mișcare, a cărui poziție, în raport cu un sistem de referință este perfect determinată în orice moment prin cunoașterea a m parametrii independenți : $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Un astfel de sistem va avea m grade de libertate, iar parametrii independenți $q_1, q_2, \ldots, q_m$ se numesc coordonatele generalizate ale lui Lagrange.

Pentru o deplasare virtuală a sistemului material, lucrul mecanic elementar total se poate pune sub forma :

$$\delta L = \Sigma \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = \sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot \delta q_i, \tag{9.58}$$

unde Q_i sînt forțele generalizate corespunzătoare coordonatelor generalizate q_i și se calculează cu relația :

$$Q = \frac{\partial L}{\delta q_i} \tag{9.59}$$

Considerînd în locul forței $\bar{F}$, forța de inerție $\bar{F}_i = -m\bar{a} = -m\dot{\bar{v}}$, lucrul mecanic elementar total, pentru o variație δq_i a coordonatei generalizate va fi :

$$\delta L_i = \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial E}{\partial q_i} \right] \delta q_i \cdot \tag{9.60}$$

Conform principiului deplasărilor virtuale, se poate scrie :

$$\delta L + \delta L_i = 0 \tag{9.61}$$

sau ținînd seama de (9,59) și (9.61)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i \cdot \tag{9.62}$$

Corespunzător celor m coordonate generalizate se obține m ecuații ale lui Lagrange :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1 ; \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} Q_2 ; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_m} = Q_m . \end{aligned}\right\} \tag{9.63}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd forțele care acționează asupra sistemului material sînt conservative, se poate determina o funcție de forță $= U(q \ldots, q_m)$ astfel încît să se poată scrie :

$$\delta L = \delta U = \sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i,$$

de unde

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \cdot$$

Prin înlocuirea forței generalizate în ecuațiile lui Lagrange, acestea devin :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1,2, \ldots, m). \tag{9.64}$$

Dacă se introduc în locul funcțiilor E și U funcția compusă a lui Lagrange :

$$L = E + U,$$

denumită potențial cinetic, ecuațiile lui Lagrange se pot scrie sub forma :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \cdot \tag{9.65}$$

9.6. DINAMICA PUNCTULUI

Punctul material constituie o abstractizare a realității cu scopul de a aproxima mișcările anumitor corpuri din natură sau din tehnică. În studiul mișcării punctului material liber, sub acțiunea unui sistem de forțe, pot surveni două tipuri de probleme :

— problema directă : cunoscîndu-se mișcarea punctului material liber, de masă constantă, se cere să se determine rezultanta forțelor aplicate punctului considerat ;

— problema inversă : cunoscînd forțele care acționează asupra punctului material liber de masă constantă, se cere determinarea mișcării punctului considerat.

Problemele cele mai des întîlnite sînt cele în care se dau :

— forțele care acționează asupra punctului material ca funcții de timp, de poziția și de viteza punctului ;

— masa punctului material ;

— condițiile inițiale ale mișcării.

Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului material, în coordonate carteziene sînt :

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{i=1}^{n} X_i ; \\ m\ddot{y} &= \sum_{i=1}^{n} Y_i ; \\ m\ddot{z} &= \sum_{i=1}^{n} Z_i \cdot \end{aligned}\right\} \tag{9.66}$$

Ecuațiile (9.66) reprezintă un sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul doi în raport cu funcțiile necunoscute x, y și z de variabilă t:

$$x = x(t)\,;\; y = y(t)\,;\; z = z(t)\,. \tag{9.67}$$

Integralele generale ale sistemului de ecuații diferențiale conțin șase constante arbitrare de integrare, adică au forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,; \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,; \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,. \end{aligned}\right\} \tag{9.68}$$

Valorile constantelor se determină din ecuațiile (9.68) din cele obținute prin derivarea acestora în raport cu timpul, prin introducerea condițiilor inițiale.

$$\text{Pentru } t = t_0 \begin{cases} x = x_0\,;\; y = y_0\,;\; z = z_0\,; \\ \dot{x} = \dot{x}_0\,;\; \dot{y} = \dot{y}_0\,;\; \dot{z} = \dot{z}_0\,. \end{cases} \tag{9.69}$$

Rezultă următorul sistem de șase ecuații algebrice:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,; \\ y_0 &= y(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,; \\ z_0 &= z(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,; \\ \dot{x}_0 &= \dot{x}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,; \\ \dot{y}_0 &= \dot{y}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,; \\ \dot{z}_0 &= \dot{z}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,; \end{aligned}\right\} \tag{9.70}$$

din care rezultă cele șase contante: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 ca funcții de condițiile inițiale.

Introducînd valorile constantelor în relațiile (9. 68) se obțin ecuațiile parametrice ale mișcării punctului material, adică expresiile coordonatelor x, y și z ca funcții de timp.

II. APLICAȚII

9.1. O mașină pentru tensionarea pînzelor de gater are schema cinematică din figura 9.1. Să se determine vitezele rolelor de presare 7 și 8 în mișcarea de regim și momentul motor la pornire. Se cunosc: n_1, R_1, R_2, R_3, R_4, z_5, z_6, R_7 și R_8, precum și momentele de inerție mecanice J_1, J_2, J_3, J_4 și ε_1.

Rezolvare. $R_1 \cdot \omega_1 = R_2 \cdot \omega_2\,;\; \omega_2 = \dfrac{R_1}{R_2}\,\omega_1$, iar $\omega_2 = \omega_3$.

Analog

$$R_3 \cdot \omega_3 = R_4 \cdot \omega_4\,;\; \omega_4 = \frac{R_3}{R_4}\,\omega_3 = \frac{R_1}{R_2}\,\frac{R_3}{R_4}\,\omega_1\,;\; \omega_4 = \omega_5 = \omega_7\,;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\omega_5 \cdot z_5 = \omega_6 \cdot z_6\,;\ \omega_6 = \frac{R_1 R_3 R_5}{R_2 R_4 R_6}\,\omega_1 \text{ dar } \omega_6 = \omega_8 \text{ și deci}$$

$$v_7 = \omega_7 \cdot R_7 = \frac{R_1 R_3}{R_2 R_4}\,R_7 \cdot \omega_1\,;\ v_8 = \omega_8 R_8 = \frac{R_1 R_3 Z_5}{R_2 R_4 Z_6}\,R_8\,\omega_1,$$

iar

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}\ [\text{rad/s}]$$

Pentru determinarea momentului motor se aplică teorema energiei cinetice :

$$E - E_0 = L;$$

la pornire $E_0 = 0$.
La atingerea turației de regim, energia cinetică este :

$$E = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{J_3\omega_3^2}{2} + \frac{J_4\omega_4^2}{2} + \frac{mv^2}{2} =$$

$$= \frac{\omega_1^2}{2}\left[J_1 + J_2\frac{R_1^2}{R_2^2} + J_3\frac{R_1^2}{R_2^2}\cdot\frac{R_3^2}{R_4^2} + J_4 \cdot \frac{R_1}{R_2^2 R_4^2}\cdot\frac{z_5}{z_6} + m\,\frac{R_1^2 R_3^2 R_8^2}{R_2^2\,R_4^2}\cdot\frac{z_5}{z_6}\right] = \frac{\omega_1^2}{2}\,J_{\text{redus}}\,.$$

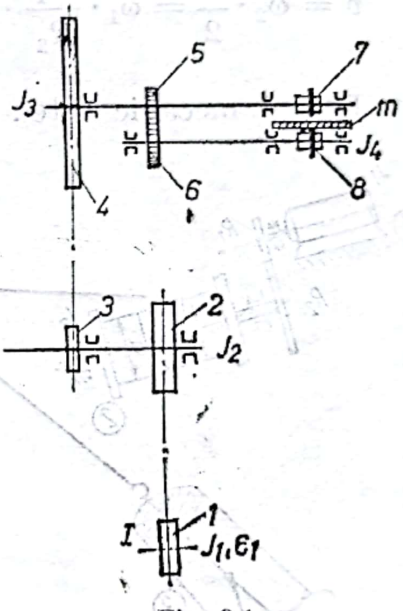


Fig. 9.1

Cum lucrul mecanic la pornire este :

$$L = M_m \cdot \theta_1 - M_r \cdot \theta_8 = \theta_1\left(M_m - M_r\frac{R_1 R_3}{R_2 R_4}\cdot\frac{z_5}{z_6}\right)$$

și este egal cu energia cinetică, se obține expresia momentului motor :

$$M_m = \varepsilon_1 \cdot J_{\text{red}} + M_r\frac{1}{1{,}8}\,.$$

9.2. Troliul pentru tras buștenii în pantă are un motor de acționare. Să se găsească momentul motor necesar la pornire și să se indice puterea motorului la turația nominală cunoscînd : G greutatea bușteanului, μ — coeficientul de frecare, α — panta terenului, R_1, R_2 — razele roților reductorului, d — diametrul troliului, J_1 și J_2 — momentele de inerție mecanice față de axele de rotație pentru motor și troliu și a — accelerația bușteanului.

Rezolvare. Se aplică teorema energiei cinetice $E = L(E_0 = 0)$, unde

$$E = E_1 + E_2 + E_3; \quad E_1 = \frac{J_1\omega_2^2}{2}; \quad E_2 = \frac{J_2\omega_2^2}{2}; \quad E_3 = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Relaţii cinematice :

$$v = \omega_2 \cdot \frac{d}{2} = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{d}{2}; \quad E = \frac{v^2}{2}\left(\frac{G}{g} + J_2\frac{4}{d^2} + J_1\frac{4R_2^2}{d^2R_1^2}\right).$$

Lucrul mecanic este :

$$L = M_m \cdot \theta_1 - x\theta\sin\alpha - x\mu G\cos\alpha$$

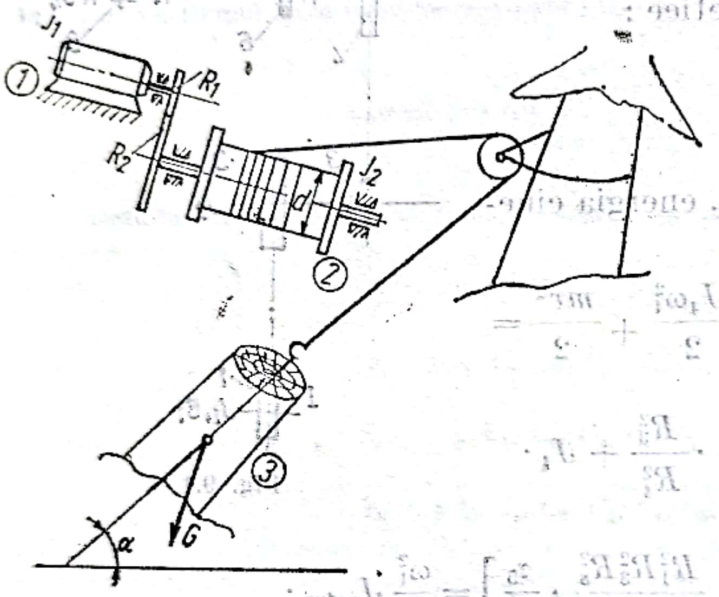


Fig. 9.2

dar $\theta_1 = \frac{2R_2}{R_1 d}x$ şi deci

$$L = x\left[M_m\frac{2R_2}{R_1 d} - G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\right].$$

Egalînd energia cinetică cu lucrul mecanic, şi derivînd în raport cu timpul se determină momentul motor :

$$M_m = \frac{R_1 d}{2R_2}\left[G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a\left(\frac{G}{g} + J_2\frac{4}{d^2} + J_1\frac{4R_2^2}{d^2R_1^2}\right)\right].$$

Puterea motorului la turaţia nominală este legată de cuplul motor prin relaţia

$$M_m = 71620 \cdot \frac{P}{n}\ [\text{cm} \cdot \text{daN}];$$

de aici $P = \frac{M_m n}{71260}$ [CP], pentru n dat în rot/min.

9.3. Să se studieze antrenarea funicularului pasager folosit la colectarea lemnului (tip Wyssen). Să se găsească cuplul motor pentru ridicarea sarcinii G pe verticală şi cuplul motor necesar transportării sarcinii fără manevrarea sistemului de scripeţi dacă se consideră şi greutatea căruciorului alergător Q. Se consideră şi coeficientul s, de rostogolire a rolelor căruciorului alergător pe cablul purtător.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a). Pentru ridicarea sarcinii se impune acceleraţia $\bar{a}_G$. Se neglijează masele scripeţilor O_2 şi O_3 dar se consideră coeficientul λ. Se scriu ecuaţiile de echilibru dinamic :

$$\sum M_{(O_1)i} = 0\,;\quad M_1 - T_1 R_1 - J_1 \varepsilon_1 = 0\,;$$

$$\sum M_{(O_2)i} = 0\,;\quad T_1 = \lambda T_2\,;$$

$$\sum M_{(O_3)i} = 0\,;\quad T_2 = \lambda T_3\,;$$

$$\sum Y_i = 0\,;\quad T_2 + T_3 - G - \frac{G}{g} a_G = 0.$$

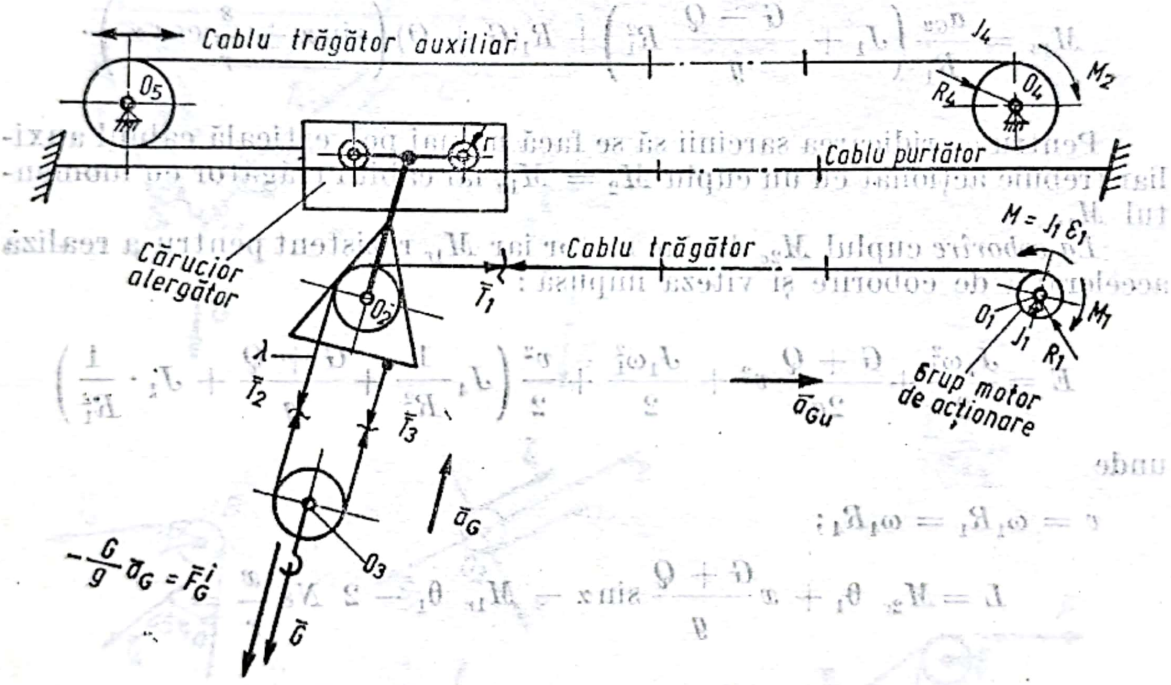


Fig. 9.3

Relaţii cinematice :

$$\varepsilon_1 \cdot R_1 = 2a_G.$$

Rezultă :

$$M_1 = a_G \left(\frac{2J_1}{R_1} + \frac{\lambda^2}{\lambda + 1} \cdot R_1 \frac{G}{g} \right) + \frac{\lambda^2}{\lambda + 1} R_1 \cdot G.$$

b) Pentru transportarea căruciorului alergător se consideră panta α şi acceleraţia a_{Gu}.

La urcare, momentul auxiliar M_2 nu acţionează, iar M_1 trebuie să aibă o valoare mai mică decît cea necesară deplasării pe verticală a sarcinii. Cu teorema energiei cinetice ;

$$E - E_0 = L,$$

unde

$$E_0 = 0;\ E = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{G+Q}{2g}v^2;\ v = \omega_1 \cdot R_1;$$

$$L = M_1\theta_1 - x(G+Q)\ \sin\alpha - 2\ Ns\ \frac{x}{r}\ ;$$

$$N = (Q+G)\frac{1}{2}\cos\alpha \text{ şi } x = \theta_1 R_1.$$

Egalînd energia cinetică cu lucrul mecanic şi derivînd în raport cu timpul se obţine :

$$M_{1u} = \frac{a_{Gu}}{R_1}\left(J_1 + \frac{G-Q}{g}R_1^2\right) + R_1(G+Q)\left(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha\right).$$

Pentru ca ridicarea sarcinii să se facă numai pe verticală cablul auxiliar trebuie acţionat cu un cuplu $M_2 = M_{1u}$ iar cablul trăgător cu momentul M_1.

La coborîre cuplul M_{2c} devine motor iar M_{1r} rezistent pentru a realiza acceleraţia de coborîre şi viteza impusă :

$$E = \frac{J_4\omega_4^2}{2} + \frac{G+Q}{2g}v^2 + \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{v^2}{2}\left(J_4\frac{1}{R_4^2} + \frac{G+Q}{g} + J_1\cdot\frac{1}{R_1^2}\right)$$

unde

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_4 R_4;$$

$$L = M_{2c}\ \theta_4 + x\frac{G+Q}{g}\sin\alpha - M_{1r}\ \theta_1 - 2\ Ns\frac{x}{r} =$$

$$= xM_{2c}\frac{1}{R_4} + \frac{G+Q}{g}\sin\alpha - M_{1r}\frac{1}{R_1} - \frac{G+Q}{g}\cdot\frac{s}{r}\cos\ \alpha;$$

$$L = x\left[M_{2c}\frac{1}{R_4} - M_{1r}\frac{1}{R_1} + \frac{G+Q}{g}\left(\sin\ \alpha - \frac{s}{r}\cos\ \alpha\right)\right].$$

Egalînd energia cinetică cu lucrul mecanic şi derivînd în raport cu timpul se obţine :

$$M_{2c} = R_4\left[M_{1r}\frac{1}{R_1} - \frac{G+Q}{g}\left(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\ \alpha\right) + a_{Gc}\left(\frac{J_4}{R_4^2} + \frac{G+Q}{g} + \frac{J_1}{R_1^2}\right)\right].$$

9.4. Se dă schema căruciorului alergător al unui funicular. Să se găsească : a) forţa F în funcţie de greutate G considerînd rigiditatea funiculară λ, la limita de echilibru ; b) acceleraţia la pornire dacă se consideră şi Q greutatea căruciorului alergător.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a). Secţionînd cablurile şi izolînd scripeţii din sistem se condiţionează echilibrul prin ecuaţiile (fig. 9.4, *b*...*g*):

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0\,;\ S_1 \sin(45^\circ - \alpha) + S_2 \sin(45^\circ + \alpha) = 0\,; \\ &\sum Y_i = 0\,;\ S_1 \cos\ (45^\circ - \alpha) + S_2 \cos(45^\circ + \alpha) - G = 0. \\ &S_1 = G \sin\ (45^\circ + \alpha)\,;\ S_2 = G\ \sin\ (45^\circ - \alpha). \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

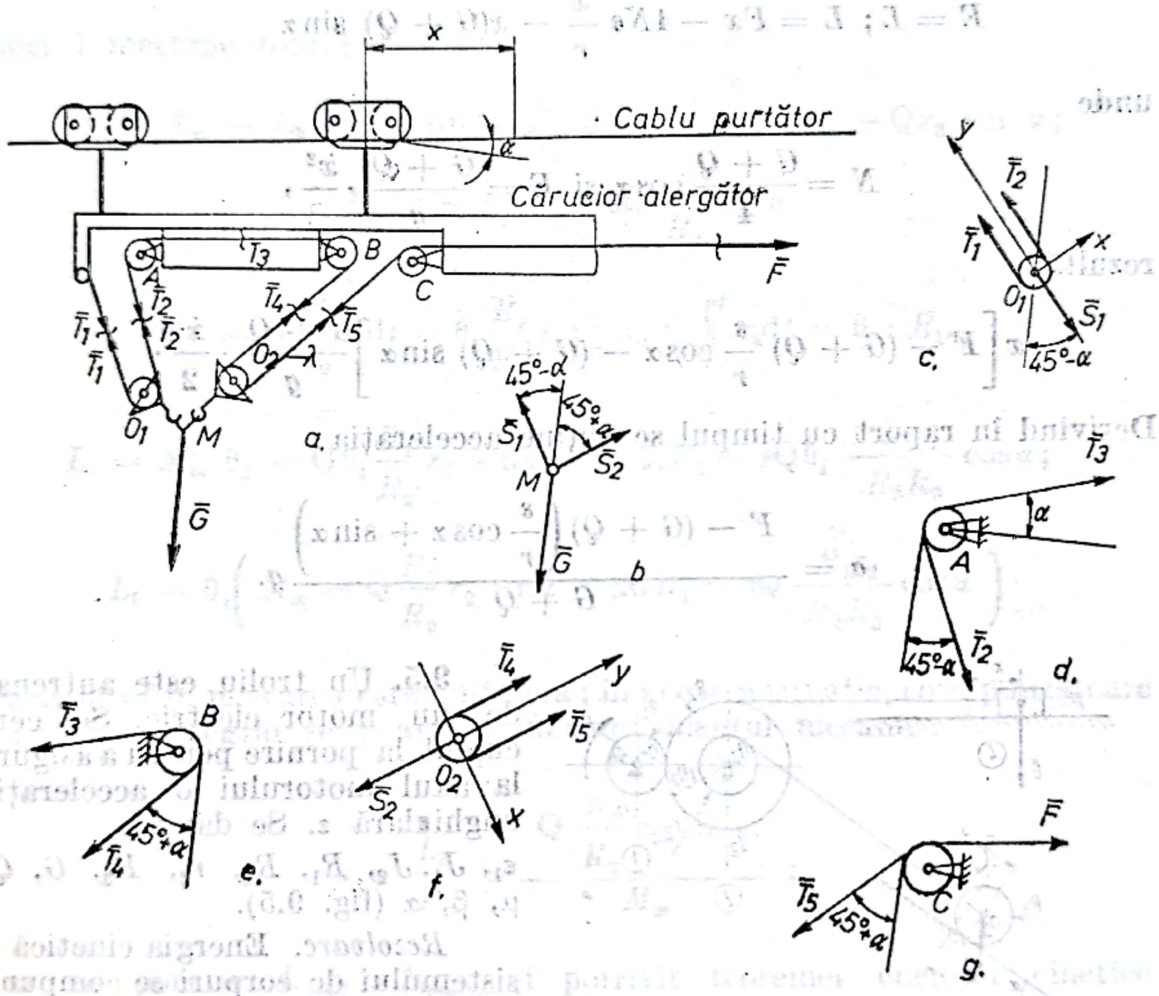


Fig. 9.4

$$\left.\begin{aligned} &\sum Y_i = 0\,;\ T_1 + T_2 - S_1 = 0\,; \\ &\sum M_{(O_1)} = 0\,;\ T_2 - \lambda T_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

$$\sum M_{(A)} = 0\,;\ T_3 - \lambda T_2 = 0. \quad \text{(c)}$$

$$\sum M_{(N)} = 0\,;\ T_4 - \lambda T_3 = 0 \quad \text{(d)}$$

$$\sum Y_i = 0\,;\ T_4 + T_5 - S_2 = 0\,; \quad \text{(e)}$$

$$\sum M_{(O_2)} = 0\,;\ T_5 - \lambda T_4 = 0. \quad \text{(f)}$$

$$\sum M_{(C)} = 0\,;\ F - \lambda T_5 = 0. \quad \text{(g)}$$

Condiția de echilibru este:

$$F = \frac{\lambda^2}{\lambda + 1} G \sin(45° - \alpha).$$

b) Accelerația la pornire, cu teorema energiei cinetice:

$$E = L;\ L = Fx - 4Ns\frac{x}{r} - x(G + Q)\sin\alpha$$

unde

$$N = \frac{G + Q}{4}\cos\alpha \text{ și } E = \frac{G + Q}{g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{2},$$

rezultă

$$x\left[F - (G + Q)\frac{s}{r}\cos\alpha - (G + Q)\sin\alpha\right]\frac{G + Q}{g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Derivînd în raport cu timpul se obține accelerația:

$$a = \frac{F - (G + Q)\left(\frac{s}{r}\cos\alpha + \sin\alpha\right)}{G + Q} g.$$

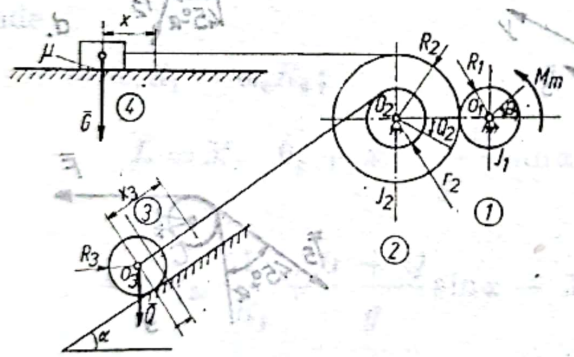


Fig. 9.5

9.5. Un troliu este antrenat de un motor electric. Se cere cuplul la pornire pentru a asigura la axul motorului o accelerație unghiulară ε. Se dau: $\varepsilon_1, J_1, J_2, R_1, R_2, r_2, R_3, G, Q, \mu, \beta, \alpha$ (fig. 9.5).

Rezolvare. Energia cinetică a sistemului de corpuri se compune din energiile cinetice ale corpurilor sistemului:

$$E = E_{1(\text{rot})} + E_{2(\text{rot})} + E_{3(\text{rot}+\text{tr})} + E_{4(\text{tr})}.$$

$$E_1 = \frac{J_1\omega_1^2}{2};\ E_2 = \frac{J_2\omega_2^2}{2};\ E_3 = \frac{Q}{2g} \cdot v_3^2 + \frac{J_3\omega_3^2}{2};\ E_4 = \frac{Gv_4^2}{2g},$$

Relații cinematice:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1};\ \omega_2 = \omega_1\frac{R_1}{R_2};\ v_3 = \omega_2 \cdot r_2 = \omega_1\frac{R_1}{R_2}r_2;\ \omega_3 = \frac{v_3}{R_3} = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{r_2}{R_3};$$

$$v_4 = \omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 R_1.$$

Energia cinetică totală este :

$$E = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2}{2}\left(\omega_1 \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \frac{30}{4g}\left(\omega_1 \frac{R_1}{R_2} r_2\right)^2 + \frac{G}{2g}(\omega_1 R_2)^2 =$$

$$= \frac{\omega_1^2}{2}\left(J_1 + J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{3}{2}\frac{Q}{g}\frac{R_1^2}{R_2^2} r_2^2 + \frac{G}{g} R_1^2\right) = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot J_{\text{redus}}\, O_1$$

Lucrul mecanic total :

$$L_t = L_m - L_u - L_p \text{ unde } L_m = M_m \cdot \theta_1 ; L_u = -Qx_3 \sin \alpha ;$$

$$L_p = -\mu G x_4 - sQ \frac{x_3}{R_3} \cos\alpha$$

$$\text{dar } x_3 = \int_0^t v_3 dt = \theta_1 \frac{R_1}{R_2} r_2 ; \quad x_4 = \int_0^t v_4 dt = \theta_1 \cdot R_1 .$$

$$L_t = M_m \theta_1 - Q\theta_1 \frac{R_1}{R_2} r_2 \sin\alpha - \mu G \theta_1 R_1 - sQ\theta_1 \frac{R_1 r_2}{R_2 R_3} \cos\alpha ;$$

$$L_t = \theta_1 \left(M_m - Q \frac{R_1}{R_2} r_2 \sin\alpha - \mu G R_1 - sQ \frac{R_1 r_2}{R_2 R_3} \cos\alpha \right) .$$

Dacă $L_t = 0$, mișcarea este uniformă ; în această situație, corespunzătoare mișcării de regim se poate defini randamentul mecanic :

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = \frac{Q \frac{R_1}{R_2} r_2 \sin\alpha}{M_m} ;$$

dar la pornire $L_{total} > L_{tregim}$ și potrivit teoremei energiei cinetice rezultă :

$$L = E - E_0 ; \frac{\omega_1^2}{2} J_{red} = \theta_1 \left(M_m - Q \frac{R_1}{R_2} r_2 \sin\alpha - \mu G R_1 - sQ \frac{R_1 r_2}{R_2 R_3} \cos\alpha ; \right)$$

se derivează :

$$\varepsilon_1 \cdot J_{red} = M_m - Q \frac{R_1}{R_2} r_2 \sin\alpha + \mu G R_1 - sQ \frac{R_2 r_2}{R_2 R_3} \cos\alpha ,$$

de unde se obține

$$M_m = \varepsilon_1 J_{red} + Q \frac{R_1}{R_2} r_2 \sin\alpha + \mu G R_1 + sQ \frac{R_1 r_2}{R_2 R_3} \cos\alpha ;$$

în mișcare de regim $\varepsilon_1 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

9.6. Pentru transmisia cu curea din figura 9.6, utilizată în industria de prelucrare a lemnului, se cere să se calculeze momentul motor la pornire în sarcină, dacă se dau : ε_1, J_1, R_1, R_2 și momentul rezistent M_{rez}.

Rezolvare. Se secționează cureaua și reprezentăm tensiunile S_1 și S_2 din curea. De asemenea, apar cuplurile de inerție :

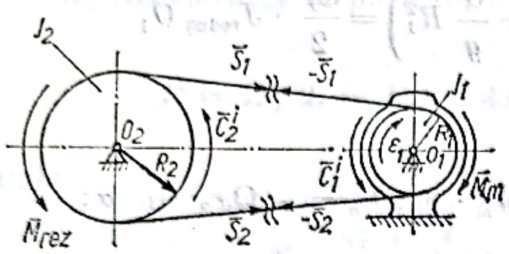


Fig. 9.6

$$C_1^i = J_1\varepsilon_1 + C_2^i = J_2\varepsilon_2.$$

Ecuațiile de momente în raport cu axele roților sînt :

$$\left.\begin{aligned} \sum M_{(O_1)} = 0 : C_1^i + R_1S_1 - M_m - R_1S_2 = 0 ; \\ \sum M_{(O_2)} = 0 : M_{rez} + R_2S_2 + C_2^i - R_2S_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Formula lui Euler

$$S_1 = S_2e^{\mu\alpha} \quad (b)$$

dă legătura între cele două tensiuni ; făcînd înlocuirile, se obține :

$$\left.\begin{aligned} J_1\varepsilon_1 + R_1S_2e^{\mu\alpha} - R_1S_1 = M_m ; \\ M_{rez} + R_2S_2 + J_2\varepsilon_2 - R_2S_2e^{\mu\alpha} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Înlocuind în ecuația doua

$$\varepsilon_2 = \frac{R_1}{R_2}\varepsilon_1,$$

se obține :

$$R_2S_2(1-e^{\mu\alpha}) = J_2\varepsilon_2 - M_{rez},$$

sau

$$S_2 = \frac{\frac{J_2}{R_1}R_2\ \varepsilon_1 + M_{rez}}{R_2(e^{\mu\alpha} - 1),},$$

Înlocuind în formula momentului motor, rezultă :

$$J_1\varepsilon_1 + \left(J\frac{R_1}{2R_2}\varepsilon_1 + M_{rez}\right) = M_m,$$

sau

$$M_m = J_1\varepsilon_1 + J_2\frac{R_1^2}{R_2^2}\varepsilon_1 + \frac{R_1}{R_2}M_{rez}.$$

În final se obține :

$$M_m = \varepsilon_1 J_{red} + \frac{R_1}{R_2}M_{rez}, \quad (d)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s-a notat prin

$$J_{red} = J_1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot J_2$$

momentul de inerție al sistemului redus la axa arborelui motor.

9.7. Schema cinematică a unui schilift indică transmiterea mișcării de la axul motor 1 la roata conducătoare 2 care susține cablul trăgător 3 (fig. 9.7). Acesta se înfășoară în circuit închis pe rola 4 care este prevăzută cu un dispozitiv de întindere cu contragreutate. Se cere momentul motor.

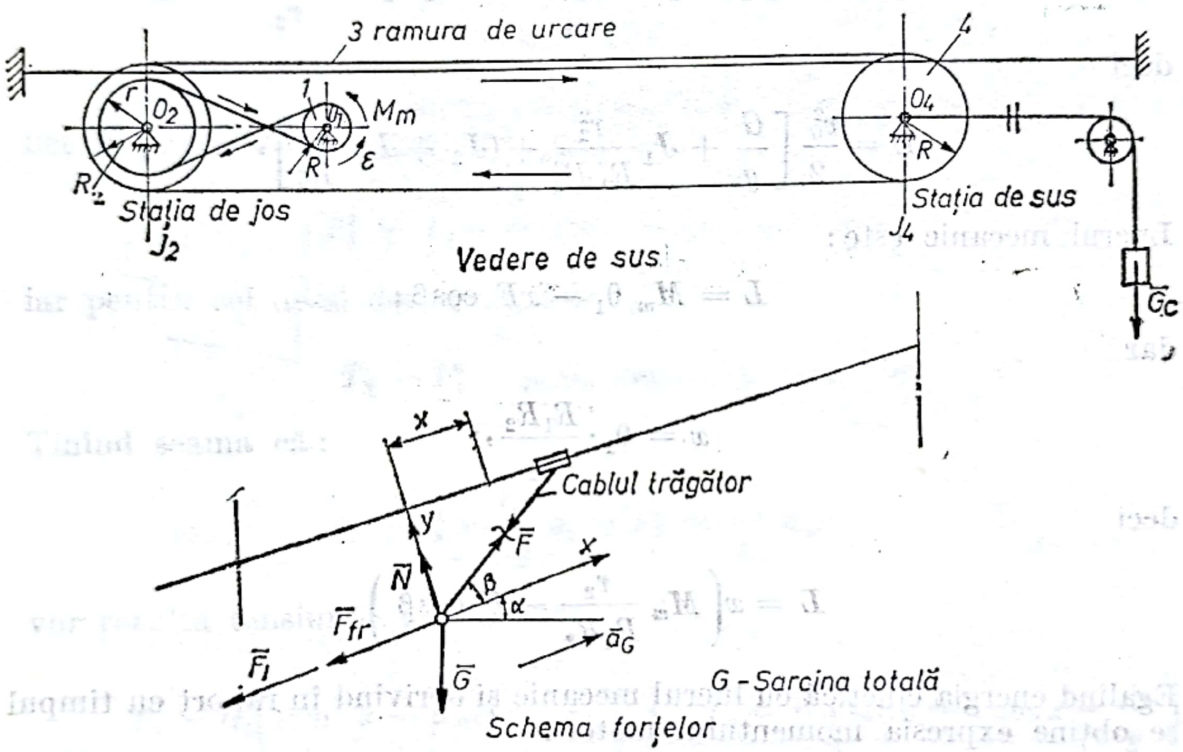


Fig. 9,7

Rezolvare. Se determină forța în cablul trăgător:

$$\sum X_i = 0;\ F_i + F_{fr} - G\ \sin\alpha - F\ \cos\beta = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;\ N + F\ \sin\beta - G\ \cos\alpha = 0. \qquad \text{(a)}$$

$$N = G\ \cos\alpha - F\ \sin\beta;\ F_{fr} = \mu N;\ F^i = \frac{G}{g}\, a_G.$$

Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$F = G\left(\frac{\sin\ \alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} + \frac{a_G}{g}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se aplică teorema energiei cinetice pentru calculul momentului motor la pornire:

$$E = L, \text{ căci } E_0 = 0.$$

Energia cinetică este:

$$E = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{J_4\omega_4^2}{2} + \frac{G}{2g} \cdot v_G^2$$

Relații cinematice:

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 r_2;\ \omega_2 = \omega_4;\ v = \omega_2 R_2 = \frac{\omega_1 R_1}{r_2} \cdot R_2,$$

deci

$$E = \frac{v_G^2}{2}\left[\frac{G}{g} + J_1\frac{r_2^2}{R_1^2 R_2^2} + (J_2 + J_4)\frac{1}{R_2^2}\right],$$

Lucrul mecanic este:

$$L = M_m\,\theta_1 - xF\cos\beta;$$

dar

$$x = \theta_1 \cdot \frac{R_1 R_2}{r_2},$$

deci

$$L = x\left(M_m\frac{r_2}{R_1 R_2} - F\cos\beta\right),$$

Egalînd energia cinetică cu lucrul mecanic și derivînd în raport cu timpul se obține expresia momentului motor:

$$M_m = \frac{R_1 R_2}{r}\left\{a_G\left[\frac{G}{g} + J_1\frac{r_2^2}{R_1^2 R_2^2} + (J_2 + J_4)\frac{1}{R_2^2}\right] + F\cos\beta\right\},$$

sau în final

$$M_m = \frac{R_1 R_2}{r}\left\{a_G\frac{G}{g}(1 + \cos\beta) + J_1\frac{r_2^2}{R_1^2 R_2^2} + (J_2 + J_4)\frac{1}{R_2^2}\right] + G\cos\beta\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\Bigg\}.$$

9.8. Să se studieze mișcarea celor două vagonete forestiere de greutate G_1 și G_2, unul plin iar celălalt gol, pe planul înclinat AB cu unghiul α față de orizontală (fig. 9.8).

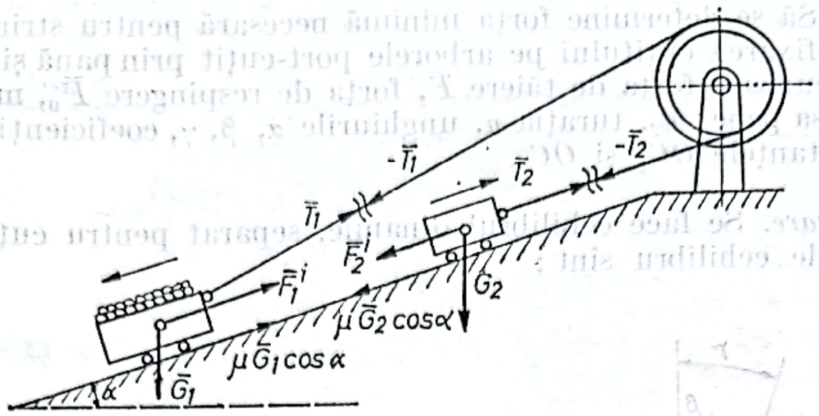


Fig. 9.8

Rezolvare. Se scriu ecuațiile de echilibru dinamic pentru fiecare vagonet în parte. Pentru primul vagonet avem:

$$F_1^i + T_1 - G_1 \sin\alpha + \mu G_1 \cos\alpha = 0,$$

iar pentru cel de-al doilea vagonet:

$$T_2 - F_2^i - \mu\mu G_2 \cos\alpha - G_2 \sin\alpha = 0$$

Ținînd seama că:

$$F_1^i = \frac{G_1}{g} a_1 \text{ și } F_2^i = \frac{G_2}{g} a_2,$$

vor rezulta tensiunile din cabluri:

$$T_1 = G_1\left((\sin\ \alpha - \mu\cos\alpha - \frac{a_1}{g}\right);\ T_2 = G_2\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + \frac{a_2}{g}\right).$$

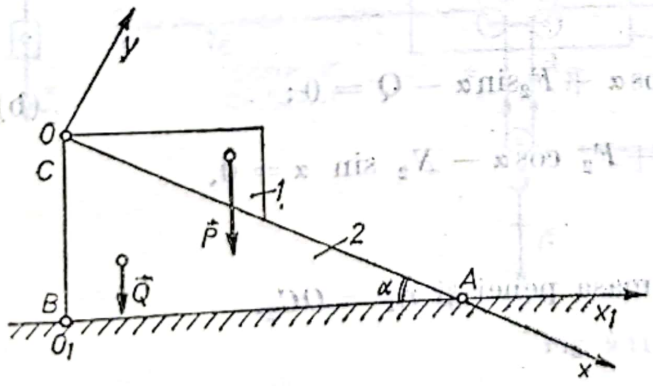


Fig. 9.9

9.9. O prismă de lemn de greutate P alunecă fără frecare pe fața OA a unei alte prisme, tot de lemn, triunghiulare de greutate Q (fig. 9.9.).
Să se stuidieze mișcarea sistemului.

R. $a_1 = \dfrac{P + Q}{Q + \sin^2\alpha} g \sin\alpha$,

în sensul pozitiv al axei Ox;

$a_2 = \dfrac{P \sin 2\alpha}{2(Q + P\sin^2\alpha)} g$, în sensul negativ al axei O_1x_1.

Scanned with OKEN Scanner

9.10. Să se determine forţa minimă necesară pentru strîngerea unui şurub la fixarea cuţitului pe arborele port-cuţit prin pană şi şurub (fig. 9.10). Se cunosc : forţa de tăiere $\bar{F}$, forţa de respingere $\bar{F}_0$, masa cuţitului m_1, masa penei m_2, turaţia n, unghiurile α, β, γ, coeficienţii de frecare μ_1, μ_2, distanţele OC_1 şi OC_2.

Rezolvare. Se face echilibrul dinamic, separat pentru cuţit şi pană. Ecuaţiile de echilibru sînt :

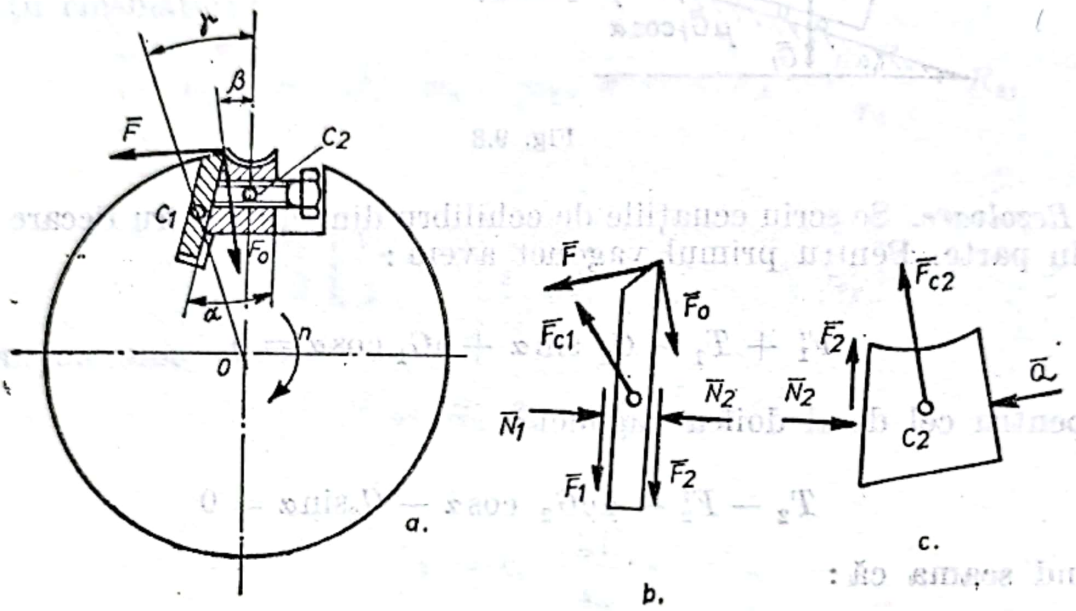


Fig. 9.10

Pentru cuţit :

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i=0 &: F_0\sin\beta+(N_1-N_2)\cos\alpha-(F_1+F_2)\sin\alpha-F\cos\beta-F_{c1}\sin\gamma=0\,;\\ \sum Y_i=0 &: -F_0\cos\beta(N_1-N_2)\sin\alpha-(F_1+F_2)\cos\alpha-F\sin\beta+F_{c1}\cos\gamma=0,\end{aligned}\right\}\ (a)$$

în care : $F_1=\mu_1N_1$, $F_2=\mu_2N_2$, $F_{c1}=m_1\left(\dfrac{\pi n}{30}\right)^2 r_{c1}$; m_1 fiind masa cuţitului şi $r_{c1}=OC_1$.

Pentru pană :

$$\sum X_i=0 : N_2\cos\alpha+F_2\sin\alpha-Q=0\,; \qquad (b)$$

$$\sum Y_i=0 : F_{c2}+F_2\cos\alpha-N_2\sin\alpha=0,$$

în care :

$$F_{c2}=m_2\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 r_{c2}\,;\ m_2=\text{masa penei şi } r_{c2}=OC_2.$$

Din prima ecuaţie se obţine :

$$N_1=\frac{F\cos\beta+F_{c1}\sin\gamma-F_0\sin\beta+N_2(\cos\alpha+\mu_2\sin\alpha)}{\cos\alpha-\mu_1\sin\alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se introduce expresia lui N_1 în ecuația doua și se obține :

$$N_2 = \frac{F_{c1}[\cos(\alpha+\gamma) - \mu_1\sin(\alpha+\gamma) - F[\sin(\alpha+\beta) + \mu_1\cos(\alpha+\beta)]}{\mu_1 + \mu_2} -$$

$$- \frac{F_0[\cos(\alpha+\beta) - \mu_1\sin(\alpha+\beta)]}{\mu_1 + \mu_2}$$

Atunci

$$Q = N_2\cos\alpha + \mu_2 N_2 \sin\alpha + N_2(\cos\alpha + \mu_2\sin\alpha),$$

sau

$$Q = \frac{F_{c1}[\cos(\alpha+\gamma) - \mu_1\sin(\alpha+\gamma)](\cos\alpha + \mu_2\sin\alpha)}{\mu_1 + \mu_2} -$$

$$\frac{F\{[\sin(\alpha+\beta) + \mu_1\cos(\alpha+\beta)] + F_0\cos(\alpha+\beta) - \mu_1\sin(\alpha+\beta)\}(\cos\alpha + \mu_2\sin\alpha)}{\mu_1 + \mu_2}.$$

La mers în gol $F = 0$ și $F_0 = 0$ și rezultă :

$$Q = \frac{F_{c1}[\cos(\alpha+\gamma) - \mu_1\sin(\alpha+\gamma)] \cdot (\cos\alpha + \mu_2\sin\alpha)}{\mu_2 + \mu_2}.$$

9.11. Funicularul pasager de tip „Ciucaș" transportă sarcina G cu ajutorul căruciorului alergător ca în figura 9.11 Se cere cuplul motor la pornire dacă motorul de ridicare al sarcinii este blocat.

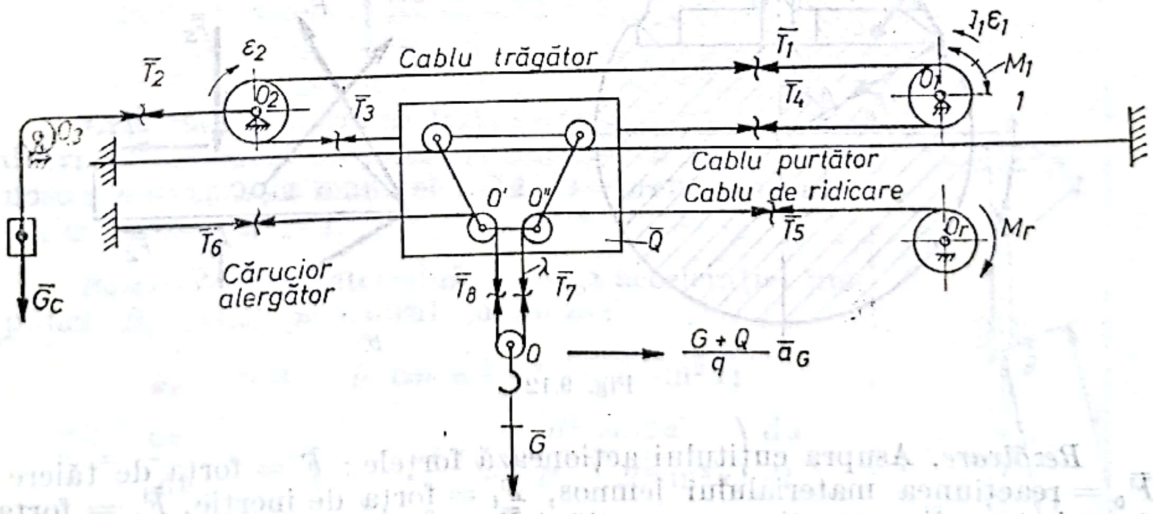


Fig. 9.11

Rezolvare. Considerînd sensul **1** de antrenare se scriu ecuațiile de echilibru dinamic :

$$\sum M_{(O_1)} = 0\,;\; M_1 + T_4R_1 - T_1R_1 - J_1\,\varepsilon_1 = 0\,;\; (T_v = 0)\,;\; T_2 = T_3\,e^{\mu\pi}\,;$$

$$\sum X_i = 0;\ T_3 + T_6 - T_4 - T_5 - \frac{G+Q}{g} a_G = 0;\ \text{(pentru cărucior)}$$

$$\sum M_{(0)_1} = 0;\ T_8 = \lambda T_7;\ \lambda T_6 = T_8;\ T_7 = \lambda T_5;$$

$$\sum Y_i = 0;\ T_8 - T_7 - G = 0;$$

$$\sum M_{(0)3i} = 0;\ \lambda T_2 - G_c = 0;$$

$$\sum X_i = 0;\ T_2 = T_1 + T_3.$$

După rezolvarea sistemului se obțin :

$$M_1 = J_1 \frac{a_G}{R_1} + R_1 e^{\mu\pi}\left[\frac{G}{(\lambda+1)}(\lambda - 1) - \frac{G+Q}{g} a_G\right];\ G_c = \lambda(1 + e^{\mu\pi})$$

$$\left[\frac{G}{\lambda(\lambda+1)}(\lambda - 1) - \frac{G+Q}{g} a_G\right].$$

9.12. Să se determine forța de strîngere la fixarea cu șurub a unui cuțit pe arborele port-cuțit (fig. 9.12). Se cunosc α, β, n, $\overline{OC}$, $\bar{F}$, $\bar{F}_0$, μ și m.

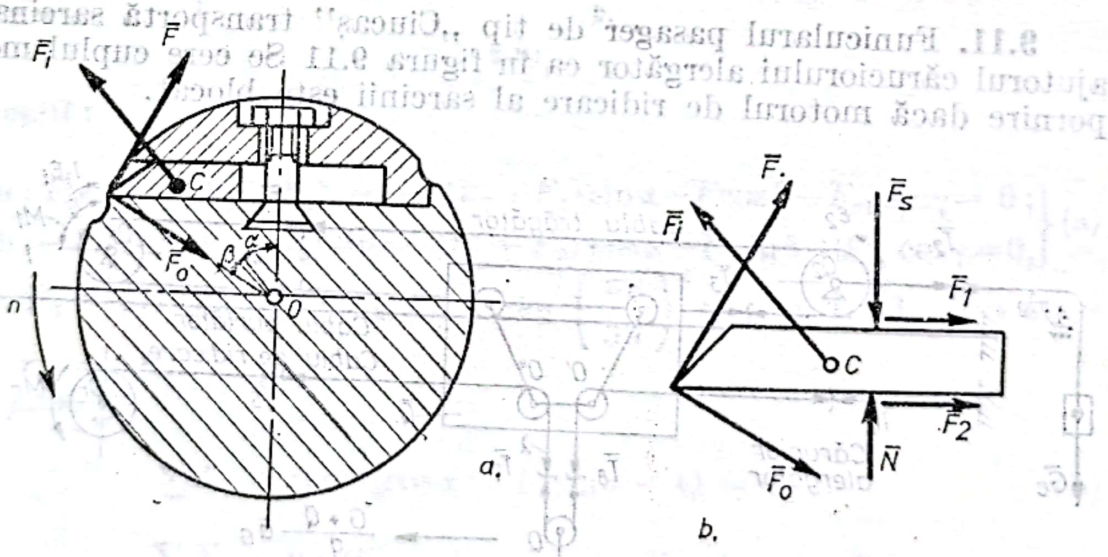


Fig. 9.12

Rezolvare. Asupra cuțitului acționează forțele : $\bar{F}$ = forța de tăiere, $\bar{F}_0$ = reacțiunea materialului lemnos, $\bar{F}_i$ = forța de inerție, $\bar{F}_s$ = forța de strîngere, $\bar{N}$ = reacțiunea normală și $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ forțele de frecare. Forța de inerție se determină cu relația :

$$F_i = m\frac{v_c^2}{OC} = m \cdot \frac{\pi^2 n^2}{900} OC,$$

în care m este masa cuțitului iar C este centrul de greutate al cuțitului.

Ecuaţia vectorială de echilibru este :

$$\bar{F}_0 + \bar{F}_i + \bar{F} + \bar{F}_s + \bar{N} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0,$$

sau proiectînd pe axele de coordonate ale unui sistem de referinţă xOy, se obţin ecuaţiile :

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0\,;\ N - F_s + F_i \cos\alpha + F \sin(\alpha+\beta) - F_0 \cos(\alpha+\beta) = 0\,;\\ &\sum X_i = 0\,;\ F_1 + F_2 + F_0 \sin(\alpha+\beta) - F_i \sin\alpha + F\cos(\alpha+\beta) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Dar :

$$F_1 = \mu F_s \text{ şi } F_2 = \mu N.$$

Atunci ecuaţia doua devine :

$$\mu F s + \mu N + F_0 \sin(\alpha+\beta) - F_i \sin\alpha + F\cos(\alpha+\gamma) = 0.$$

Rezultă :

$$N = \frac{1}{\mu}\left[F_i \sin\alpha - F\cos(\alpha+\beta) - F_0 \sin(\alpha+\beta) - \mu F_s)\right]$$

Introducînd valoarea lui N în prima ecuaţie se obţine :

$$F_s = \frac{1}{2}\left\{\left(F_i \frac{\sin\alpha}{\mu} + \cos\alpha\right) + F\left[(\sin\alpha+\beta) - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\mu}\right] - F_0 \left[\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\mu} + \cos(\alpha+\beta)\right]\right\}.$$

9.13. Să se determine forţa de inerţie maximă ce se dezvoltă în cadrul cu pînze 1, din figura 9.13. Se cunosc : n = turaţia manivelei OA, G = greutatea cadrului cu pînze, R şi l.

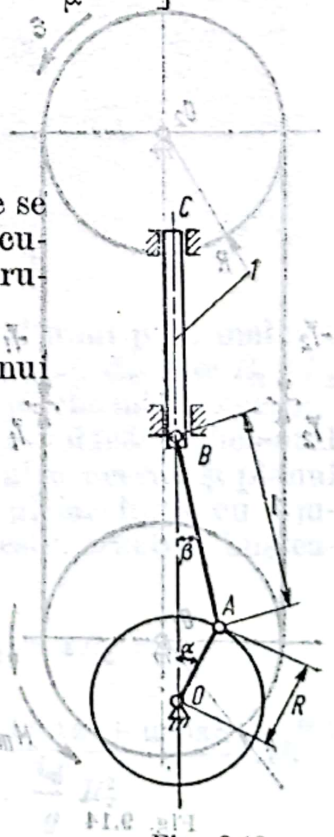


Fig. 9.13

Rezolvare. Se determină expresia acceleraţiei unui punct B, situat pe cadrul cu pînze :

$$s_B = OB = R\cos\alpha + \sqrt{l^2 - R^2\sin^2\alpha};$$

$$v_B = \frac{\mathrm{d}s_B}{\mathrm{d}t} = -\left(R\sin\alpha + \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\alpha}}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}.$$

Sau dacă se notează

$$\frac{R}{l} = \lambda \text{ şi } \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega, \text{ atunci } v_B = -$$

$$-\left(R\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} R \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}}\right)\omega\,;$$

considerînd că $\lambda^2 \cong 0$, se poate scrie că :

$$|\bar{v}_B| = \left(R \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} R \sin 2\alpha \right) \omega.$$

Derivînd viteza în raport cu timpul rezultă :

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = -(R \cos\alpha + \lambda R \cos 2\alpha)\omega^2 ;$$

sau

$$|\bar{a}_B| \cong R\omega^2 (\cos\alpha + \lambda \cos 2\alpha).$$

Forța de inerție maximă are expresia :

$$F_{max} = \frac{G}{g} a_{B\,max},$$

în care g este accelerația gravitațională, iar

$$(a_{Bmax})_{\alpha=0} = R\omega^2(1+\lambda).$$

Rezultă :

$$F_{max} = \frac{G}{g} R\omega^2(1+\lambda) = \frac{G}{g} R(1+\lambda)\frac{\pi^2 n^2}{900}.$$

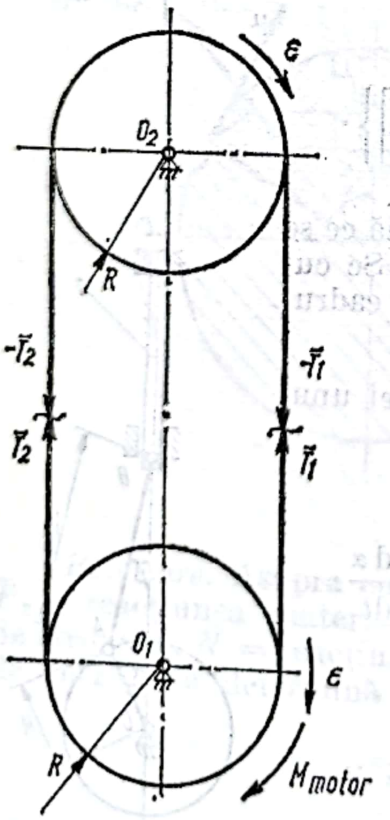


Fig. 9.14

9.14. Să se determine expresia momentului motor ce trebuie aplicat la axul volantului inferior al ferăstrăului panglică, la mers în gol, în regim de pornire. Se cunosc momentele de inerție mecanice ale volanților J, raza R, și accelerația unghiulară ε (fig. 9.14).

Rezolvare. Se secționează panglica ferăstrăului, se introduc tensiunile. Teorema momentului cinetic față de punctele O_1 și O_2 se scrie :

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{K}}_1 &= \sum M_{O_1}\,;\; M_{motor} + (T_2 - T_1)R = J_1\varepsilon\,; \\ \dot{\bar{K}}_2 &= \sum M_{O_2}\,;\; (T_1 - T_2)R = J_2\varepsilon, \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

iar din formula lui Euler se obține legătura între tensiuni

$$T_1 = T_2 e^{\mu\alpha}.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații rezultă :

$$T_2 = \frac{J\varepsilon}{(e^{\mu\alpha} - 1)R} \text{ și } M_{motor} = J\varepsilon + (T_1 - T_2)R =$$

$$= J\varepsilon + T_2(e^{\mu\alpha} - 1)R = 2J\varepsilon.$$

9.15. Un buștean este rostogolit pe un plan înclinat fiind tras de un cablu petrecut pe după el, ca în figura 9.15. Să se determine forța P care trebuie să se dezvolte în ramura motoare a cablului pentru ca bușteanul să urce uniform.

Rezolvare. Plecînd de la teorema impulsului $\bar{R} = \dot{\bar{H}}$ și proiectînd această ecuație vectorială pe direcția mișcării și pe normala la această direcție, se obține :

$$\left.\begin{aligned}(P+Q)\cos\beta - G\sin\alpha &= \frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}v_C\right);\\ (P+Q)\sin\beta - G\cos\alpha + N &= 0.\end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

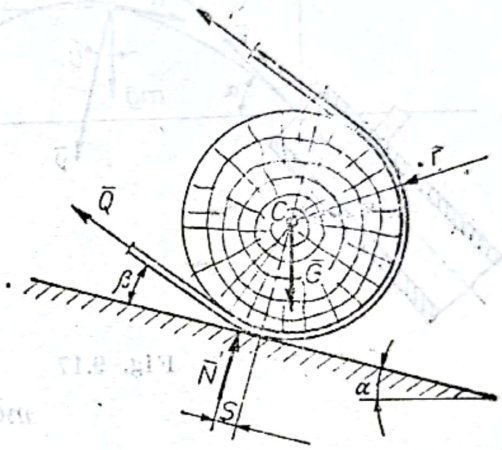


Fig. 9.15

Teorema momentului cinetic $\bar{M}_C = \dot{\bar{K}}_C$, aplicată în raport cu centrul de masă, este :

$$(P-Q)r - Ns = \frac{d}{dt}(J_C\,\omega).$$

Cinematica mișcării plan-paralelă a bușteanului ne mai dă :

$$v_C = r\omega.$$

Din rezolvarea sistemului de ecuații, rezultă :

$$P = \frac{G}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} + \frac{s}{r}(\cos\alpha - \sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta)\right] + \frac{G}{g}a_C\left(\frac{1}{2\cos\beta} + \frac{1}{4} - \frac{s}{2r}\,\mathrm{tg}\,\beta\right).$$

Punînd condiția $\bar{a}_C = 0$, rezultă forța $\bar{P}$ necesară mișcării uniforme :

$$P = \frac{G}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} + \frac{r}{r}(\cos\alpha - \sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta)\right].$$

9.16. Un buștean de greutate Q este tras în susul unui plan înclinat cu unghiul α, cu ajutorul unui cablu și doi scripeți coaxiali de raze R_1 și R_2 (fig. 9.16). Să se determine accelerația bușteanului, dacă coeficientul de frecare dintre acesta și planul înclinat este μ, iar forța cu ajutorul căreia este tractat bușteanul este $\bar{P}$.

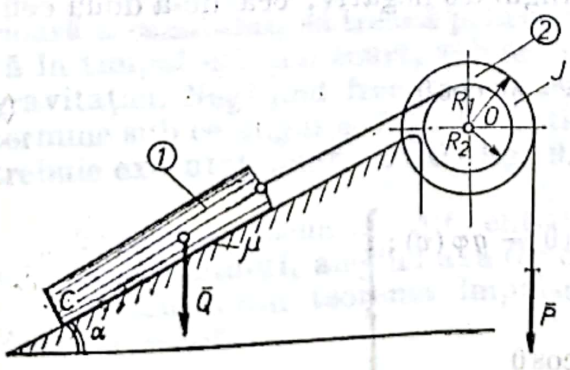


Fig. 9.16

$$\mathbf{R}\quad a_1 = \varepsilon R_2 = \frac{R_1 P - Q R_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{J + \dfrac{Q}{g}R_2^2}R^2.$$

9.17. Să se studieze mişcarea unui glonte, lansat cu o carabină de vînătoare, considerînd rezistenţa aerului ca o funcţie de viteza glontelui. (fig. 9.17).

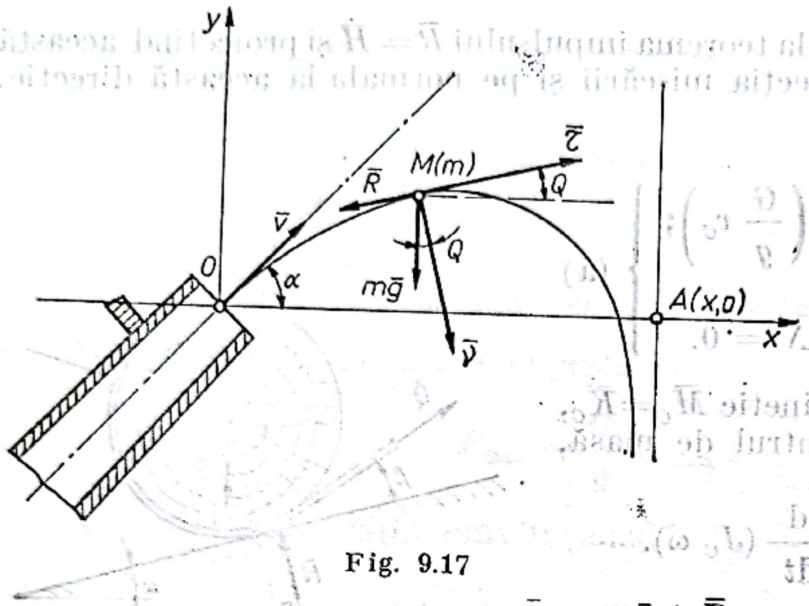


Fig. 9.17

Rezolvare. Studiul mişcării glontelui considerînd rezistenţa aerului ca o funcţie de viteza glontelui se poate face alegînd sistemul de referinţă ca în figura 9.17 ; axa Ox orizontală, trecînd prin poziţia iniţială a glontelui şi situată în planul traiectoriei, iar axa Oy verticală trecînd prin poziţia iniţială şi fiind ascendent orientată. Ecuaţia diferenţială vectorială a mişcării glontelui va fi :

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R} \tag{a}$$

Considerînd rezistenţa aerului funcţie de viteza glontelui de forma :

$$R = mh\varphi(v) \tag{b}$$

şi proiectînd ecuaţia (a) pe direcţia tangentă şi pe normala principală, se obţin ecuaţiile :

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - g\varphi(v); \tag{c}$$

$$\frac{v^2}{\rho} = g\cos\theta.$$

Ţinînd seama că raza de curbură ρ are expresia :

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = -\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{\dot{\theta}},$$

semnul minus datorîndu-se faptului că, cel puţin la începutul mişcării, unui arc pozitiv ds îi corespunde un unghi $d\theta$ negativ, cea de-a doua ecuaţie (c) devine :

$$v\frac{d\theta}{dt} = -g\cos\theta \tag{d}$$

Rezultă, deci sistemul :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g\sin\theta - g\varphi(v); \\ v\frac{d\theta}{dt} &= -g\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Împărțind ecuațiile (e), se obține :

$$\frac{dv}{vd\theta} = \operatorname{tg}\theta + \frac{\varphi(v)}{\cos\theta}; \tag{f}$$

în urma integrării ecuației (f) se obține viteza v funcție de unghiul θ :

$$v = f(\theta) \tag{g}$$

Din relația (d) se deduce :

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} \frac{f(\theta)}{\cos\theta}\, d\theta, \tag{h}$$

α fiind unghiul de tragere.

Din relațiile :

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v\cos\theta; \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

prin integrare, se obține :

$$x = \int v\cos\theta\, dt = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} v^2 d\theta; \tag{j}$$

$$y = \int v\sin\theta\, dt = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} v^2\operatorname{tg}\theta\, d\theta. \tag{k}$$

Ecuațiile (h), (j) și (k) determină mișcarea glontelui în ipoteza considerată.

9.18. Printr-o scîndură care formează unghiul α cu orizontala, urmează să se realizeze un canal drept AB, astfel încît un punct material situat, fără viteză inițială la deschiderea superioară a canalului, să treacă prin scîndură în timpul cel mai scurt, sub acțiunea gravitației. Neglijînd frecarea, să se determine sub ce unghi φ față de verticală trebuie executat acest canal (fig. 9.18).

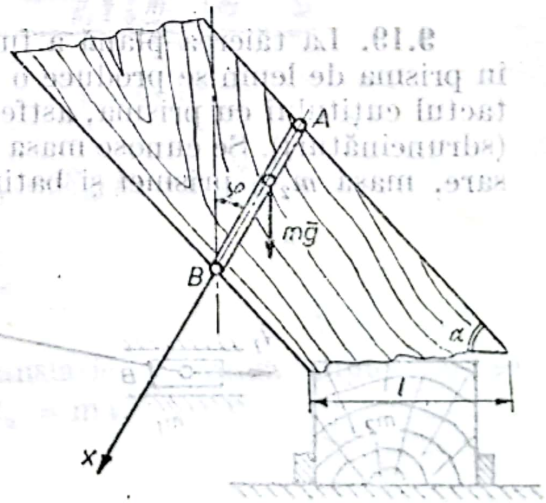


Fig. 9.18

Rezolvare. Ecuația diferențială a mișcării punctului, alegînd axa Ox ca în figură, rezultă din teorema impulsului, $\overline{H} = \overline{R}$; adică :

$$m\ddot{x} = mg\cos\varphi,$$

avînd soluţia

$$x = \frac{gt^2}{2} \cos\varphi,$$

de unde :

$$t^2 = \frac{2x}{g \cos \varphi}.$$

Se observă că se poate scrie următoarea relaţie geometrică :

$$l \sin \alpha = x_B \cos (\alpha - \varphi);$$

deci

$$t^2 = \frac{2}{g\cos\varphi} \cdot \frac{l \sin\alpha}{\cos(\alpha - \varphi)},$$

sau

$$t = \sqrt{\frac{2l \sin\alpha}{g}} \cdot \sqrt{\frac{l}{\cos \varphi \cos (\alpha - \varphi)}}.$$

Pentru a determina timpul minim se calculează

$$\frac{dt}{d\varphi} = 0.$$

Rezultă ecuaţia trigonometrică, care este satisfăcută pentru

$$\varphi = \alpha/2.$$

9.19. La tăierea plană a furnirelor în momentul pătrunderii cuţitului în prisma de lemn se produce o ciocnire. Se cere expresia percuţiei la contactul cuţitului cu prisma, astfel ca în articulaţia B să nu apară percuţii (sdruncinături). Se cunosc masa m_1 a suportului port cuţit şi bară de presare, masa m_2 a prismei şi batiului şi viteza v_1 a cuţitului (fig. 9.19).

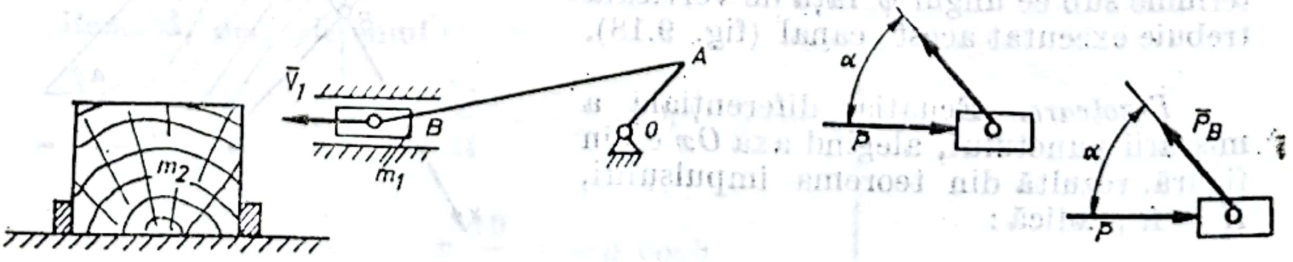


Fig. 9.19

Rezolvare. Se consideră că ciocnirea între cuțit, avînd viteza v_1 și prisma lemn de în repaus, este o ciocnire plastică și deci teorema impulsului indică :

$$v_1' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Scriind teorema variației impulsului în timpul ciocnirii se obține :

$$m_1(v_1' - v_1) = P - P_B \cos \alpha,$$

de unde rezultă

$$P_B = \frac{P - m_1(v_1' - v_1)}{\cos\alpha}.$$

În condiția $P_B = 0$ rezultă $P - m_1(v_1' - v_1) = 0$, adică :

$$P = m_1\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} - v_1\right) = m_1 v_1\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1\right).$$

9.20. Să se determine momentul motor M, pentru o mașină de șlefuit cu bandă îngustă, știind că forța de tăiere ce se dezvoltă în procesul șlefuirii este P iar forța de apăsare P_0, iar accelerația motorului la pornire este ε_1 (fig. 9.20).

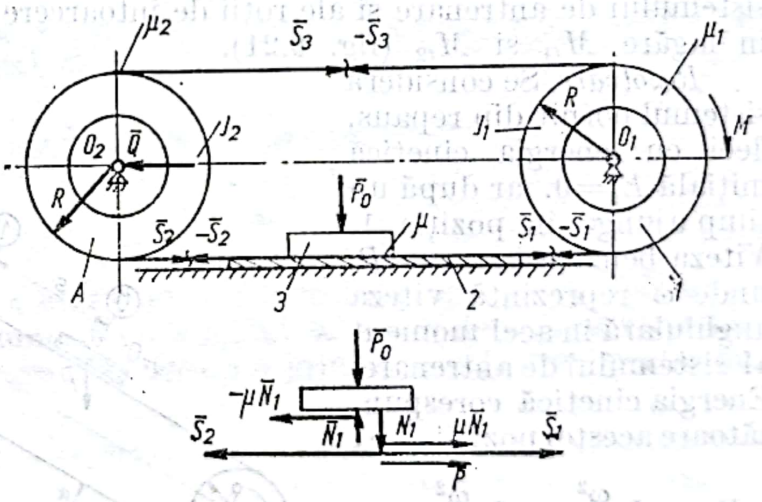


Fig. 9.20

Rezolvare. Se descompune sistemul și se scriu teoremele impulsului pentru fiecare corp. Teorema momentului cinetic pentru primul corp se scrie :

$$\bar{M}_{01} = \dot{\bar{K}}_{01}, \text{ adică } M_m + (S_1 - S_3)R \mathrel{+}= J_1\varepsilon_1;$$

dar

$$S_3 = S_1 e^{\mu_1 \pi},$$

Banda de șlefuit este în mișcare de translație. Teorema impulsului se scrie : $\dot{H} = R$, adică $S_1 + P + \mu N_1 - S_2 = ma$.

Corpul 3 nu se deplasează, deci :

$$N_1 - P_0 = 0\,;\; N_1 = P_0\,;\; S_3 = S_2 e^{\mu_2 \pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuațiile scrise rezultă :

$$S_2 = S_3 e^{-\mu_2 \pi} = S_1 e^{\pi(\mu_1 - \mu)_2}.$$

Deci :

$$S_1 + P + \mu P_0 - S_2 - Ma = S_1 + P + \mu P_0 - S_1 e^{(\mu_1 - \mu_2)\pi} - ma = 0,$$

de unde :

$$S_1 = \frac{P + P_0 - ma}{e^{\pi(\mu_1 - \mu_2)} - 1} \text{ iar } S_3 = \frac{P + \mu P_0 - ma}{e^{\pi(\mu_1 - \mu_2)} - 1} e^{\mu_1 \pi};$$

deci momentul motor are expresia :

$$M_m = (S_3 - S_1) R + J_1 \varepsilon_1 = \frac{P + \mu P_0 - m \frac{\varepsilon_1}{R}}{e^{\pi(\mu_1 - \mu_2)} - 1} (e^{\mu_1 \pi} - 1) R + J_1 \varepsilon_1.$$

9.21. Pentru un transportor cu bandă utilizat la transportarea lobdelor într-o stație de preindustrializare a lemnului se cere să se determine puterea motorului electric de antrenare, cunoscînd că turația de regim este n_0 iar accelerația unghiulară la pornire este ε. Se cunosc : greutatea încărcăturii P, momentul de inerție J_1 în raport cu axele de rotație ale sistemului de antrenare și ale roții de întoarcere J_2, momentele de frecare în lagăre M_{f1} și M_{f2} (fig. 9.21).

Rezolvare. Se consideră sistemul pornit din repaus, deci cu energia cinetică inițială $E_0 = 0$, iar după un timp ajunge în poziția 1. Viteza benzii este $v = \omega R$, unde ω reprezintă viteza unghiulară în acel moment al sistemului de antrenare. Energia cinetică corespunzătoare acestei poziții este :

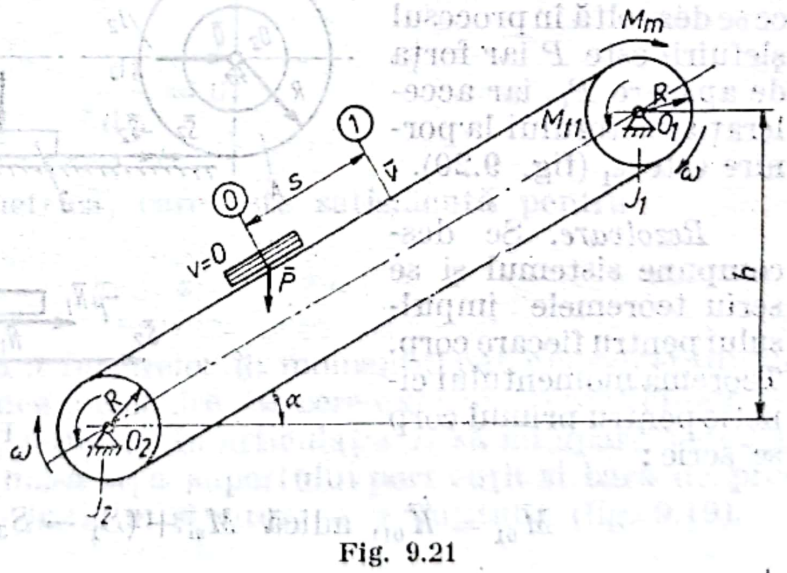


Fig. 9.21

$$E_1 = J_1 \frac{\omega^2}{2} + J_2 \frac{\omega^2}{2} + \frac{P}{g} \frac{v^2}{2} =$$

$$= \frac{\omega^2}{2} \left(J_1 + J_2 + \frac{P}{g} R^2 \right).$$

Banda parcurgînd spațiul s, cilindrul de antrenare și cel antrenat s-au rotit cu unghiul θ, lucrul mecanic efectuat în acest timp avînd expresia :

$$L_{01} = M_m \theta - M_{f1} \theta - M_{f2} \theta - Ps \sin \alpha = \theta (M_m - M_{f1} - M_{f2} - PR \sin \alpha).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd teorema energiei cinetice rezultă ecuația:

$$\frac{\omega^2}{2}\left(J_1+J_2+\frac{P}{g}R^2\right)=0(M_m-M_{f1}-M_{f2}-RP\sin\alpha),$$

care, după derivare în raport cu timpul, conduce la

$$\omega\cdot\varepsilon\left(J_1+J_2+\frac{P}{g}R^2\right)=\omega(M_m-M_{f1}-M_{f2}-PR\sin\alpha),$$

de unde rezultă expresia momentului motor

$$M_m=M_{f1}+M_{f2}+PR\sin\alpha+\varepsilon\left(J_1+J_2+\frac{P}{g}R^2\right)$$

Puterea necesară antrenării benzii este

$$P=M_m\ \omega_0=\omega_0\left[M_{f1}+M_{f2}+PR\sin\alpha+\varepsilon\left(J_1+J_2+\frac{P}{g}R^2\right)\right].$$

În mișcare de regim $\omega=$ const. și $\varepsilon=\dot{\omega}=0$, puterea necesară funcționării sistemului este mai mică

$$P=\omega_0(M_{f1}+M_{f2}+PR\sin\alpha)$$

unde $\omega_0=\pi r_0/30$.

9.22. În figura 9.22, *a* este reprezentat un transportor cu role acționate, înclinat față de orizontală cu unghiul α. Să se determine expresiile reacțiunilor dinamice și legea de mișcare a grinzii pe rola transportorului.

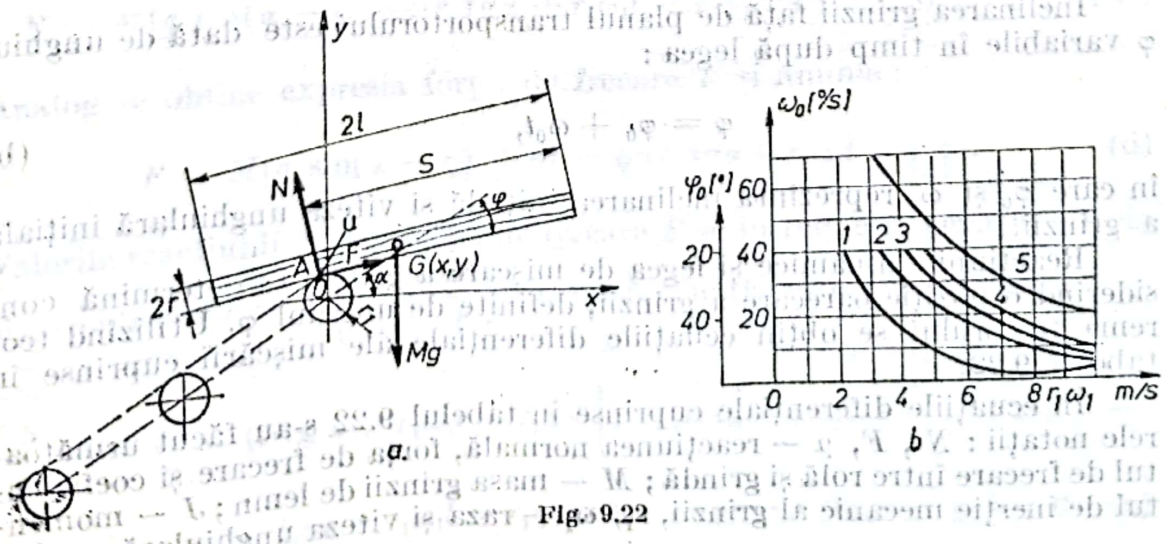


Fig. 9.22

Rezolvare. Se consideră sistemul de referinţă xOy, cu originea în centrul O al rolei transportoare. Coordonatele centrului de greutate C, al grinzii se consideră x şi y variabile în timp funcţie de poziţia grinzii pe transportor şi anume :

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t \text{ şi } y = y_0 + \dot{y}_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad \text{(a)}$$

Tabelul 9.22

Caracterul mişcării	Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării	Relaţii de legătură
1. Mişcare fără alunecare pe role	$M\ddot{x}=F\cos(\alpha-\varphi)-N\sin(\alpha-\varphi)$, $M\ddot{y}=F\sin(\alpha-\varphi)+N\cos(\alpha-\varphi)-Mg$, $J\ddot{\varphi}=N(s-l)-Fr$, în care $s=l+r\,\mathrm{tg}\,\alpha+r_1\omega_1 t-r_1\varphi$	$x=(r\,\mathrm{tg}\,\alpha+r_1\omega_1 t-r_1\varphi)\cos(\alpha-\varphi)-$ $-(r+r_1)\sin(\alpha-\varphi)$, $y=(r\,\mathrm{tg}\,\alpha+r_1\omega_1 t-r_1\varphi)\sin(\alpha-\varphi)+$ $+(r+r_1)\cos(\alpha-\varphi)$.
2. Mişcare cu alunecare pe role : *a)* în acelaşi sens cu rotaţia rolei	$M\ddot{x}=N[\mu\cos(\alpha-\varphi)-\sin(\alpha-\varphi)]$, $M\ddot{y}=N[\mu\sin(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)]-Mg$, $J\ddot{\varphi}=N(s-l-r\mu)$, în care $s=l+x\cos(\alpha-\varphi)+y\sin(\alpha-\varphi)$	$r_1=y\cos(\alpha-\varphi)-x\sin(\alpha-\varphi)$.
b) în sens contrar rotaţiei rolei	$M\ddot{x}=-N[\mu\cos(\alpha-\varphi)+\sin(\alpha-\varphi)]$, $M\ddot{y}=N[\cos(\alpha-\varphi)-\mu\sin(\alpha-\varphi)]-Mg$, $J\ddot{\varphi}=N(s-l+r\mu)$, în care $s=l+x\cos(\alpha-\varphi)+y\sin(\alpha-\varphi)$.	

în care x_0 şi y_0 sînt coordonatele lui C în momentul iniţial al coborîrii grinzii pe transportor.

Înclinarea grinzii faţă de planul transportorului este dată de unghiul φ variabile în timp după legea :

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t, \qquad \text{(b)}$$

în care φ_0 şi ω_0 reprezintă înclinarea iniţială şi viteza unghiulară iniţială a grinzii.

Reacţiunile dinamice şi legea de mişcare a grinzii se determină considerînd o poziţie oarecare a grinzii, definite de unghiul φ. Utilizînd teorema torsorului se obţin ecuaţiile diferenţiale ale mişcării cuprinse în tabelul 9.22.

În ecuaţiile diferenţiale cuprinse în tabelul 9.22 s-au făcut următoarele notaţii : N, F, μ — reacţiunea normală, forţa de frecare şi coeficientul de frecare între rolă şi grindă ; M — masa grinzii de lemn ; J — momentul de inerţie mecanic al grinzii, r_1, ω_1 — raza şi viteza unghiulară a rolei.

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră în continuare cazul mișcării fără alunecare pe role caracterizat prin sistemul de ecuații diferențiale

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x} &= F\ \cos\ (\alpha-\varphi) - N\ \sin(\alpha-\varphi);\\ M\ddot{y} &= F\sin(\alpha-\varphi)+N\cos(\alpha-\varphi)-Mg;\\ J\ddot{\varphi} &= N(s-l)-Fr. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Dacă înmulțim prima ecuație cu $\sin(\alpha-\varphi)$ și a doua cu $\cos(\alpha-\varphi)$, și apoi scăzînd a doua ecuație din prima, se obține :

$$M[\ddot{x}\sin(\alpha-\varphi)-\ddot{y}\cos(\alpha-\varphi)] = Mg\cos(\alpha-\varphi)-N,$$

adică

$$N = M[g\cos(\alpha-\varphi)-\ddot{x}\sin(\alpha-\varphi)+\ddot{y}\cos(\alpha-\varphi)].$$

Știind că

$$x = (r\ \mathrm{tg}\alpha + r_1\omega_1 t - r_1\varphi)\cos(\alpha-\varphi)-(r+r_1)\sin(\alpha-\varphi)$$

și

$$y = (r\ \mathrm{tg}\alpha + r_1\omega_1 t - r_1\varphi)\sin(\alpha-\varphi)+(r+r_1)\cos(\alpha-\varphi)$$

se obține :

$$\ddot{x} = [\ddot{\varphi}r - \dot{\varphi}^2(r\ \mathrm{tg}\alpha + r_1\omega_1 t - r_1\varphi)\cos(\alpha-\varphi)+[\ddot{\varphi}(r\ \mathrm{tg}\alpha + r_1\omega_1 t - r_1\dot{\varphi})+\varphi^2(r-r_1)+2\dot{\varphi}r_1\omega_1\ \sin(\alpha-\varphi);$$

$$\ddot{y} = [\ddot{\varphi}r - \dot{\varphi}^2(r\ \mathrm{tg}\alpha + r_1\omega_1 t - r_1\varphi)]\sin(\alpha-\varphi) - [\ddot{\varphi}(r\,\mathrm{tg}\alpha + r_1\omega_1 t - r_1\varphi)+\dot{\varphi}^2(r-r_1)+2\dot{\varphi}r_1\omega_1]\cos(\alpha-\varphi).$$

Se introduc expresiile lui x și y în expresia (d) și se obține

$$N = M[g\cos(\alpha-\varphi)-\ddot{\varphi}(r\ \mathrm{tg}\alpha + r_1\omega_1 t - r_1\varphi)-\dot{\varphi}^2(r-r_1)-2\dot{\varphi}r_1\omega_1] \qquad (e)$$

Analog se obține expresia forței de frecare F și anume :

$$F = M[g\sin(\alpha-\varphi)+\ddot{\varphi}r-\dot{\varphi}^2(r\ \mathrm{tg}\alpha+r_1\omega_1 t - r_1\varphi). \qquad (d)$$

Valorile reacțiunii N și a forței de frecare F se introduc în ecuația a treia și se notează $J = M\left(\frac{l^2}{3}+\frac{r^2}{4}\right)$ și rezultă ecuația mișcării grinzii :

$$\left[\frac{5}{4}r^2+\frac{l^2}{3}+(r\ \mathrm{tg}\alpha+r_1\omega_1 t - r_1\varphi)^2\right]\ddot{\varphi}+(r\ \mathrm{tg}\alpha+r_1\omega_1 t - r_1\varphi)(2r_1\omega_1 - r_1\dot{\varphi})\dot{\varphi} - g[(r\ \mathrm{tg}\alpha + r_1\omega_1 t - r_1\varphi)\cos(\alpha-\varphi) - r\sin(\alpha-\varphi)] = 0 \qquad (e)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația mișcării este o ecuație diferențială neliniară. Pentru integrarea ei vom considera un caz particular în care: $r = 0$, $\sin(\alpha - \varphi) \cong \alpha - \varphi$, $\cos(\alpha - \varphi) \cong 1$, situație corespunzătoare unor unghiuri α și φ mici și unei grosimi a barei r, neglijabilă.

Ecuația mișcării devine:

$$\left(\frac{l^2}{3} + r_1^2\,\omega_1^2\,t^2\right)\ddot{\varphi} + 2r^2\,\omega_1^2\,t\dot{\varphi} = gr_1\omega_1 t \qquad (f)$$

Soluția ecuației este:

$$\varphi = \left(\frac{\sqrt{3}\,r_1\omega_1 C_1}{l} - \frac{gl}{2\sqrt{3}r_1^2\,\omega_1^2)}\right)\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{3}r_1\omega_1 t}{l} + \frac{gt}{2r_1\omega_1} + C_2 \qquad (g)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile cinematice inițiale adică la $t = 0$, $\varphi = 0$ și $\dot{\varphi} = 0$.

În final rezultă:

$$\varphi = \frac{gt}{2r_1\omega_1} - \frac{\sqrt{3}\,gl}{6r_1^2\,\omega_1^2}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{3}r_1\omega_1 t}{l}; \qquad (h)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{g}{2r_1\omega_1}\left(1 - \frac{l^2}{l^2 + 3r\,\omega\,t^2}\right) = \omega \qquad (i)$$

Se consideră momentul inițial al coborîrii grinzii pe rolă; distanța $l = r\,\text{tg}\,\alpha + r_1\omega_1 t_0 - r_1\varphi$ devine $l = r_1\omega_1 t_0$ căci $r = 0$ și $\varphi = 0$ iar $t_0 = l/r_1\omega_1$. (g)

Cu notația din relația (j) expresiile lui φ și $\dot{\varphi}$ devin

$$\varphi_0 = \varphi(t_0) = (3 - \sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\sqrt{3})\frac{g}{6r_1^2\,\omega_1^2} \cong 0{,}2\frac{gl}{r_1^2\,\omega_1^2}; \qquad (k)$$

$$\dot{\varphi}_0 = \omega_0 = \omega(t_0) = \frac{3g}{8r_1\omega_1}. \qquad (l)$$

Variația lui φ_0 (curbele 1—4) și ω_0(curba 5) în momentul inițial al coborîrii grinzii pe rolă se dau în graficul din figura 9.22, *b* în care curba 1 este trasată pentru valoarea $2l = 2$m, curba 2 pentru $2l = 4{,}5$ m, curba 3 pentru $2l = 6{,}5$ m și curba 4 pentru $2l = 8$ m.

9.23. La stivuirea și încărcarea în vagoane a materialului lemnos se folosesc elevatoare cu lanț ca cel din figura 9.23. Să se determine momentul motor la axul conducător M_m, dacă se cunosc:

l — lungimea elementului de ridicare;

r — raza roților de lanț;

Scanned with OKEN Scanner

G — greutatea medie a unei bile (manele etc.);

q — greutatea lanțului cu ghiare, pe unitatea de lungime;

J_1, J_2 — momentele de inerție ale roților de lanț;

ε_1 — accelerația unghiulară a axului conducător.

Rezolvare. Aplicînd principiul deplasărilor virtuale, putem scrie :

$$\delta L = M_m\,\delta\theta - n\left(G\sin\alpha + \frac{G}{g}r\varepsilon_1\right)\delta x - P^i\,\delta x - M_1^i\delta\theta - M_2^i\delta\theta = 0, \quad \text{(a)}$$

în care n este numărul mediu de ghiare pe ramura ascendentă a lanțului iar

$$P^i = \frac{2q}{g}(l + \pi r)r\varepsilon_1 = \text{forța de inerție a lanțului.}$$

După înlocuiri, relația (a) devine :

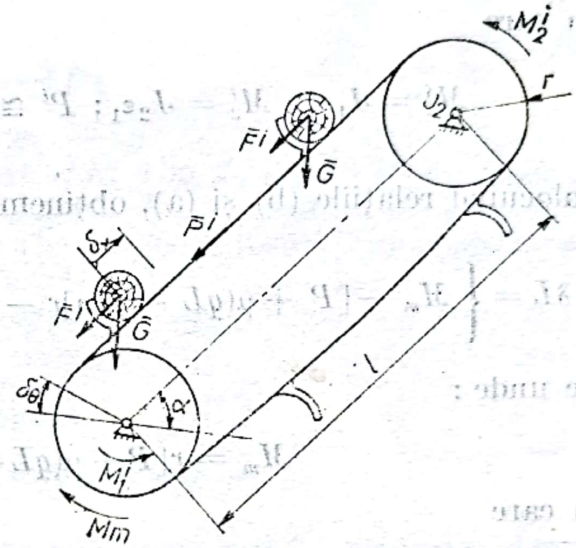


Fig. 9.23

$$\delta L = \left\{M_m - n\left(Gr\,\sin\alpha + \frac{G}{g}r^2\varepsilon_1\right) - \frac{2q}{g}(l+\pi r)r^2\varepsilon_1 - J_1\varepsilon_1 - J_2\varepsilon_1\right\}\delta\theta = 0.$$

Cum deplasarea virtuală este admisă a fi nenulă, avem

$$M_m = nGr\,\sin\alpha + \varepsilon_1\left[n\frac{G}{g}r^2 + \frac{2q}{g}(l+\pi r) + J_1 + J_2\right] \quad \text{(b)}$$

sau

$$M_m = M_{reg} + \varepsilon_1 J_{red}. \quad \text{(c)}$$

În mișcare de regim ($\varepsilon_1 = 0$), momentul motor va trebui să aibe valoarea :

$$M_{reg} = nGr\,\sin\alpha.$$

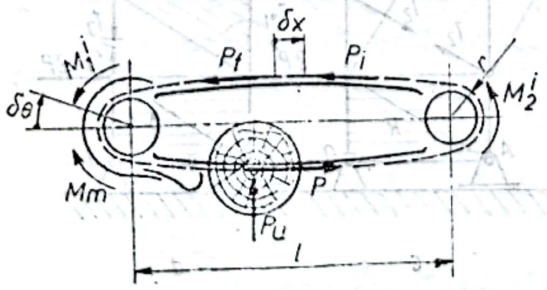


Fig. 9.24

9.24. Să se determine momentul motor la roata conducătoare a unui ferăstrău mecanic cu lanț tăietor. Se cunosc : P_u — forța de avans; P — forța de tăiere; q — greutatea lanțului de unitate de lungime; μ — coeficientul de frecare a lanțului de pe lama ghidare; J_1, J_2 — momentul de inerție ale roților (conducă-

toare și condusă); ε_1 — accelerația unghiulară a axului conducător (fig. 9.24).

Rezolvare. Aplicînd principiul deplasărilor virtuale, avem:

$$\delta L = M_0\delta\theta - M_1^i\delta\theta - P_f\delta x - P^i\delta x - M_i^2\delta\theta - P\delta x = 0, \qquad (a)$$

în care

$$M_1^i = J_1\varepsilon_1;\ M_2^i = J_2\varepsilon_1;\ P^i \cong 2q\frac{L}{g}r\varepsilon_1;\ P_f = \mu qL + \mu P_u \qquad (b)$$

Înlocuind relațiile (b) și (a), obținem:

$$\delta L = \left\{ M_m - [P + \mu(qL + P_u)]r - \left(J_1 + J_2 + \frac{2qL}{g}r^2\right)\varepsilon_1 \right\}\delta\theta = 0,$$

de unde:

$$M_m = r[P + \mu(qL + P_u)] + J_{\text{red}}\,\varepsilon_1, \qquad (c)$$

în care

$$J_{\text{red}} = J_1 + J_2 + \frac{2qL}{g}r^2.$$

Din relația (c) se poate vedea ușor că în mișcarea de regim ($\varepsilon_1 = 0$), momentul motor va avea valoarea:

$$M_m = r[P + \mu(qL + P_n)]. \qquad (d)$$

9.25 Să se determine eforturile în barele 1, 2 și 3 ale grinzii cu zăbrele din figura 2.25, *a*, cunoscînd că structura este articulară în 0 și simplu rezemată în *A*.

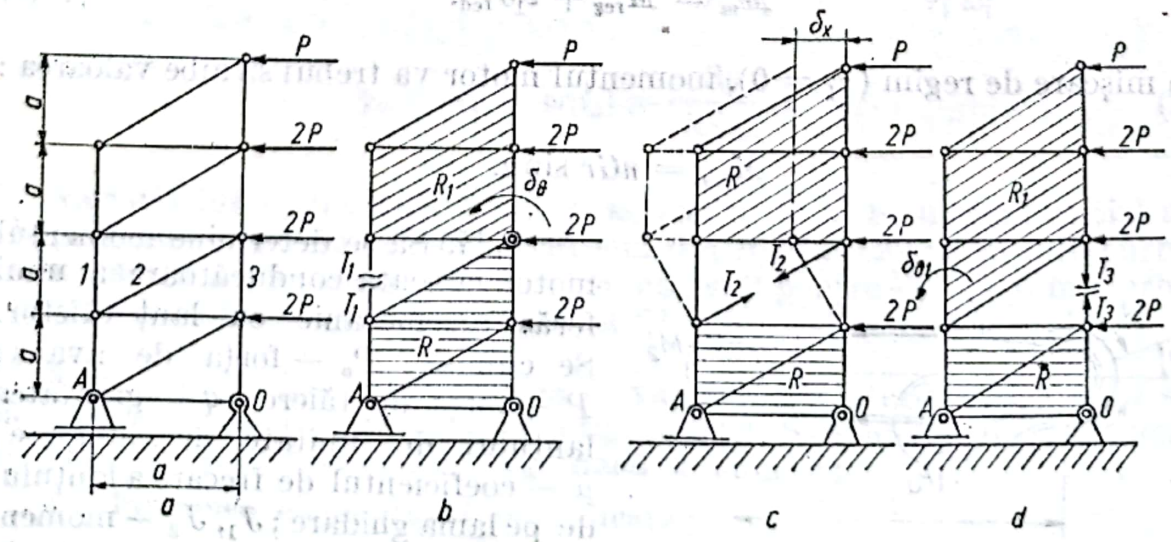


Fig. 9.25

Rezolvare. Secționînd bara 1, se introduc eforturile T_1; grinda se descompune în rigidul R care rămîne fix (nemișcat) (fig. 9.25, *b*), pentru a respecta legăturile din O și A, și rigidul R_1 care se poate roti în jurul articulației O; aplicînd principiul deplasărilor virtuale, se obține ecuația:

$$\delta L = 2P \cdot a\delta\theta + P \cdot 2a \cdot \delta\theta + T_1 \cdot a\delta\theta = 0,$$

de unde

$$T_1 = -4P;$$

deci efortul T_1 este de compresiune.

Secționînd bara 2, vom introduce eforturile T_2 (fig. 9.25, *c*); grinda se descompune în rigidul R, imobil și rigidul R_1, în mișcare de translație orizontală. Notînd cu δx deplasarea virtuală pe orizontală, se poate scrie:

$$\delta L = P \cdot \delta x + 2P \cdot \delta x + 2P \cdot \delta x + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \delta x = 0.$$

$$T_2 = -5\sqrt{2}P.$$

Prin urmare, și efortul T_2 este de compresiune.

Analog, secționînd bara 3 și înlocuind-o cu efortul T_3, principiul deplasărilor virtuale ne conduce la relația:

$$\delta L = 2P \cdot a\delta\theta_1 + 2P \cdot a\delta\theta_1 + P \cdot 3a\delta\theta_1 - T_3 a \cdot \delta\theta = 0,$$

din care rezultă

$$T_3 = 9P, \text{ (tensiune)}$$

9.26. Un procedeu de ambalare a cherestelei în pachete îl constituie procedeul dinamic cu caracter oscilatoriu. Se cere să se determine efortul efectiv în banda de strîngere a pachetului în timpul procesului de ambalare (fig. 9.26, *a*).

Rezolvare. În figura 9.26, *a* sînt reprezentate forțele de inerție P_1 și P_2 într-o mișcare oscilatorie de amplitudine θ. Variația accelerațiilor unghiulare și normale este dată de relațiile [37]:

$$\ddot{\theta} = \frac{4\pi^2}{t^2}\theta; \; a^{\nu} = \frac{4\pi^2}{t^2} r,$$

în care t este perioada oscilației.

Componentele P_{1y} și P_{2y} (fig. 9.26, *a*) ale forțelor de inerție corespunzătoare unei mase m în mișcare oscilatorie sînt:

$$P_{1y} = m\frac{4\pi^2}{t^2}\theta r \cos\alpha = m\frac{4\pi z^2}{t^2}\theta z \text{ sau } P_{1y\max} = m\frac{4\pi^2}{t^2}\theta_{\max} z;$$

$$P_{2y} = \pm m\frac{4\pi^2}{t^2} r \sin\theta \text{ sau } P_{\max} = \pm m\frac{4\pi^2}{t^2} r \sin\theta_{\max}.$$

Suma componentelor P_{1y} și P_{2y} este :

$$P_{1y} + P_{2y} = m\frac{4\pi^2}{t^2}(0z \pm r\sin\theta).$$

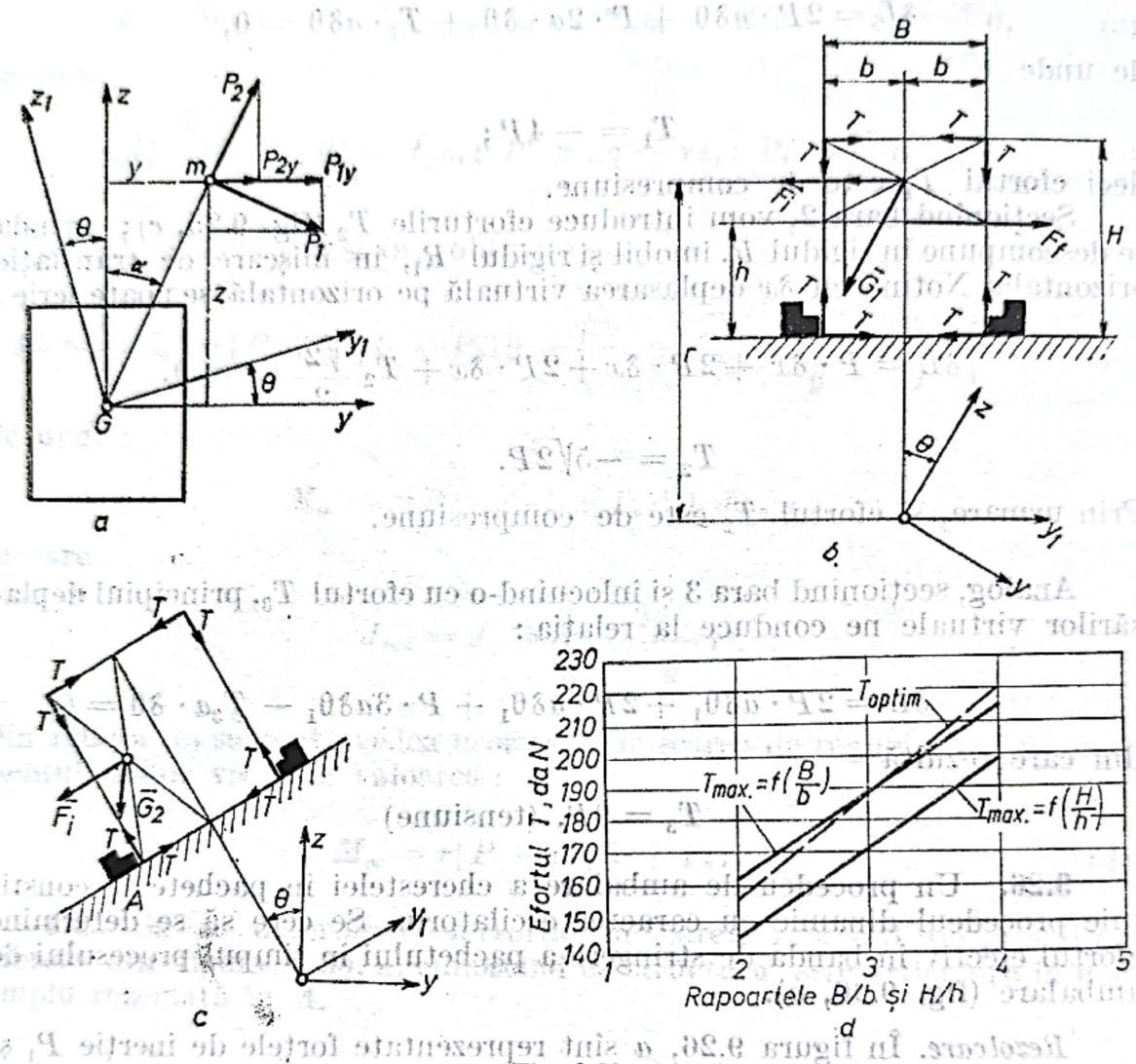


Fig. 9.26

Calculul eforturilor efective T, în banda de strîngere a pachetului în timpul ambalării se face în două ipoteze :

a) Se consideră că pachetul de cherestea se desface prin alunecarea părții superioare a lui de greutate G_1 (fig. 9.26, *b*).

În această situație relația de echilibru dinamic a lui D'Alembert este :

$$F^i + G_1\sin\theta - F_f - 2\mu T = 0,$$

în care F^i este componenta forței de inerție paralelă cu baza pachetului adică $F^i = P_{1y} + P_{2y} = m\frac{4\pi^2}{t^2}(0z \pm r\sin\theta) = \frac{G_1}{g}\frac{4\pi^2}{t^2}(0z \pm r\sin\theta)$;

G_1 este greutatea pachetului ce alunecă adică $G_1 = B(H-h)L\gamma$, F_f este forța de frecare între pachetul care alunecă și pachetul care rămîne.

Relația de echilibru dinamic devine:

$$\frac{G_1}{g}\cdot\frac{4\pi^2}{t^2}(\theta z \pm r\sin\theta) + G_1\sin\theta - \mu G_1\cos\theta - 2\mu T = 0,$$ de unde rezultă

$$T = \frac{G_1\left[\frac{4\pi^2}{gt^2}(\theta z \pm r\sin\theta) + \sin\theta - \mu\cos\theta\right]}{2\mu}. \quad (a)$$

Pentru valorile numerice: $\theta_{max} = 40°$; $\mu = 0{,}6$; $\frac{4\pi^2}{t^2}(\theta_{max} z \pm r\sin\theta_{max}) = 0{,}36$ g.

Se obține valoarea efortului în bandă $T = 0{,}45\ G_1$.

b) Se consideră că pachetul se desface prin răsturnarea unei părți din pachet de greutate G_2 (fig. 9.26, *c*). În acest caz relația de echilibru dinamic de tip D'Alembert se scrie prin suma momentelor în punctul *A*:

$$F^i\frac{H}{2} + G_2\sin\theta\frac{H}{2} - G_2\cos\theta\frac{b}{2} - TH = 0$$

sau

$$\frac{G_2}{g}\frac{4\pi^2}{t^2}(\theta z \pm r\sin\theta)\frac{H}{2} + G_2\sin\theta\frac{H}{2} - G_2\cos\theta\frac{b}{2} = T\cdot H,$$

de unde rezultă

$$T = \frac{G_2\left[\frac{4\pi^2}{gt^2}(\theta z \pm r\sin\theta)\frac{H}{2} + \frac{H}{2}\sin\theta - \frac{H}{2}\cos\theta\right]}{H}, \quad (b)$$

în care G_2 reprezintă greutatea părții din pachet cu tendință de răsturnare și anume $G_2 = bHL\gamma$.

Pentru valorile: $\theta_{max} = 40°$; $\frac{4\pi^2}{t^2}(\theta_{max} \pm r\sin\theta_{max}) = 0{,}36$ g, se obține

$$T = \frac{G_2(0{,}5GH - 0{,}38b)}{1{,}44\ b}$$

Graficul din figura 9.26, *d* prezintă variația efortului maxim în bandă T_{max}, comparativ cu efortul determinat experimental T_{optim}, în cazul unui pachet de cherestea de dimensiuni $B\cdot H\cdot L = 0{,}95\cdot 1{,}02\cdot 1{,}8$ m.

9.27. Ca mijloc de apropiat materialul lemnos, se folosesc plane înclinate duble ca în figura 9.27. Cunoscînd greutatea unui vagon gol G_0, greutatea unui vagon plin G, greutatea unui metru liniar de cablu q, lungi-

mea planului L, coeficientul de frecare al vagonului pe linie μ_v și coeficientul de frecare al cablului pe role μ_c, să se determine unghiul minim de înclinare a planului pentru ca acesta să fie automotor.

Rezolvare. Pentru ca un astfel de sistem să funcționeze automotor este necesar ca accelerația sistemului să fie pozitivă, la limită nulă. Scriind lucrul mecanic, corespunzător deplasării virtuale, δx, al forțelor exterioare și de inerție, avem:

$$\delta L = \delta x\,[G\sin\alpha - F^i - (G_0 + qL)\sin\alpha - T_0 - T_c - T - F_0^i - F_c^i] = 0.$$

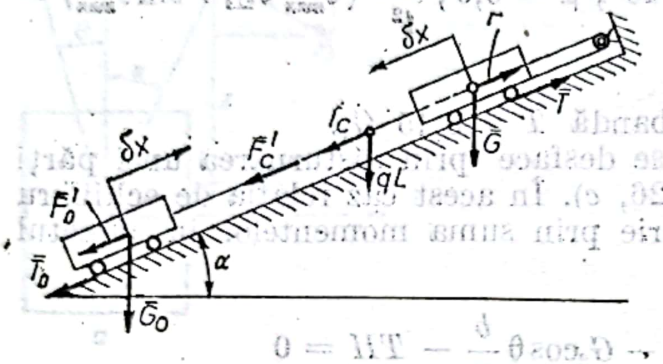


Fig. 9.27

Înlocuind forțele de frecare, $T_0 = \mu_v G_0 \cos\alpha$; $T_c = \mu_c qL\cos\alpha$; $T = \mu_v G\cos\alpha$, și forțele de inerție,

$$F^i = \frac{G}{g}a;\ F_0^i = \frac{G_0}{g}a;$$

$$F_c^i = \frac{qL}{g}a,$$

rezultă accelerația sistemului:

$$a = \frac{[G-(G_0+qL)]\sin\alpha - [(G+G_0)\mu_v + \mu_c qL]\cos\alpha}{G+G_0+qL}\,g.$$

Din condiția:

$$a \geqslant 0,$$

rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha_{\min} = \frac{(G+G_0)\mu_v + \mu_c qL}{G-(G_0+qL)}.$$

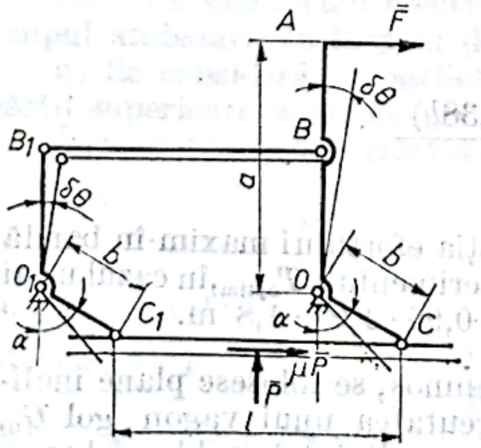


Fig. 9.28

9.28. Bara de presare a unei mașini de șlefuit cu bandă este acționată prin sistemul redat în figura 9.28. Cunoscînd forța de presare P (se determină funcția de presiunea p de lucru și de suprafața S dintre banda abrazivă și piesă și anume $P = p \cdot s$) și μ coeficientul de frecare între bara CC_1 și banda abrazivă se cere forța F necesară pentru a realiza presiunea de regim p.

Rezolvare. Dînd o deplasare virtuală (rotire $\delta\theta$) barei AOC, bara $B_1O_1C_1$, se rotește cu unghiul $\delta\theta$ iar barele B_1B și C_1C

execută o mișcare plan paralelă. Condiția de echilibru pentru sistem este:

$$\delta L = Fa\ \delta\theta - Pb \sin\alpha\delta\theta + \mu Pb \cos\alpha\ \delta\theta = 0.$$

Deplasarea virtuală $\delta\theta$ fiind diferită de zero, se simplifică relația prin $\delta\theta$ și rezultă:

$$Fa - Pb \sin\alpha - \mu Pb \cos\alpha = 0,$$

de unde rezultă:

$$F = \frac{P_b\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{a}.$$

9.29. O lobdă de masă M și raza R se reazemă cu o generatoare pe un plan orizontal, pe care se rostogolește fără să alunece (fig. 9.29). Să se studieze oscilațiile lui în jurul poziției de echilibru.

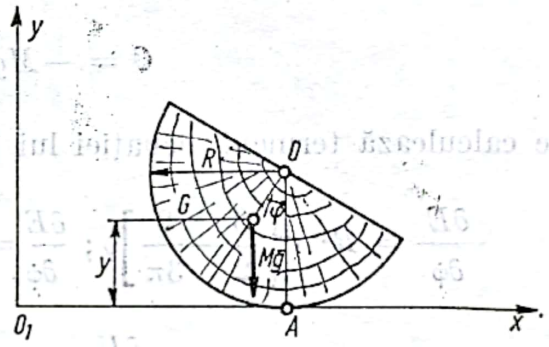


Fig. 9.29

Rezolvare. Energia cinetică a semicilindrului este:

$$E = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2.$$

Momentul de inerție față de generatoarea punctului A este

$$J_A = J_G + M \cdot \overline{AG}^2 = J_0 - M \cdot \overline{OG}^2 + M \cdot \overline{AG}^2$$

În ΔAOG aplicăm teorema consinusurilor și obținem:

$$\overline{AG}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OG}^2 - \overline{OA} \cdot \overline{OG} \cos\varphi$$

Ținînd seama că:

$$\overline{OA} = R;\ J_0 = \frac{MR^2}{2};\ \overline{OG} = \frac{4R}{3\pi},$$

momentul de inerție față de punctul A devine:

$$J_A = M\left(\frac{R^2}{2} + R^2 - 2R \cdot \frac{4R}{3\pi}\cos\varphi\right) = MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right).$$

Energia cinetică are expresia

$$E = \frac{R^2}{2} M\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 \cong \frac{R^2 M}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)\dot{\varphi}^2 \text{ iar } \cos\varphi \cong 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu y cota punctului, funcţia de forţă este :

$$U = -Mgy + C = -Mg\left(R - \frac{4R}{3\pi}\cos\varphi\right) + C$$

Pentru $\varphi = 0$ este necesar ca $U = 0$, deci $C = Mg\left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)$ iar $U = -Mg\frac{4R}{3\pi}(\cos\varphi - 1)$. Se dezvoltă $\cos\varphi$ în serie :

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots$$

Se va obţine

$$C = -Mg\frac{4R}{3\pi}\frac{\varphi^2}{2}.$$

Se calculează termenii ecuaţiei lui Lagrange şi se obţine :

$$\frac{\partial E}{\partial\dot\varphi} = R^2M\left[\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right]\dot\varphi\,;\quad \frac{\partial E}{\partial\dot\varphi} = R^2M\left[\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right]\ddot\varphi \text{ şi } \frac{\partial E}{\partial\varphi} = 0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -Mg\frac{4R}{3\pi}\varphi.$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării lobdei va fi :

$$\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{8R^2}{3\pi}\right)\ddot\varphi + \frac{4R}{3\pi}g = 0.$$

Perioada oscilaţiilor va rezulta :

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot\sqrt{\frac{9\pi - 16}{2}}.$$

9.30. Să se afle acceleraţia ε a unui troliu, a cărui masă poate fi neglijată dacă greutăţile sînt egale cu F şi p (fig. 9.30).

Rezolvare. Se alege ca parametru unghiul φ, deci

$$y_1 = r\varphi\,;\quad v_1 = r\dot\varphi\,;$$
$$y_2 = R\varphi\,;\quad v_2 = R\dot\varphi.$$

Dacă se neglijează masa troliului, energia cinetică a sistemului este :

$$E = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{g}r^2\dot\varphi^2 = \frac{\dot\varphi^2}{2g}(pr^2 + PR^2)\,;\quad \frac{\partial E}{\partial\varphi} = 0\,;$$

$$\frac{\partial E}{\partial\dot\varphi} = \frac{\dot\varphi}{g}(pr^2 + PR^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

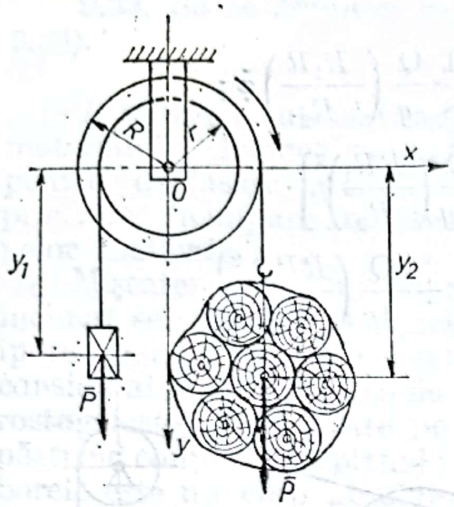


Fig. 9.30

Funcţia de forţă va fi :

$$U = py_1 + Py_2 ; \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\varphi) =$$

$$- r \text{ şi } \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = R ;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -pr + PR$$ (semnul minus apare prin faptul că în timp ce φ creşte, y_1 scade). Se înlocuieşte în ecuaţia lui Lagrange şi se obţine :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot{\varphi}}{g}(pr^2 + PR^2)\right] = PR - pr,$$

sau

$$\frac{\varepsilon}{g}(pr^2 + PR^2) = PR - pr.$$

Rezultă

$$\varepsilon = \frac{PR - pr}{PR^2 + pr^2} g.$$

9.31. Unul din capetele unui fir este fixat în A, la o grindă fixă, iar de capătul liber al firului este suspendată greutatea Q. Firul este trecut după un scripete mobil O, de care este suspendată greutatea $P\left(\frac{P}{2} < \mathrm{Q}\right)$ şi este apoi trecut peste un scripete fix O_1. În momentul iniţial, sistemul se află în repaus. Se cere să se determine acceleraţia greutăţii Q (fig. 9.31).

R. $a = 2g\dfrac{2\mathrm{Q} - P}{4\mathrm{Q} + P}$.

9.32. Se dă troliul din figura 9.32. Se cere să se calculeze momentul motor, cunoscînd ε_1, z_1, z_2, R, Q şi momentele de inerţie J_1 şi J_2.

Rezolvare. Se alege ca parametru unghiul de rotaţie al arborelui motor φ. Energia cinetică a sistemului este :

$$E = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Q}}{g}v^2,$$

în care :

$$\omega_1 = \dot{\varphi} ; \omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\varphi \text{ şi } v = \frac{R\omega_2}{2} = \frac{R_1 R}{2R_2}\dot{\varphi},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci :

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8}\frac{Q}{g}\left(\frac{R_1 R}{R_2}\right)\dot{\varphi};$$

$$E = \frac{\dot{\varphi}}{2}\left[J_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 J_2 + \frac{Q}{4g}\left(\frac{RR_1}{R_2}\right)^2\right].$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0\,; \frac{\partial E}{\partial \varphi} = \dot{\varphi}\left[J_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 J_2 + \frac{Q}{4g}\left(\frac{RR_1}{R_2}\right)^2\right].$$

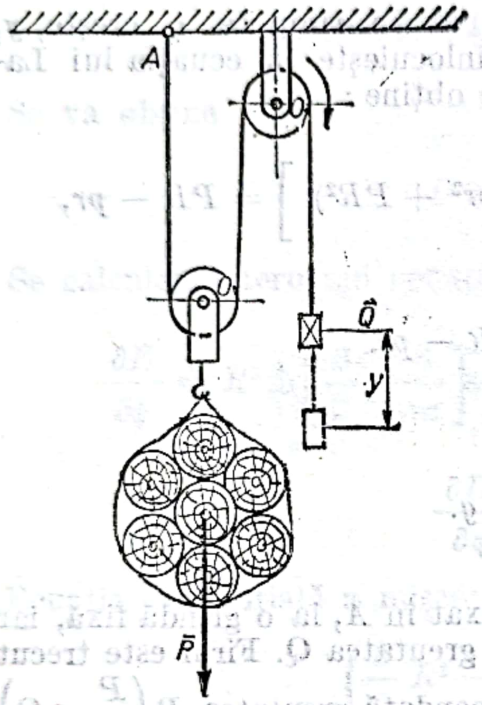


Fig. 9.31

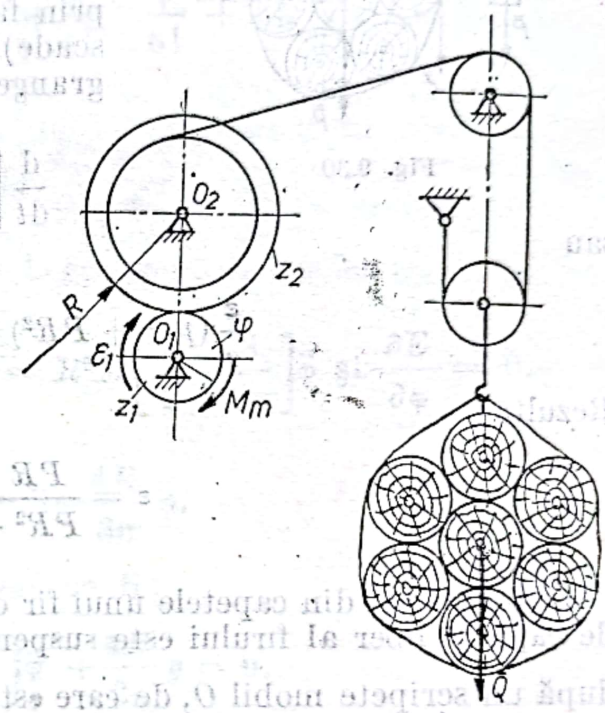


Fig. 9.32

Funcția de forță este :

$$U = Qy + M_m\,\varphi.$$

iar derivata ei va fi :

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = M_m - \frac{R_1 R}{2R_2} Q.$$

Se înlocuiește în ecuația lui Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\dot{\varphi}\left[J_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 J_2 + \frac{Q}{4g}\left(\frac{RR_1}{R_2}\right)^2\right]\right\} = M_m - \frac{R_1 R}{2R_2} Q,$$

de unde rezultă :

$$M_m = \varepsilon_1\left[J_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 J_2 + \frac{Q}{4g}\left(\frac{RR_1}{2R_2}\right)^2\right] + \frac{RR_1}{2R_2} Q =$$

$$= \varepsilon_1\left[J_1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 J_2 + \frac{Q}{4g} R\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right] + \frac{Rz_1}{2z_2} Q.$$

9.33. Să se studieze mișcarea bușteanului pe un plan înclinat (fig. 9.33).

Rezolvare. Automatizarea procesului de producție la împachetarea materialului lemnos rotund se simplifică simțitor, dacă se folosește pentru deplasare greutatea proprie. Aceasta impune folosirea rampelor înclinate.

Mișcarea arborelui pe planul înclinat se studiază admițînd două ipoteze: a) arborele curbat este considerat ca un corp conic ce se rostogolește cu alunecare pe plan, păstrînd contactul cu planul; b) arborele este un corp absolut rigid, execută o mișcare liberă.

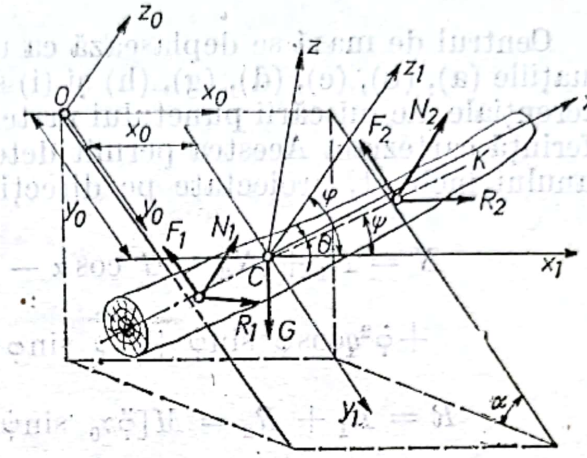


Fig. 9.33

Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix $Ox_0y_0z_0$ și un sistem de referință mobil $Ox_1y_1z_1$, prin intermediul sistemului $Oxyz$, care este paralel cu sistemul fix și se deplasează împreună cu centrul de masă al corpului. Planul Cxz este plan de simetrie pentru arbore.

Arborele are 6 grade de libertate și are legături neolonome.

Ecuația lui Lagrange de speța a II-a cu factorii de legătură se aplică de șase ori și rezultă

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_0}\right) - \frac{\partial E}{\partial x_0} + \lambda_1 = 0; \tag{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_0}\right) - \frac{\partial E}{\partial y_0} + \lambda_2 = G \sin\alpha; \tag{b}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial y_1} = G \sin \alpha - f(N_1 + N_2); \tag{c}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{z}_0}\right) - \frac{\partial E}{\partial z_0} + \lambda_3 = G \cos\alpha; \tag{d}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} - z_0 (\lambda_1 \sin \psi + \lambda \cos \psi) - k_r l_1 \sin\varphi \sin\psi (1 - \operatorname{tg} \psi)\lambda_3 = Gz_0 \sin \alpha - k(N_1 - N_2); \tag{e}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \psi} = 0. \tag{f}$$

Scanned with OKEN Scanner

La ecuațiile (a) — (f) se adaugă trei ecuații de legătură

$$\dot{x}_0 = \dot{\varphi} z_0 \sin\psi ; \tag{g}$$

$$\dot{y}_0 = \dot{\varphi} z_0 \cos\psi ; \tag{h}$$

$$\dot{z}_0 = \dot{\varphi} k_r l_1 \sin\varphi \sin\psi(1 - \operatorname{tg}\psi). \tag{i}$$

Centrul de masă se deplasează ca un punct material legal. Rezolvînd ecuațiile (a), (b), (c), (d), (g), (h) și (i) se compară rezultatele cu ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului material legat proiectate pe sistemul de referință cartezian. Acestea permit determinarea forțelor de reacțiune ale planului înclinat, proiectate pe direcțiile z_0, x_0, y_0, respectiv :

$$N = N_1 + N_2 = G\cos\alpha - Mk_r l_1 \ddot{\varphi} q \sin\varphi\sin\psi + \\ + \dot{\varphi}^2 q\cos\varphi \sin\psi + \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin\varphi \cos\psi + \varphi q \sin\varphi \sin\psi ; \tag{j}$$

$$R = R_1 + R_2 = M[\ddot{\varphi} z_0 \sin\psi + \ddot{\varphi}(\dot{z}_0\sin\psi + z_0\dot{\psi} \cos\psi) ; \tag{k}$$

$$F = F_1 + F_2 = G \sin\alpha - M(\ddot{\varphi} z_0 \cos\varphi + \dot{\varphi}\dot{z}_0 \cos\varphi - \\ - \dot{\psi}\dot{\varphi} z_0 \sin \psi + \ddot{y}_1) + fN. \tag{l}$$

În relațiile (a)—(l) semnificația termenilor este următoarea : E este energia cinetică a arborelui ; x_0, y_0, z_0, y_1 ; φ. ψ — coordonate generalizate independente ,iar x_0 ; $y_0 + y_1$; z_0 sînt și coordonatele centrului de masă al arborelui ; φ — unghiul de rotație al arborelui în jurul axei x ; ψ — unghiul de rotație al arborelui în jurul axei $\dot{z}_1$; $\dot{x}_0$; $\dot{y}_0$; $\dot{z}_0$, $\dot{y}_1$; $\dot{\varphi}$; $\dot{\psi}$ — viteza generalizate ; λ_1 ; λ_2 ; λ_3 — factori de legătură ; k_r — curbura arborelui ; l_1 — distanța între reazeme ; G — greutatea arborelui ; M — masa arborelui ; f — coeficientul de frecare la alunecare, k — coeficientul frecării de rostogolire ; $\ddot{\varphi}$ — accelerația unghiulară a arborelui ; y_1 — accelerația arborelui în urma alunecării.

Rezolvînd ecuația (f) se obține

$$\dot{\psi} = \text{const} ; \tag{m}$$

deci

$$\psi = \dot{\psi} t, \tag{n}$$

unde t este timpul mișcării arborelui pe planul înclinat.

Ecuația (e) se pune sub forma

$$\omega' + k_1 t\omega^2 + k_2 t\omega - k_3 g t = 0, \tag{o}$$

unde $\omega = \dot{\varphi}$; $\omega' = \ddot{\varphi}$; g — accelerația terestră ;

$$k_1 = \frac{k_a l_1 q(z_0 f \sin\psi\cos\psi - k\sin\psi)}{t\left(\frac{J_x}{M} + z_0^2 \sin^2\psi\right)} ;$$

$$k_2 = \frac{z\dot{z}_0 \sin^2\psi + \dot{\psi} z_0^2 \sin\psi\cos\psi}{t\left(\frac{J_x}{M} + z_0^2 \sin^2\psi\right)};$$

$$k_3 = \frac{fz_0 \cos\alpha\cos\psi + z_0 \sin\alpha - k\cos\alpha}{t\left(\frac{J_x}{M} + z_0^2 \sin^2\psi\right)};$$

J_x este momentul de inerţie mecanic al arborelui în raport cu axa x. Considerînd constante valorile k_1, k_2 şi k_3, se obţine:

$$\omega = C_1(1 + e^{k_0 t^2}); \tag{p}$$

$$\varphi = C_1 t + C_1 \int e^{kt^2}\,dt. \tag{q}$$

Înlocuind ecuaţia (p) în ecuaţiile (g) şi (h) se obţin ecuaţiile mişcării centrului de masă a arborelui:

$$x_0 = z_0\dot{\psi}\, t\left(\sqrt{1+\delta^2} + C_1 t^2 + \frac{C_1 k_0}{4} t^4 + \frac{C_1}{2k_0}\right); \tag{r}$$

$$y_0 = \frac{17}{16k_0^2} + \left[g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \frac{9}{8k_0}\right] t^2 + \left(\frac{5}{8} - \frac{C_1\dot{\psi}}{12}\right)^2 t^4, \tag{s}$$

unde δ este conicitatea buşteanului;

$$C_1 = \frac{Ck_2}{2k_1} + C\sqrt{\frac{k_1k_2 + k_2^2 + 2k_1k_3g}{2k_1}} - \frac{2k_2}{k_1k_2 + k_2^2 + 2k_1k_3g};$$

$$k_0 = k_1\sqrt{\frac{k_1k_2 + k_2^2 + 2k_1k_3g}{2k_1}}.$$

Importanţă practică are şi deplasarea centrului de masă al arborelui în lungul axei x_0:

$$\Delta x_0 = x_0 = l_0, \tag{t}$$

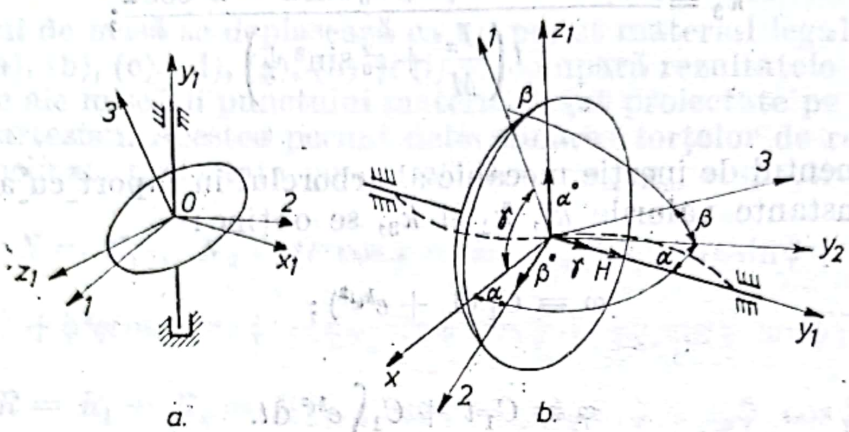
unde l_0 este coordonata iniţială a centrului de masă.

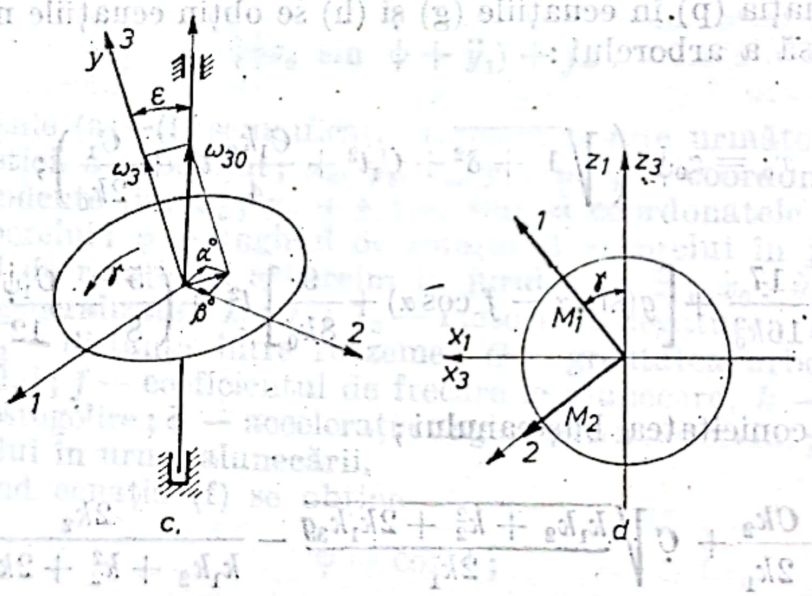
În timpul mişcării, centrul de masă oscilează în jurul poziţiei iniţiale.

Scanned with OKEN Scanner

9.34. Să se studieze influența efectului giroscopic ce apare la rotația discului așchietor împreună cu arborele elastic de antrenare.

Rezolvare. Modelul de calcul este reprezentat de un disc susținut de un arbore în mișcare de rotație (fig. 9.34, *a*).





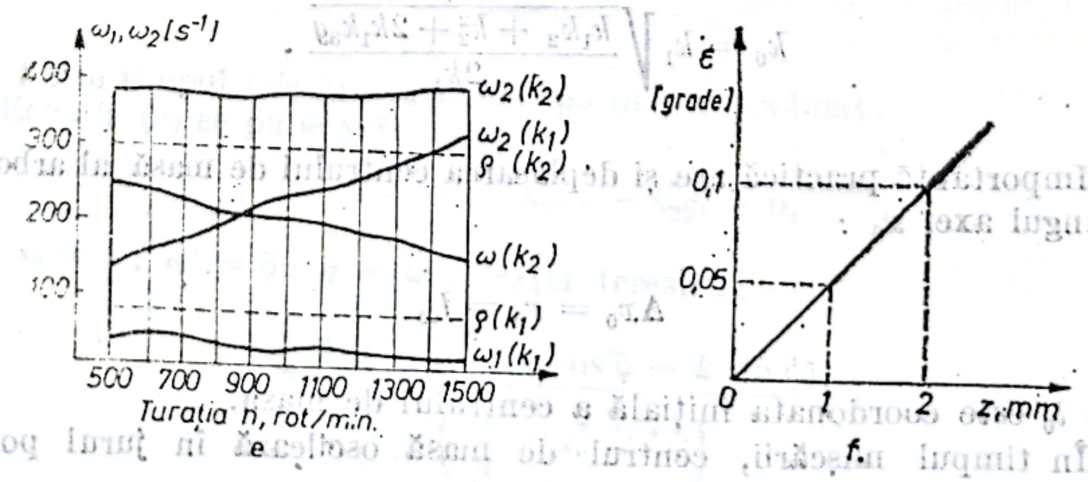


Fig. 9.34

Se adoptă un sistem de referinţă fix x_1, y_1, z_1 şi sistemul mobil, 1, 2, 3 cu origină comună în centrul de greutate al discului. Reperul mobil conţine direcţiile principale centrale de inerţie şi este înclinat faţă de cel fix din cauza încovoierii arborelui elastic (fig. 9.34, *a*). Unghiurile α şi β descriu încovoierea axului iar unghiul γ poziţionează axa de rotaţie proprie 3.

Se scriu ecuaţiile lui Euler pentru mişcarea rigidului cu punct fix:

$$\left.\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= M_1;\\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 &= M_2;\\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= M_3. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

În relaţiile (a), J_1, J_2 şi J_3 sînt momentele de inerţie mecanice principale ale discului; ω_1, ω_2 şi ω_3 sînt componentele vitezei unghiulare totale $\overline{\omega}$ pe axele sistemului mobil de referinţe; M_1 şi M_2 — momentele forţelor ce acţionează asupra axului, reduse la axele reperului mobil; M_3 — momentul forţelor de acţionare a discului în jurul axei 3.

Se consideră discul simetric deci momentele de inerţie mecanice vor fi $J_1 = J_2$. Se notează în continuare $J_1 = J_2 = A$ iar $J_3 = C$. Exprimînd viteza unghiulară totală ca sumă vectorială a rotaţiilor concurente, $\dot{\alpha}$ $\dot{\beta}$ şi $\dot{\gamma}$ (fig. 9.34, *b*) respectiv

$$\overline{\omega} = \dot{\overline{\alpha}} + \dot{\overline{\beta}} + \dot{\overline{\gamma}},$$

proiecţiile acesteia pe axele sistemului mobil sînt:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma;\\ \omega_2 &= -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma;\\ \omega_3 &= \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\sin\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Pentru a exprima dezechilibrul dinamic al discului se exprimă abaterea axei proprii 3 faţă de axa y_1, prin unghiul foarte mic ε, operînd în relaţiile (b) creşterile lui $\dot{\alpha}$ prin $\omega_{30}\cdot\varepsilon\cdot\cos\gamma$ iar ale lui $\dot{\beta}$ prin $\omega_{20}\varepsilon\sin\gamma$ (fig. 9.34, *c*), astfel că relaţiile (b) devin:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= (\dot{\alpha} + \omega_{30}\cdot\varepsilon\cdot\cos\gamma)\cos\beta\cos\gamma + (\dot{\beta} + \omega_{30}\cdot\varepsilon\cdot\sin\gamma)\sin\gamma;\\ \omega_2 &= -(\dot{\alpha} + \omega_{30}\cdot\varepsilon\cdot\cos\gamma)\sin\gamma\cos\beta + (\dot{\beta} + \omega_{30}\cdot\varepsilon\cdot\sin\gamma)\cos\gamma;\\ \omega_3 &= \dot{\gamma} + (\dot{\alpha} + \varepsilon\cdot\omega_{30}\cos\gamma)\sin\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît unghiurile α și β sînt foarte mici se poate considera

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha}\cos\gamma + \omega_{30}\varepsilon + \dot{\beta}\sin\gamma; \\ \omega_2 &= -\dot{\alpha}\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma; \\ \omega_3 &= \dot{\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Înlocuind relațiile (d) și derivatele în sistemul (a) și înlocuind $J_1 - J_2 = 0$, se obțin

$$\left.\begin{aligned} &A\ddot{\alpha}\cos\gamma + A\ddot{\beta}\sin\gamma - C\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\gamma + C\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\gamma = M_1; \\ &-A\ddot{\alpha}\sin\gamma + A\ddot{\beta}\cos\gamma + \varepsilon\ddot{\gamma}^2(A-C) - C\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\gamma - C\dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\gamma = M_2; \\ &C\ddot{\gamma} = M_3. \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Considerînd mișcarea de regim, deci $M_3 = 0$, rezultă $\dot{\gamma} = \text{const} = \omega_{30}$.

Notînd $C\omega_{30} = H$, după transformări se obține:

$$\left.\begin{aligned} &A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + (A-C)\,\varepsilon\cdot\omega_{30}^2\cdot\cos\omega_{30}t = M_1\sin\gamma + M_2\cos\gamma; \\ &A\ddot{\alpha} + H\ddot{\beta} - (A-C)\,\varepsilon\cdot\omega_{30}^2\cdot\sin\omega_{30}t = M_1\cos\gamma - M_2\sin\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

În relațiile (f) partea dreaptă reprezintă momentele față de axele x_3 și z_3 (fig. 9.34, *d*) și se notează cu M_1^* și M_2^* respectiv

$$\left.\begin{aligned} M_1^* &= M_1\sin\gamma + M_2\cos\gamma = -k\beta; \\ M_1^* &= M_1\cos\gamma - M_2\sin\gamma = -k\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

Momentele M_1^* și M_2^* sînt momente încovoietoare pentru ax și proporționale cu deformațiile unghiulare α și β prin rigiditatea k.

Cu aceste considerații relațiile (f) devin

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + k\beta &= -(A-C)\,\varepsilon\cdot\omega_{30}^2\cdot\cos\omega_{30}t; \\ A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + k\alpha &= (A-C)\varepsilon\,\omega_{30}^2\sin\omega_{30}t. \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

Ecuațiile (h) descriu dinamic micilor oscilații ale rotorului dezechilibrat cu ax deformabil.

Scanned with OKEN Scanner

I. Relaţiile (h) se pot particulariza pentru studiul *oscilaţiilor proprii* ale arborelui elastic cînd $\varepsilon = 0$ şi devin

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + k\beta = 0\,; \\ A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + k\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

Pentru ca sistemul de ecuaţii diferenţiale să admită soluţii distincte este necesar ca determinantul polinomial să fie nul

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 + k & -H\lambda \\ H\lambda & A\lambda^2 + k = 0 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0 \tag{j}$$

unde

$$p = \frac{2Ak + H^2}{A^2}, \qquad q = \frac{k^2}{A^2}.$$

Ecuaţia (j) are două rădăcini reale, negative

$$\lambda^2_{1,2} = -p_2 \pm \sqrt{p_4^2 - q}.$$

$$\lambda^2_{1,2} = -\frac{2Ak + H^2}{2A^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2Ak + H^2}{2A^2}\right)^2 - \frac{k^2}{A^2}} \tag{k}$$

care definesc două valori ale pulsaţiilor oscilaţiilor proprii

$$\omega_1 = \sqrt{|\lambda_1^2|}\,; \omega_2 = \sqrt{|\lambda_2^2|}.$$

Notînd $\rho^2 = k/A$ şi $n = H/A$, ecuaţia (k) se transcrie sub forma

$$\lambda^2_{1,2} = -(\rho^2 + n^2) \pm \sqrt{n^2\rho^2 + \frac{1}{4}n^4}. \tag{l}$$

Mărimile ρ şi n au semnificaţie fizică; astfel ρ reprezintă pulsaţia proprie a arborelui supus la încovoiere iar n — frecvenţa oscilaţiilor de mutaţie pe care le efectuează discul dacă $k = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile (i), în cazul determinării oscilaţiilor proprii, au forma

$$A\ddot{\beta} + k\beta = 0; \qquad A\ddot{\alpha} + k\alpha = 0$$

şi fiecare din ele defineşte frecvenţa proprie prin $\sqrt{\frac{k}{A}}$.

În al doilea caz (pentru $k = 0$) micile oscilaţii giroscopice se echilibrează şi în acest caz frecvenţa oscilaţiilor este H/A.

Relaţia (l) este utilă deoarece exprimă în acelaşi timp ambele situaţii. În figura 9.34, *e* se arată dependenţa pulsaţiilor ω_1 şi ω_2 cu rigiditate k a arborelui şi viteza unghiulară ω_{30}.

II. *Oscilaţiile forţate* ($\varepsilon \neq 0$) se studiază cu ecuaţiile neomogene (h) în care se adoptă funcţii sinusoidale de forma

$$\beta = -R_\beta \cos \omega_{30} t; \qquad \alpha = -R_\alpha \sin \omega_{30} t, \tag{m}$$

unde R_α şi R_β sînt amplitudinile oscilaţiilor forţate (unghiurile maxime de rotaţie a discului în jurul axelor x_3 şi z_3).

Înlocuind aceste funcţii în ecuaţiile (h) se obţine

$$R_\beta = \frac{\varepsilon\omega_{30}^2 (A - C)(H\omega_{30} + A\omega_{30}^2 - k)}{(A\omega_{30}^2 - k)(A\omega_{30}^2 - k) - H^2\omega_{30}^2}; \quad R_\alpha = -R_\beta \tag{n}$$

Relaţia (b) arată influenţa dezechilibrării dinamice ε în funcţie de deformaţia admisibilă a arborelui.

Aplicaţie numerică: pentru aşchietorul *MRG*—40 se cere să se calculeze: a) pulsaţia critică; b) dezechilibrarea dinamică admisibilă a discului; c) reacţiunile din lagăre datorate efectului giroscopului. Se dau: $A = B = 4780{,}5$ kg.cm.s^2; $C = 2A = 9561$ kg cm · s^2; $k = 6{,}7 \cdot 10$ kg.cm $\omega_{30} = 750$ rot/min $= 78$ s ; $H = C\omega_{30} = 746\,000$ kg.cm.s; $l = 90$ cm (distanţa între lagăre).

a) Se calculează

$$p = \frac{2Ak + H^2}{A^2} = 30{,}5 \cdot 10; \qquad q = \frac{k^2}{A^2} = 196 \cdot 10;$$

apoi înlocuind în ecuaţiile (k) rezultă

$$\lambda_1^2 = -9{,}17 \cdot 10^4 \ s^{-2}; \quad \lambda_2 = -21{,}33 \cdot 10^4 \ s^{-2},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\omega_1 = \sqrt{|\lambda_1^2|} = \sqrt{8{,}17 \cdot 10^4} = 286 \ \ s^{-1}; \quad \omega_2 = \sqrt{|\lambda_2^2|} = 21{,}33 \cdot 10^4 = 426 \ \ s^{-1}.$$

b) Pentru determinarea abaterii dinamice ε se apreciază distanța z care permite exprimarea valorilor limită a deformațiilor unghiulare cu ajutorul razei discului r:

$$\alpha_{max} = R_\alpha = z/r; \qquad \beta_{max} = R_\beta = z/r. \tag{o}$$

Înlocuind în relația (n) se obține:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon \cdot 1{,}43 \ \ [\text{rad}] \tag{p}$$

Pentru $z = 1$ mm și $r = 680$ mm, $\alpha_{max} = \beta_{max} = 0{,}0014$ [rad], de unde

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{max}}{1{,}43} = \frac{0{,}0014}{1{,}43} \cong 0{,}001 \ \ [\text{rad}] = 0{,}058°.$$

În figura 9.34, *f* se reprezintă grafic dependența $\varepsilon = \varepsilon(z)$.

c) Reacțiunile din lagăre se determină împărțind cuplul giroscopic la distanța dintre lagăre.

Dacă $\alpha < 1$, atunci

$$M_1' \cong H\dot{\beta} = HR_\beta \, \omega_{30} \, \sin\omega_{30}t;$$

$$M_2' \cong -H\dot{\alpha} = -HR_\alpha \, \omega_{30} \, \cos \omega_{30}t.$$

Se determină valorile maxime ale forțelor de reacțiune pentru valoarea limită a unghiului $\varepsilon \cong 0{,}058°$ proiectate pe două direcții ortogonale

$$F_1 = \frac{H\dot{\beta}}{l} = \frac{746\,000 \cdot 0{,}115 \cdot \sin \omega_{30}t}{90} = 955 \ \sin\omega_{30}t \ \ [\text{daN}];$$

$$F_2 = -\frac{H\dot{\alpha}}{l} = \frac{746\,000 \cdot 0{,}115 \cdot \cos \omega_{30}t}{90} = -955 \cos \omega_{30}t \ \ [\text{daN}]$$

9.35. Să se studieze mișcarea cu punct fix a arborelui doborît mecanizat sub acțiunea greutății, considerînd și rezistența aerului (fig. 9.35).

Rezolvare. În figura 9.35 este dată schema încărcării cu forțele de acțiune și reacțiune și a parametrilor cinematici care descriu mișcarea. În punctul O_1 se reprezintă forțele și momentele de reacțiune din partea

mașinii. În punctul D se reprezintă forțele în punctul C greutatea arborelui. Arborele sub acțiunea forțelor ce îi revin. Forțele sînt de rezistență aerodinamică iar se consideră corp solid rigid reprezentate prin proiecții triortogonale. Parametrii cinematici sînt cele trei unghiuri ale lui Euler : θ — unghiul de nutație, ψ — unghiul de precesie și φ — unghiul de rotație proprie.

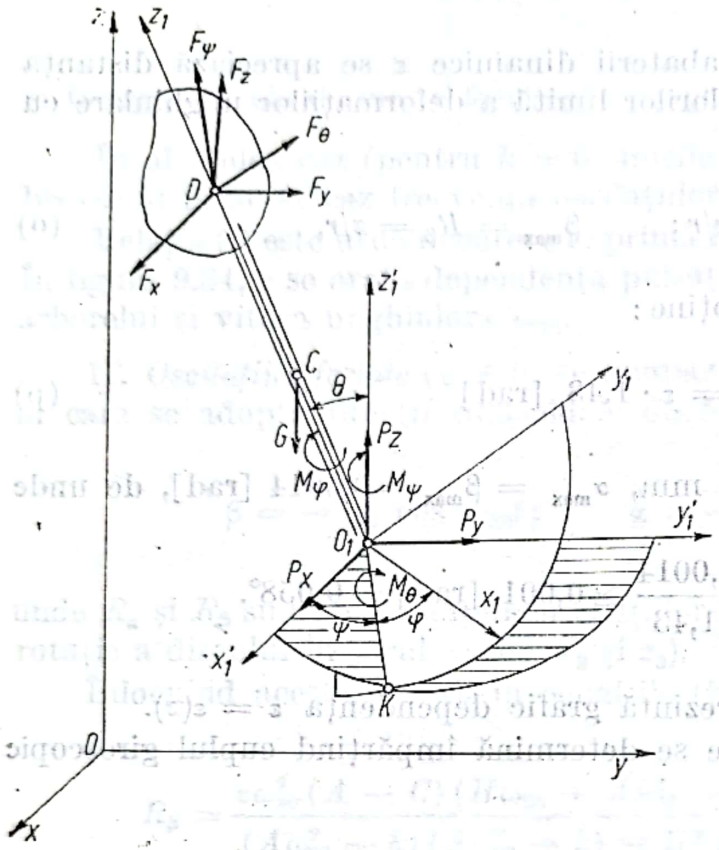


Fig. 9.35

Arborele este considerat corp rigid cu 6 grade de libertate.

Mișcarea se studiază în raport cu un sistem de referință mobil $O_1x_1y_1z_1$ solidar cu arborele, poziționat față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$ prin unghiurile lui Euler. La rîndul său, sistemul $O_1x_1'y_1'z_1'$ este în mișcare în raport cu sistemul fix $Oxyz$.

Ecuațiile diferențiale ale mișcării se pot obține cu ajutorul ecuației lui Lagrange de speța a II-a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \quad \text{(a)}$$

unde E este energia cinetică ; $\dot{q}_i$ — coordonatele generalizate ; $\dot{q}_i$ — vitezele generalizate ; Q_i — forța generalizată.

Energia cinetică a arborelui este

$$E = \frac{1}{2} m v_{01}^2 + m\bar{v}_{01} \cdot \bar{v}_r + E_r, \quad \text{(b)}$$

unde m este masa arborelui ; v_{01} — viteza punctului O_1 în sistemul de coordonate $Oxyz$; v_r — viteza relativă a centrului de greutate al arborelui în raport cu sistemul $O_1x_1'y_1'z_1'$; E — energia cinetică a arborelui în mișcare relativă față de sistemul $O_1x_1'y_1'z_1'$.

Expresia energiei cinetice relative, în funcție de momentele principale de inerție are forma

$$E_r = \frac{1}{2}(J_{x1}\omega_{x1}^2 + J_{y1}\omega_{y1}^2 + J_{z1}\omega_{z1}^2).$$

unde J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1} sînt momentele principale de inerție în raport cu axele ce trec prin punctul O_1 ; se poate considera că $J_{x_1} = J_{y_1}$.

Componentele vitezei unghiulare, în funcţie de parametrii lui Euler sînt:

$$\omega_{x_1} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$\omega_{x_1} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi;$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi}.$$

După înlocuiri, energia cinetică devine

$$E_r = \frac{1}{2} J_{x_1} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J_{z_1} (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \qquad (c)$$

Produsul scalar din relaţia (b) are forma

$$\bar{v}_{01} \cdot \bar{v}_r = \dot{x} v_{rx_1'} + \dot{y} v_{rx_1'} + \dot{z}_{rz_1'},$$

unde $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ sînt proiecţiile vectorului viteză $\bar{v}_{0_1}$ pe axele x, y, z iar $v_{rz_1'}$, $v_{ry_1'}$, $v_{rz_1'}$ — proiecţiile vectorului viteză relativă a centrului de greutate al arborelui pe axele x_1', y_1', z_1'.

Viteza relativă a centrului de greutate a arborelui se poate exprima prin proiecţii faţă de axa fixă z_1' şi linia nodurilor.

Prin rotirea arborelui în jurul axei z se schimbă unghiul ψ, vectorul vitezei $v_{C\psi}$ al centrului de greutate devine paralel cu linia nodurilor O_1K şi este dirijat în direcţia de cădere.

Proiecţiile vitezei $v_{C\psi}$ pe axele x_1', y_1' şi z_1' sînt

$$v_{C\psi x_1'} = \dot{\psi} h_C \sin \theta \cos \psi;$$

$$v_{C\psi y_1'} = \dot{\psi} h_C \sin \theta \sin \psi;$$

$$v_{C\psi z_1^2} = 0,$$

unde h_C este distanţa de la centrul de greutate al arborelui la punctul fix O_1.

Prin rotirea arborelui în jurul liniei nodurilor O_1K se descrie unghiul θ, iar vectorul vitezei $v_{C\theta}$ a centrului de greutate a arborelui, este perpendicular pe axa z_1 (axa arborelui) şi este îndreptat în direcţia de cădere. Ca atare

$$v_{C\theta x_1'} = \dot{\theta} h_C \cos \theta \sin \psi;$$

$$v_{C\theta y_1'} = -\dot{\theta} h_C \cos \theta \cos \psi;$$

$$v_{C\theta z_1'} = -\dot{\theta} h_C \sin \theta$$

Rezultă

$$v_{Crx_1'} = v_{C\psi x_1'} + v_{C\theta x_1'} = \dot{\psi} h_C \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} h_C \cos\theta \sin\psi;$$

$$v_{Cry_1'} = v_{C\psi y_1'} + v_{C\theta y_1'} = \dot{\psi} h_C \sin\theta \sin\psi - \dot{\theta} h_C \cos\theta \cos\psi;$$

$$v_{Crz_1'} = v_{C\psi z_1'} + v_{C\theta z_1'} = -\dot{\theta} h_C \sin\theta.$$

iar expresia produsului scalar devine

$$\bar{v}_{O_1} \cdot \bar{v}_{Cr} = \dot{x} h_C (\dot{\psi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \cos\theta \sin\psi) +$$

$$+ \dot{y} h_C (\dot{\psi} \sin\theta \sin\psi - \dot{\theta} \cos\theta \cos\psi) - \dot{z}\dot{\theta} h_C \sin\theta.$$

Energia cinetică a mişcării arborelui are forma

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y} + \dot{z}^2) + m h_C [\dot{x} (\dot{\psi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \cos\theta \sin\psi) +$$

$$+ \dot{y} (\dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi - \dot{\theta} \cos\theta \cos\psi) - \dot{z}\dot{\theta} \sin\theta] +$$

$$+ \frac{1}{2} J_{x_1} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} J_{z_1} (\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\psi})^2.$$

Considerînd deplasările elementare δx, δy şi δz se obţine lucrul mecanic elementar

$$\delta L_x = (P_x + F_x)\, \delta x;$$

$$\delta L_y = (P_y + F_y)\, \delta_y;$$

$$\delta L_z = (P_z + F_z - G)\, \delta z.$$

Dacă se consideră deplasările unghiulare elementare $\delta\theta$, $\delta\psi$ şi $\delta\varphi$ lucrul mecanic elementar devine

$$\delta L_\theta = (G h_C \sin\theta + F_x h_D \sin\psi \cos\theta -$$

$$- F_y h_D \cos\theta \cos\psi - F_z h_D \sin\theta - M_\theta)\, \delta\theta;$$

$$\delta L_\psi = (F_x h_D \sin\theta \cos\psi + F_y H_D \sin\theta \sin\psi - M_\psi)\, \delta_\psi;$$

$$\delta L_\varphi = - M_\varphi \delta_\varphi$$

De aici rezultă forţele generalizate

$$\left.\begin{aligned}
Q_x &= P_x + F_x;\\
Q_y &= P_y + F_y;\\
Q_z &= P_z + F_z - G;\\
Q_\theta &= G h_C \sin\theta + (F_x \sin\psi - F_y \cos\psi) h_D \cos\theta - F_z h_D \sin\theta - M_\theta;\\
Q_\psi &= (F_x \cos\psi + F_y \sin\psi) h_D \sin\theta - M_\psi;\\
Q_\varphi &= - M_\varphi
\end{aligned}\right\} \quad (e)$$

unde $h_D = O_1 D$ (D fiind punctul unde acţionează forţele rezistente).

Componentele forței aerodinamice, aplicată în punctul D, se exprimă în funcție de parametrii lui Euler:

$$F_\theta = \frac{1}{2} C_x \rho S_c h_D^2 \dot{\theta}^2; \quad F_\psi = \frac{1}{2} C_x \rho S_c h_D^2 \dot{\psi}^2 \sin^2\theta,$$

unde C_x este coeficientul de formă al coroanei arborelui; ρ — densitatea aerului; S_c — aria secțiunii frontale a coroanei.

Proiecțiile forțelor F_θ și F_ψ pe axele x, y, z sînt (fig. 9.35):

$$F_{\theta x} = -F_\theta \cos\theta \sin\psi; \quad F_{\theta y} = F_y \cos\theta \cos\psi; \quad F_{\theta z} = F_\theta \sin\theta;$$

$$F_{\psi x} = -F_\psi \cos\psi; \quad F_{\psi y} = -F_\psi \sin\psi; \quad F_{\psi z} = 0.$$

Rezultă:

$$F_x = F_{\theta x} + F_{\psi x} = -\frac{1}{2} C_x \rho S_c h_D^2 (\dot{\theta}^2 \cos\theta \sin\psi + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta \cos\psi);$$

$$F_y = F_{\theta y} + F_{\psi y} = \frac{1}{2} C_x \rho S_c h_D^2 (\dot{\theta}^2 \cos\theta \cos\psi - \dot{\psi}^2 \sin^2\theta \sin\psi);$$

$$F_z = F_{\theta z} + F_{\psi z} = \frac{1}{2} C_x \rho S_c h_D^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta.$$

După transformări și efectuarea calculelor ecuația lui Lagrange (a), conduce la sistemul de ecuații diferențiale de mișcare:

$$\left.\begin{aligned}
&m\ddot{z} + mh_C(\ddot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \ddot{\psi}\sin\theta\cos\psi) + 2mh_C\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi \\
&\quad - mh_C(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\theta\sin\psi = P_x + F_x; \\
&m\ddot{y} - mh_C(\ddot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \ddot{\psi}\sin\theta\sin\psi) + 2mh_D\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi + \\
&\quad + mh_C(\theta^2 + \psi^2)\sin\theta\cos\psi = P_y + F_y; \\
&m\ddot{z} - mh_C(\ddot{\theta}\sin\theta + \theta^2\cos\theta) = P_z + F_z - G; \\
&J_{x_1}\ddot{\theta} - (J_{x_1} - J_{z_1})\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + mh_C[(\ddot{x}\sin\psi - \ddot{y}\cos\psi)\cos\theta - \\
&\quad - \ddot{z}\sin\theta] + J_{z_1}\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta - Gh_C\sin\theta + (F_x\sin\psi - F_y\cos\psi)h_D\cos\theta - \\
&\quad - F_z h_D\sin\theta - M_\theta; \\
&(J_{x_1}\sin^2\theta + J_{z_1}\cos^2\theta)\ddot{\psi} + J_{z_1}\ddot{\varphi}\cos\theta + 2(J_{x_1} - J_{z_1})\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta - \\
&\quad - J_{z_1}\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta + mh_C(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi)\sin\theta = (F_x\cos\psi + F_y\sin\psi) \\
&h_D\sin\theta - M_\psi; \\
&I_r(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\varphi}) - J_{z_1}\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta = -M_\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Sistemul de ecuaţii obţinut poate fi rezolvat în diferite cazuri particulare şi interesează în proiectarea mecanismelor şi agregatelor utilizate în lucrările de exploatări forestiere.

9.36 Să se studieze posibilitatea dirijării căderii arborelui în timpul operaţiei de doborîre. În figura 9.36, *a*, este dată schema doborîrii arborelui cu aplicarea corecţiei reprezentate de forţa P_k.

Rezolvare. Se introduc notaţiile:

G — greutatea arborelui; P_k — forţa de corecţie; $P_x P_y P_z$ — presiunea exercitată în legătură maşinii cu arborele (punctul O) proiectată pe

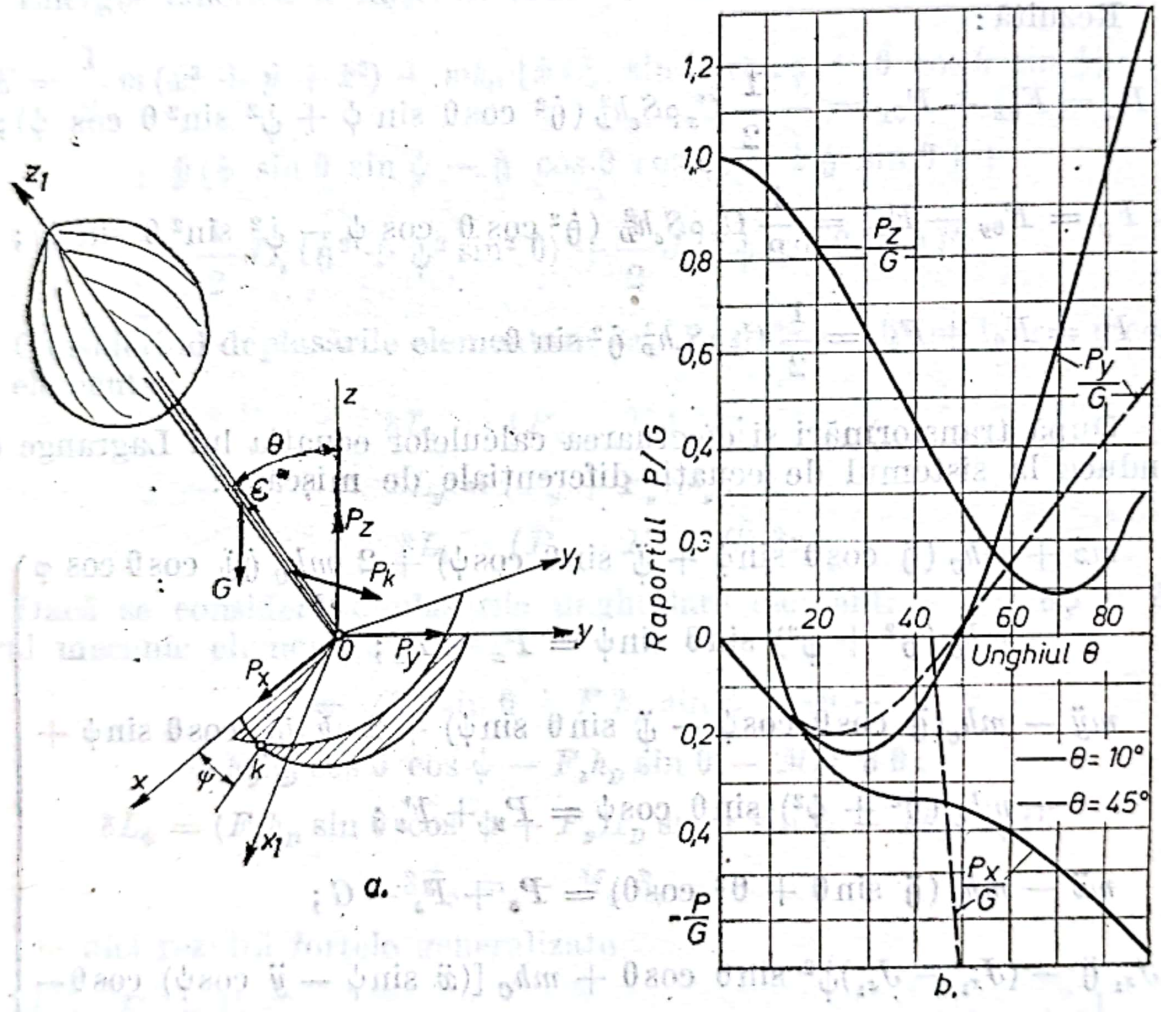


Fig. 9.36

axele x, y şi z; θ, ψ — unghiurile lui Euler la mişcarea sferică a arborelui în jurul punctului O. În acest caz θ este unghiul căderii libere a arborelui iar ψ este unghiul de corecţie al planului de cădere al arborelui; OK — linia nodurilor; $Ox_1y_1z_1$ — sistemul de referinţă fix; $Oxyz$ — sistemul de referinţă mobil, solidar cu arborele.

Forţa P_k acţionează perpendicular pe suprafaţa de cădere a arborelui. Considerînd ecuaţiile dinamicii pentru mişcarea cu punct fix a rigidului, rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{\theta} h \cos\theta \sin\psi + \ddot{\psi} h_c \sin\theta \cos\psi + 2\dot{\theta}\dot{\psi} h_c \cos\theta \cos\psi - \\
&-(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) h_c \sin\theta \sin\psi = \frac{P_x}{m} + \frac{P_k}{m}\cos\psi; \\
&-\ddot{\theta} h \cos\theta \cos\psi + \ddot{\psi} h \sin\theta \sin\psi + 2\dot{\theta}\dot{\psi} h_c \cos\theta \sin\psi + \\
&+ \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) h_c \sin\theta \cos\psi = \frac{P_y}{m} + \frac{P_k}{m}\sin\psi; \\
&-\theta h_c \sin\theta - \dot{\theta}^2 h_c \cos\theta = \frac{P_z}{m} - g; \\
&\dot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta = c_2 \sin\theta; \\
&\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta = c_2 \frac{M_k}{G h_c},
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

unde h_c este înălțimea centrului de greutate al arborelui; m — masa arborelui; g — accelerația gravitațională; $c_2 = \frac{G \cdot h_c}{J}$, unde J este momentul de inerție al arborelui; $M_k = P_k \cdot h_{P_k}$ — momentul de corecție aplicat arborelui, iar h_{P_k} este distanța de la punctul de sprijin la punctul de aplicație al forței de corecție.

Expresia unghiului de cădere este

$$\psi = \frac{M_k}{4Gh_c}\left[3 \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} + 4 \operatorname{ctg}\theta_1 - 3 \sin\frac{\theta_1}{2} ln \operatorname{ctg}\frac{\theta_1}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\sin\theta_1} + \sin\theta_1\left(\frac{2}{\sin\theta \sin\frac{\theta}{2}} + 3 ln \operatorname{ctg}\frac{\theta}{4} - \frac{3}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(-4 \operatorname{ctg}\theta\right]\right.\right. \cdot \quad (b)$$

Forțele P_x, P_y, P_z se pot determina din primele trei ecuații ale sistemului (a).

Unghiul de rotație proprie φ fiind constant din a patra ecuație rezultă

$$\ddot{\theta} = c_2 \sin\theta \quad (c)$$

Integrînd ecuația (c) se obține

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{2c_2(1 - \cos\theta)}. \quad (d)$$

În cazul lichidelor omogene, $\rho = \text{const.}$ și $U = gz + \text{const.}$, deci formula presiunii devine :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = g(z_1 - z_2), \quad \text{respectiv} \quad p_1 + \gamma z_1 = p_2 + \gamma z_2 = p + \gamma z = \text{const.},$$

în care $\gamma = \rho g$ este greutatea specifică a lichidului, iar z este cota punctului măsurată pe verticală în sus de la un plan orizontal, considerat plan de referință. Se vede că pentru $z = \text{const.}$ (plan orizontal), rezultă $p = \text{const.}$ (suprafață izobară), deci la lichide în repaus presiunea este constantă în planele orizontale. Se precizează că planele orizontale trebuie să treacă prin același lichid, conținut în același domeniu (recipiente comunicante).

Aceeași formulă, aplicată unui lichid conținut într-un vas închis, se scrie sub forma

$$p = p_0 + \gamma h, \tag{10.6}$$

în care p_0 este presiunea de la suprafața lichidului, iar h este adîncimea considerată de la această suprafață.

În această formulă, p este presiunea absolută, iar $p_s = p - p_0 = \gamma h$ este presiunea relativă (suprapresiune).

O presiune relativă negativă ($p < p_0$) se numește depresiune $p_d = p_0 - p$.

Presiunea, conform formulei de definire (10.3), are dimensiunea $L^{-1}MT^{-2}$, iar în sistemul de unități SI, are simbolul unității de măsură N/m^2. Această unitate se numește și pascal (P). Se mai definește

$$1 \text{ piez } (pz) = 10^3 N/m^2 = 10^3 \text{ P},$$

În sistemul de unități CGS, simbolul unității de măsură este dyn/cm^2. Această unitate se numește microbar (μ bar)

$$1 \ \mu \text{ bar} = 10^{-1} N/m^2$$

Baria este :

$$1 \text{ bar} = 1 \text{ M dyn/cm}^2 = 10^5 N/m^2 = 10^6 \ \mu \text{ bar}.$$

Milibarul este adesea folosit în barometria meteorologică cu simbolul mb.

În sistemul de unități MKfS, simbolul unității de măsură este $kgf/m^2 = 9{,}80665 \ N/m^2$.

Atmosfera tehnică (at) este $1 \text{ at} = 10^4 kgf/m^2$.

În afara sistemelor de unități se mai utilizează :

— Atmosfera normală (atm), $1 \text{ atm} = 101325 \ N/m^2 = 1{,}0332$ at. ;

— Torrul, $1 \text{ torr} = \frac{1}{760} \text{ atm} = 133{,}322 \ N/m^2 = 0{,}00131579 \text{ atm}$, ;

— Milimetrul coloană de apă, $1 \text{ mm } H_2O = 9{,}80665 \ N/m^2 = 10^{-4}$ at $= 9{,}67841 \cdot 10^{-5}$ atm, ;

— Milimetrul coloană de mercur, $1 \text{ mm Hg} = 13{,}5951 \text{ mm } H_2O = 1333{,}322 \ N/m^2 =$

$$= 1333{,}22 \text{ bar} = 0{,}00131579 \text{ atm}.$$

În barometria meteorologică se folosește relația :

$$760 \text{ mm Hg} = 1{,}0000001 \text{ atm}.$$

În cursul mișcării fluidelor expansibile (gaze și vapori) intervin procese termice (au loc transformări termodinamice). Mărimile de stare fundamentale ale gazelor (presiunea p, densitatea ρ și temperatura absolută T) variază conform ecuației de stare Clapeyron-Mendeleev :

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \text{sau} \quad \frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T, \tag{10.7}$$

numită și *ecuația generală a gazelor perfecte* : R este constanta universală a gazelor perfecte ($R = 8{,}31$ kJ/kmol.grd) iar M masa moleculară a gazului.

Dintre *transformările termodinamice* posibile prezintă interes, în mecanica fluidelor (dinamica gazelor), cele politropice de ecuație $\frac{p}{\rho^n} = \text{const.}$ Cazuri particulare : izochora, $\rho = \text{const.}$; izobara $p = \text{const.}$ izoterma $T = \text{const.}$ și adiabata $q_{12} = 0$ (fără schimb de

Scanned with OKEN Scanner

căldură cu exteriorul), de două feluri : izoentropa $s = \int \frac{dq}{T} = \text{const.}$ sau $\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}$, în care exponentul adiabatic $k = \frac{c_p}{c_v}$ (adiabata reversibilă) și anizentropa $s \neq \text{const.}$ (adiabata ireversibilă).

10.2. FORȚE DE PRESIUNE PE SUPRAFEȚE PLANE

În cazul suprafețelor plane, versorul $\bar{n}$ al normalei din formula (10.2) este constant, iar forța de presiune este un vector dirijat normal pe plan cu sensul dinspre fluid înspre plan, de modul

$$F_p = \int_A p\,dA, \tag{10.2'}$$

punctul său de aplicație fiind centrul de presiune.

Dacă presiunea este repartizată uniform în toate punctele suprafeței de arie A, forța este

$$\bar{F}_p = \bar{n}pA, \tag{10.2''}$$

iar centrul de presiune se confundă cu centrul de greutate geometric al suprafeței de arie A.

În cazul lichidelor, se calculează de obicei forța de suprapresiune pe o porțiune de arie A dintr-un plan

$$\bar{F}_s = \bar{n}\gamma A h_G = \bar{n}A p_{s,G}, \tag{10.8}$$

în care h_G este adîncimea centrului de greutate al suprafeței de arie A (notată uneori cu S), iar $p_{s,G} = \gamma h_G$ este suprapresiunea în dreptul aceluiași punct.

Notînd cu xOy sistemul de referință luat chiar pe planul înclinat, a cărui axă Ox este intersecția planului înclinat cu suprafața liberă a lichidului, iar axa Oy are direcția liniilor de pantă maximă, coordonatele x_C și y_C ale centrului de presiune aferent forței F_s sînt

$$x_C = \frac{I_{xy}}{y_G A} \quad \text{și} \quad y_C = \frac{I_x}{y_G A}, \tag{10.9}$$

în care y_G este ordonata centrului de greutate, I_x momentul de inerție, în raport cu axa Ox și I_{xy} momentul centrifugal, toate trei se referă la suprafața de arie A.

Pentru calcule sînt mai comode formulele

$$x_C = x_G + \frac{I_{G,xy}}{y_G A} \quad \text{și} \quad y_C = y_G + \frac{I_{G,x}}{y_G A}, \tag{10.10}$$

în care $I_{G,xy}$ și $I_{G,x}$ reprezintă respectiv momentul centrifugal și momentul de inerție, în raport cu axele paralele cu Ox și Oy trecînd prin centrul de greutate al suprafeței de arie A.

În cazul suprafețelor plane verticale este evident că

$$y_G = h_G \quad \text{și} \quad y_C = h_C.$$

10.3 FORȚE DE PRESIUNE PE SUPRAFEȚE CURBE

Din expresia (10.2) a forței de presiune $\bar{F}_p = \int_A \bar{n}p\ \mathrm{d}A$ pe suprafața de arie A, se deduc proiecțiile ei pe axele Ox, Oy și Oz,

$$F_x = \bar{i}\cdot\bar{F}_p = \int_A \bar{n}\cdot\bar{i}p\,dA = \int_{A_{yz}} p\,dA,$$

$$F_y = \bar{j}\cdot\bar{F}_p = \int_A \bar{n}\cdot\bar{j}p\ \mathrm{d}A = \int_{A_{zx}} p\,dA, \tag{10.11}$$

$$F_z = \bar{k}\cdot\bar{F}_p = \int_A \bar{n}\cdot\bar{k}p\ \mathrm{d}A = \int_{A_{xy}} p\,dA,$$

Scanned with OKEN Scanner

Cele trei proiecții F_x, F_y și F_z (notate uneori cu P_x, P_y și P_z) nu sînt concurente, decît în cazuri particulare.

Nefiind concurente, forțele F_x, F_y și F_z se reduc în general la un torsor (rezultanta $\bar{F}_p = \bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z$, notată uneori numai cu $\bar{F}$ sau $\bar{P}$, invariabilă) și un moment M (variabil în funcție de poziția în spațiu a polului de reducere).

În cazul lichidelor, forța de suprapresiune are cele trei proiecții pe axe

$$F_x = \gamma A_{yh} \cdot h_{G,yh},\ F_y = \gamma A_{hx} \cdot h_{G,hx} \quad \text{și} \quad F_h = \gamma V, \tag{10.12}$$

în care A_{yh} este proiecția pe planul vertical yOh a suprafeței curbe de arie A, $h_{G,yh}$ adîncimea centrului de greutate al acestei proiecții A_{hx} proiecția pe planul vertical xOh a suprafeței curbe de arie A, $h_{G,hx}$ adîncimea centrului de greutate al acestei proiecții, iar V volumul cuprins între suprafața curbă (jos), suprafața liberă (sus) și mărginit (lateral) de verticalele sprijinite pe conturul suprafeței curbe. Aceste formule sînt valabile dacă se consideră ca plan orizontal xOy suprafața liberă, iar axa verticală Oh orientată pozitiv în jos.

Centrele de presiune ale forțelor F_x și F_y se calculează cu formulele corespunzătoare forțelor de suprapresiune pe suprafețe plane verticale, iar centrul de presiune al forței F_h este centrul de greutate al volumului V.

10.4. FORȚE DE PRESIUNE PE SUPRAFEȚE ÎNCHISE, PLUTIREA CORPURILOR

Dacă suprafața curbă S a peretelui pe care acționează fluidul este închisă (corp scufundat în fluid), proiecțiile sale pe planele de coordonate sînt nule și rezultă :

— pentru fluidul ușor

$$F_x = F_y = F_z = 0\ ;$$

— pentru fluidul greu (cazul lichidelor)

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = F_h = \gamma V_c, \tag{10.11'}$$

în care V_c este volumul corpului imers, egal cu volumul de lichid dezlocuit (principiul lui Arhimede).

Forța F_h este portanța hidrostatică, orientată de jos în sus și trece prin centrul de greutate al volumului V_c.

Rezultanta forțelor verticale (portanța hidrostatică F_h și greutatea corpului G) este forța ascensională

$$F_a = F_h - G,$$

dacă este orientată de jos în sus ($F_a > 0$), sau forța descensională $F_d = G_h - F$, dacă este orientată de sus în jos ($Fa < 0$).

Mișcarea ascendentă a unui corp imers în lichid se termină cînd rămîne în lichid numai o parte din corp, numită carenă, al cărei volum este $V_{ca} < V_c$.

Dacă $\gamma V_{ca} = G$, corpul plutește. Forța $F_r = \gamma (V_c - V_{ca})$ se numește rezervă de plutire, iar adîncimea punctului cel mai de jos al plutitorului se numește pescaj (notată de obicei cu h).

La orice plutitor se păstrează egalitatea $G = \gamma V_{ca}$ în orice poziție de plutire ; forța γV_{ca} se numește deplasament.

Oricum s-ar înclina un plutitor, dacă este solid nedeformabil, centrul său de greutate (sau baricentrul, notat cu litera G) rămîne în repaus relativ (în aceeași poziție față de frontiere) ; în schimb, centrul de carenă (notat cu litera C) își schimbă poziția față de frontierele plutitorului, deoarece prin înclinarea plutitorului carena își schimbă forma geometrică.

Printre multiplele poziții relative posibile ale punctelor G și C, există una singură cînd ambelele puncte se află pe aceeași verticală. Această direcție particulară se numește *axă de plutire* și se consideră solidară cu plutitorul chiar dacă acesta se înclină, adică se înclină simultan cu el.

Cînd plutitorul este înclinat, centrul de carenă C are altă poziție. Verticala dusă prin noua poziție a centrului de carenă (suport al portanței hidrostatice) intersectează axa de plutire înclinată în punctul M, numit *metacentru*.

Scanned with OKEN Scanner

Lungimea segmentului CM de pe axa de plutire se numește distanță metacentrică $d_m = CM$ și se calculează cu formula lui Dupin

$$d_m = CM = \frac{I_y}{V_{ca}}, \tag{10.13}$$

în care I_y (notat uneori cu I_i) este momentul de inerție geometric al ariei de plutire (intersecția plutitorului cu suprafața liberă a lichidului) în raport cu axa de înclinare (în planul orizontal al ariei de plutire).

Echilibrul plutirii este stabil cînd

$$CM > CG \tag{10.14}$$

Coeficientul de stabilitate este

$$C_s = \frac{d_m}{c}, \tag{10.15}$$

în care c este lungimea segmentului CG.

După cum $c_s > 1$, $c_s = 1$ sau $c_s < 1$, echilibrul plutitorului este stabil, indiferent sau labil (instabil).

Dacă G este mai jos decît C pe axa de plutire, numai la corpuri neomogene echilibrul plutitorului nu poate fi decît stabil (de exemplu la areometre-densimetre).

Dacă la corpurile imerse în fluide se urmărește studiul tensiunilor interioare (rezistența materialelor), se vor considera perechi de forțe F_{x_1} și F_{x_2}, F_{y_1} și F_{y_2}, F_{z_1} și F_{z_2}, respectiv două cîte două cu sensuri opuse, evaluate cu formulele de calcul ale forțelor de presiune pe suprafețe curbe. Într-adevăr, forțele de sens contrar solicită corpul imers la compresiune, pe direcția comună ambelor forțe.

10.5 ECHILIBRUL RELATIV AL LICHIDELOR CONȚINUTE ÎN RECIPIENTE ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE (CENTRIFUGAREA LICHIDELOR)

Se consideră un vas cilindric de rază R, conținînd lichid de densitate ρ pînă la înălțimea h_0, care se rotește în jurul axei sale verticale (axa Oz) cu o viteză unghiulară constantă ω. Se ia planul xOy pe fundul vasului cu originea O pe axa de rotație.

Forța masică unitară de inerție a unei particule la raza curentă $r \in [0, R]$ este forța centrifugă $\bar{F}_i = \omega^2 \bar{r}$, cu componentele

$$f_x = \omega^2 \cdot x, \qquad f_y = \omega^2 y.$$

Forța masică unitară absolută $\bar{F} = \bar{g}$, deci

$$f_z = -g.$$

Expresia potențialului total este

$$U_t = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + gz + C = -\frac{\omega^2 r^2}{2} + gz + C. \tag{10.16}$$

Ecuația suprafețelor echipotențiale (izobare) se obține făcînd $U_t = \text{const.}$, adică

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C_1, \tag{10.17}$$

Ecuația suprafeței libere (un paraboloid de revoluție cu axa Oz, avînd vîrful de cotă h și baza de cotă H, pe peretele vasului) este

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - \frac{R^2}{2}\right) + h_0 \tag{10.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cotele care definesc paraboloidul suprafeței libere în raport cu nivelul inițial al lichidului în vas (h_0):

$$h = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \text{ (pe axul de rotație)}; \tag{10.19}$$

$$H = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \text{ (pe peretele vasului)} \tag{10.20}$$

Repartiția presiunilor este dată de relația generală a echilibrului relativ

$$p + \rho U_t = p + \rho\left(gz - \frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = \text{const.} \tag{10.21}$$

Repartiția presiunilor pe fundul vasului ($z = 0$) este parabolică, în funcție de r

$$p = p_0 + \rho\left(gh + \frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = p_0 + \gamma\left(h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right), \tag{10.22}$$

p_0 fiind presiunea de la suprafața lichidului.

Repartiția presiunilor pe peretele lateral ($r = R$) este liniară

$$p = p_0 + \gamma\left(h + \frac{\omega^2 R^2}{2g} - z\right). \tag{10.23}$$

10.6. FORȚE DE ACȚIUNE ȘI DE REACȚIUNE

Teorema forțelor de impuls (dată de Euler) aplicată între două secțiuni transversale *1* și *2* ale unui tub de curent

$$(\dot{m}\,\bar{v})_2 - (\dot{m}\,\bar{v})_1 = \Sigma\,\bar{F}_{ext} + \Sigma\,\bar{F}_1 \tag{10.24}$$

arată că din forța de impuls la ieșire

$$\bar{I}_2 = (\dot{m}\,\bar{v})_2 = \rho Q\bar{v}_2 = \rho\dot{V}\bar{v}_2,$$

(v-viteză medie în secțiune, ρ-densitate, $Q = \dot{V}$-debit volumic, $\dot{m} = \rho Q = \rho\dot{V}$ – debit masic)
se scade vectorial forța de impuls la intrare

$$\bar{I}_1 = (\dot{m}\,\bar{v})_1 = \rho Q\bar{v}_1 = \rho\dot{V}\bar{v}_1,$$

iar rezultatul este o forță care trebuie să echilibreze rezultanta forțelor exterioare $\Sigma\,\bar{F}_{ext}$ (notată uneori G) însumată vectorial cu rezultanta forțelor de legătură $\Sigma\,\bar{F}_1$.

Ca forțe de legătură se consideră forțele de presiune (statică) $\bar{F}_{p_1}$ și $\bar{F}_{p_2}$ pe suprafețele celor două secțiuni ale tubului de curent, forța tangențială $\bar{F}_t$ pe suprafața laterală a tubului de curent și forța de reacțiune $\bar{F}_r$ care se introduce cînd se înlătură (fictiv) pereții solizi ai tubului prin care curge fluidul (suprafața de control este delimitată de secțiunile transversale și suprafața laterală a tubului de curent).

Ecuația (10.24) devine

$$(\dot{m}\,\bar{v})_2 - (\dot{m}\,\bar{v})_1 = \Sigma\,\bar{F}_{ext} + \bar{F}_{p_1} - \bar{F}_{p_2} + \bar{F}_t + \bar{F}_r. \tag{10.25}$$

Din această ecuație rezultă forța de acțiune

$$\bar{F}_a = -\bar{F}_r = (\dot{m}\,\bar{v})_1 - (\dot{m}\,\bar{v})_2 + \Sigma\,\bar{F}_{ext} + \bar{F}_{p_1} - \bar{F}_{p_2} + \bar{F}_t \tag{10.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

În practică se folosește formula (10.25'), proiectîndu-se vectorii pe anumite direcții alese convenabil; astfel componentele pe aceeași direcție ale forțelor care intervin se adună algebric. În proiecție pe aceeași direcție, forța de acțiune are același sens cu forța de impuls la intrare (secțiunea 1) adică are sensul de curgere.

În calculele hidrodinamice (hidromecanice) la utilizarea formulei (10.25') se ia uneori $F_t = 0$, influența rezistenței tangențiale la curgerea fluidului apărînd în calculul forțelor de presiune, considerînd căderea corespunzătoare de presiune. Uneori F_t se calculează ca o rezistență la înaintare F_r, cu formula (10.28).

10.7. REZISTENȚA LA ÎNAINTARE ȘI PORTANȚA

Dacă în jurul unui corp, imers într-un curent fluid de viteză v se stabilește o circulație $\Gamma \neq 0$ a vitezei, asupra corpului se dezvoltă o forță de natură hidro (gazo) dinamică $\bar{F}$. Ea poate fi descompusă după direcția vitezei $\bar{v}$ și după o direcție perpendiculară pe aceasta. Componenta perpendiculară are tendința de a devia corpul, de aceea se numește forță deviatoare sau portanță. După teorema Kutta-Jukovski, portanța are expresia

$$F_z = \rho v \Gamma b,$$

în care b este anvergura (lărgimea) corpului măsurată perpendicular pe vectorul $\bar{v}$.

Din considerente de similitudine modulul portanței are expresia

$$F_p = \frac{\rho}{2} v^2 A C_p, \tag{10.26}$$

în care $\frac{\rho}{2} v^2$ este presiunea dinamică, A aria unei suprafețe de referință (aria unei aripi, suprafața portantă sau aria secțiunii frontale a unui corp), iar C_p coeficientul adimensional de portanță

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2}, \tag{10.27}$$

în care p este presiunea absolută pe suprafața corpului, p_∞ presiunea statică în curentul de fluid în amonte de corp, avînd viteza v_∞ (viteza la infinit, în zona neperturbată de contactul dinamic cu corpul). După cum $p - p_\infty > 0$ sau $p - p_\infty < 0$ presiunea relativă pe suprafața corpului este suprapresiune sau depresiune.

Rezistența la înaintare are o expresie analogă

$$\bar{F} = \bar{i} \frac{\rho}{2} v^2 A C_r, \tag{10.28}$$

în care C_r este coeficientul de rezistență la înaintare; ea are direcția și sensul vectorului viteză $\bar{v}$ (notat uneori cu $\bar{w}$), al cărui versor este $\bar{i}$.

Această forță se poate dezvolta datorită mai multor cauze: rezistența tangențială, care se datorește frecării în stratul limită pe toată suprafața-frontieră a corpului solid; rezistența de formă, care se datorește diferențelor de presiune pe fețele amonte și aval; rezistența indusă, care se datorește influenței vîrtejurilor

Determinarea prin calcul a coeficienților hidro(gazo)dinamici c_p și c_r prezintă dificultăți matematice foarte mari, de aceea în practică se preferă metodele experimentale. În manualele de specialitate sînt date tabele, grafice ș.a. valori numerice ale coeficienților c_p și c_r pentru corpuri de diferite forme.

II. APLICAȚII

10.1. Să se determine forța de suprapresiune și centrul de presiune pe un perete vertical în contact cu apa, folosind diagrama de variație a suprapresiunii (fig. 10.1). Se dă $h = 2$ m și lungimea $l = 1{,}5$ m.

Scanned with OKEN Scanner

În practică se folosește formula (10.25'), proiectîndu-se vectorii pe anumite direcții alese convenabil; astfel componentele pe aceeași direcție ale forțelor care intervin se adună algebric. În proiecție pe aceeași direcție, forța de acțiune are același sens cu forța de impuls la intrare (secțiunea 1) adică are sensul de curgere.

În calculele hidrodinamice (hidromecanice) la utilizarea formulei (10.25') se ia uneori $F_t = 0$, influența rezistenței tangențiale la curgerea fluidului apărînd în calculul forțelor de presiune, considerînd căderea corespunzătoare de presiune. Uneori F_t se calculează ca o rezistență la înaintare F_r, cu formula (10.28).

10.7. REZISTENȚA LA ÎNAINTARE ȘI PORTANȚA

Dacă în jurul unui corp, imers într-un curent fluid de viteză v se stabilește o circulație $\Gamma \neq 0$ a vitezei, asupra corpului se dezvoltă o forță de natură hidro (gazo) dinamică $\bar{F}$. Ea poate fi descompusă după direcția vitezei $\bar{v}$ și după o direcție perpendiculară pe aceasta. Componenta perpendiculară are tendința de a devia corpul, de aceea se numește forță deviatoare sau portanță. După teorema Kutta-Jukovski, portanța are expresia

$$F_z = \rho v \Gamma b,$$

în care b este anvergura (lărgimea) corpului măsurată perpendicular pe vectorul $\bar{v}$.

Din considerente de similitudine modulul portanței are expresia

$$F_p = \frac{\rho}{2} v^2 A C_p, \tag{10.26}$$

în care $\frac{\rho}{2} v^2$ este presiunea dinamică, A aria unei suprafețe de referință (aria unei aripi, suprafața portantă sau aria secțiunii frontale a unui corp), iar C_p coeficientul adimensional de portanță

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2}, \tag{10.27}$$

în care p este presiunea absolută pe suprafața corpului, p_∞ presiunea statică în curentul de fluid în amonte de corp, avînd viteza v_∞ (viteza la infinit, în zona neperturbată de contactul dinamic cu corpul). După cum $p - p_\infty > 0$ sau $p - p_\infty < 0$ presiunea relativă pe suprafața corpului este suprapresiune sau depresiune.

Rezistența la înaintare are o expresie analogă

$$\bar{F} = \bar{i} \frac{\rho}{2} v^2 A C_r, \tag{10.28}$$

în care C_r este coeficientul de rezistență la înaintare; ea are direcția și sensul vectorului viteză $\bar{v}$ (notat uneori cu $\bar{w}$), al cărui versor este $\bar{i}$.

Această forță se poate dezvolta datorită mai multor cauze: rezistența tangențială, care se datorește frecării în stratul limită pe toată suprafața-frontieră a corpului solid; rezistența de formă, care se datorește diferențelor de presiune pe fețele amonte și aval; rezistența indusă, care se datorește influenței vîrtejurilor

Determinarea prin calcul a coeficienților hidro(gazo)dinamici c_p și c_r prezintă dificultăți matematice foarte mari, de aceea în practică se preferă metodele experimentale. În manualele de specialitate sînt date tabele, grafice ș.a. valori numerice ale coeficienților c_p și c_r pentru corpuri de diferite forme.

II. APLICAȚII

10.1. Să se determine forța de suprapresiune și centrul de presiune pe un perete vertical în contact cu apa, folosind diagrama de variație a suprapresiunii (fig. 10.1). Se dă $h = 2$ m și lungimea $l = 1{,}5$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Diagrama de variaţie în spaţiu a suprapresiunii are forma unei prisme triunghiulare de laturi l [m], h[m] şi γh[N/m²].

Valoarea forţei este proporţională cu volumul prismei, respectiv

$$F = \frac{1}{2}\gamma h^2 l.$$

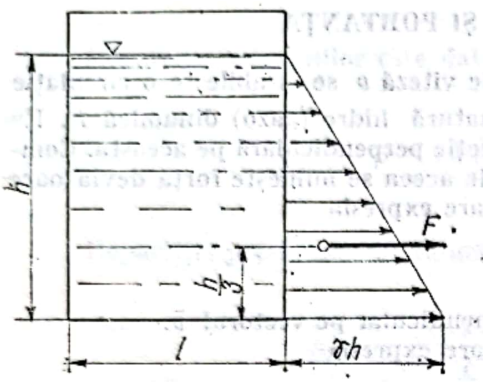


Fig. 10.1

Adîncimea centrului de presiune este adîncimea centrului de greutate al prismei, adică $2\frac{h}{3}$. Rezultă

$$F = \frac{1}{2}\cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 30\,000 \text{ N şi}$$

$$h_c = \frac{2h}{3} = \frac{2}{3}\,2 = 1{,}33 \text{ m}.$$

10.2. Să se determine forţa F_t necesară pentru ridicarea unei stavile plane, cunoscînd adîncimea $h = 1{,}5$ m (fig. 10.2), greutatea stavilei $G = 2500$ N, lăţimea ei $b = 3$ m şi coeficientul de frecare al stavilei pe ramă $\mu = 0{,}30$.

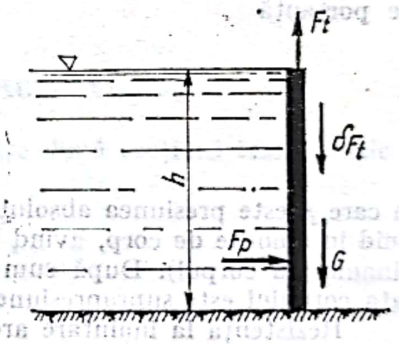


Fig. 10.2

Rezolvare. Forţa de suprapresiune este

$$F_p = \gamma A\, h_G = \gamma h b \frac{h}{2} = \gamma b \frac{h^2}{2};$$

rezultă pentru forţa de tracţiune

$$F_t = \mu F_p + G = \mu\gamma b \frac{h^2}{2} +$$

$$+ G = 0{,}3 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot \frac{1{,}5^2}{2} + 2500 = 12600 \text{ N}.$$

Observaţie. Dacă stavila plană este în contact etanş cu fundul bazinului pe o porţiune de arie A', la forţa de tracţiune F_t se adaugă forţa de presiune $\delta F_t = p_{at} A' k$, în care k este un coeficient ce exprimă imperfecţiunea etanşeităţii la contactul stavilei cu grinda de sprijin. De exemplu pentru $k = 0{,}7$ şi $A' = 0{,}01 \cdot 3$ m², se obţine

$$\delta F_t = 1{,}0332 \cdot 10^5 \cdot 0{,}03 . 0{,}7 = 2170 \text{ N}.$$

10.3. Pentru scurgerea lichidului dintr-un rezervor s-a amenajat o deschidere de formă pătrată, cu latura $l = 100$ mm, închisă cu o clapetă plană sub unghiul $\alpha = 45°$ (fig. 10.3). Să se determine forţa de tracţiune F_t din lanţul cu care se deschide clapeta, cunoscînd adîncimea centrului clapetei $h = 4$ m şi $\rho = 900$ kg/m³.

Rezolvare. Forţa de suprapresiune este

$$F = \gamma h_G A = \gamma l^2 h,$$

iar momentul acesteia în raport cu punctul O are expresia

$$\overline{M} = \overline{OC} \times \overline{F},$$

în care

$$OC = \frac{l}{2} + y_c - y_G = \frac{l}{2} + \frac{I_{G,x}}{y_G A} =$$

$$= = \frac{l}{2} + \frac{\frac{l^4}{12}}{l^2 h \sqrt{2}} = \frac{l}{2} + \frac{\frac{l^2}{12}}{h\sqrt{2}},$$

sau

$$M = \gamma h l^2 \left(\frac{l}{2} + \frac{l^2}{12 h \sqrt{2}} \right) = \frac{\gamma h l^3}{2} \left(1 + \frac{l}{6h\sqrt{2}} \right).$$

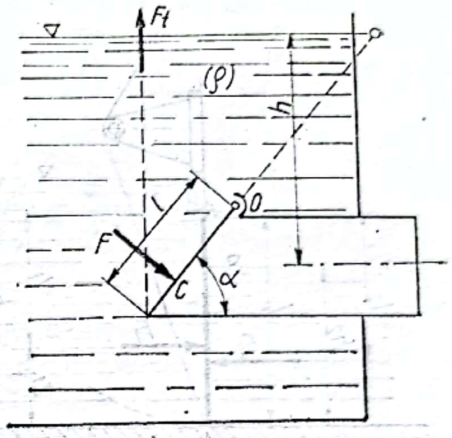


Fig. 10.3

Condiţia de deschidere este

$$F_t \cdot l \cos \alpha \geqslant M,$$

sau

$$F_t \geqslant \frac{M}{l \cos \alpha} = \frac{\gamma h l^2}{2 \cos \alpha} \left(1 + \frac{l}{6h\sqrt{2}} \right) = \frac{0{,}9 \cdot 10^4 \cdot 4.0{,}1^2}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{0{,}1}{6.4\sqrt{2}} \right) = 255 \text{ N}.$$

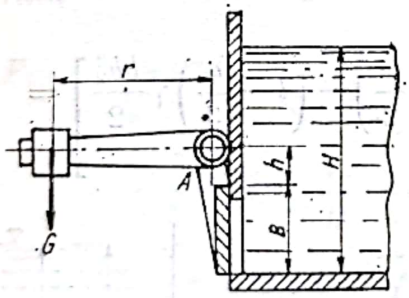


Fig. 10.4

10.4. Orificiul pătratic cu latura $B = 1$ m din peretele vertical al unui rezervor este închis cu o vană plană (fig. 10.4). Închiderea vanei este asigurată de greutatea G plasată la distanţa $r = 1{,}5$ m. Se cere să se determine mărimea greutăţii G necesară menţinerii apei în rezervor la nivelul $H = 2$ m, cunoscînd distanţa $h = 0{,}3$ m. Să se determine reacţiunea R din articulaţia A.

R. $G = 8360$ N; $R = 16.850$ N.

10.5. O vană plană dreptunghiulară de dimensiuni $b = 3$ m şi $l = 4$m separă apa din două rezervoare de adîncimi $h_1 = 5$ m şi $h_2 = 2$ m. Să se determine reacţiunea F_r din reazemul A, neglijîndu-se frecările (fig. 10.5).

Rezolvare. Forţele pe vană sînt

$$F_1 = \gamma A h_{G_1} = \gamma l b \left(h_1 - \frac{l}{2} \right),$$

$$F_2 = \gamma A h_{G_2} = \gamma \frac{b h_2^2}{2}.$$

Adîncimea centrului de presiune (punctul de aplicaţie al forţei)

$$h_{C_1} = h_{G_1} + \frac{I_{G,x}}{h_{G_1} A} = h_1 - \frac{l}{2} + \frac{\frac{bl^3}{12}}{\left(h_1 - \frac{l}{2}\right) bl} = h_1 - \frac{l}{2} + \frac{l^2}{12\left(h_1 - \frac{l}{2}\right)}.$$

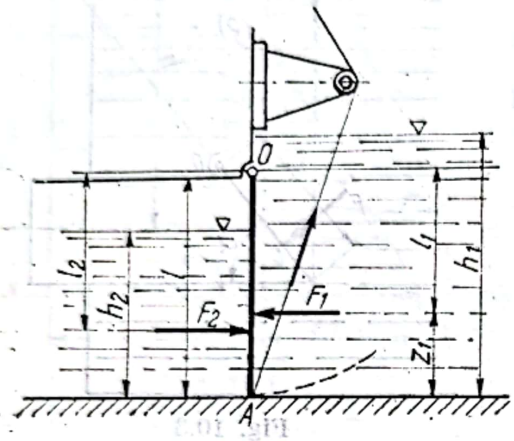


Fig. 10.5

Se defineşte cotele

$$z_1 = h_1 - h_{C_1} = \frac{l}{2} - \frac{l^2}{12\left(h_1 - \frac{l}{2}\right)};$$

$$l_1 = l - z_1 = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{12\left(h_1 - \frac{l}{2}\right)} =$$

$$= \frac{l}{6} \cdot \frac{3h_1 - l}{h_1 - \frac{l}{2}};$$

$$l_2 = l - h_{C_2} = l - \frac{h_2}{3}.$$

Luînd momentele în raport cu punctul O

$$F_r = l_1 F_1 - l_2 F_2,$$

rezultă

$$F_r = \frac{l_1 F_1 - l_2 F_2}{l} = \frac{1}{l}\left[\frac{l}{6} \cdot \frac{3h_1 - l}{h_1 - \frac{l}{2}} \gamma bl\left(h_1 - \frac{l}{2}\right) - \left(l - \frac{h_2}{3}\right)\gamma \frac{bh_2^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{\gamma b}{6}\left[l(3h_1 - l) - \frac{h_2^2}{l}(3l - h_2)\right] = \frac{10^4 \cdot 3}{6}\left[4(3{,}5 - 4) - \right.$$

$$\left. - \frac{2^2}{4}(3.4 - 2)\right] = 1{,}7 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

10.6. O clapetă dreptunghiulară de dimensiuni $b = 2$ m şi $l = 3$ m închide ieşirea apei dintr-un rezervor (fig. 10.6). Adîncimea marginii de jos a clapetei este $h = 4$ m. Să se determine: a) la ce adîncime h' trebuie situată axa O a clapetei, astfel ca momentul iniţial necesar pentru deschiderea clapetei să învingă numai frecările în articulaţia O; b) momentul de frecare M, diametrul axului fiind $d = 0{,}15$ m, iar coeficientul de frecare $\mu = 0{,}2$.

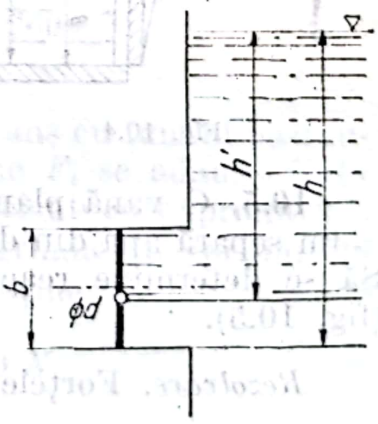


Fig. 10.6

Rezolvare. a) $h' = h_c$,

$$h' = h_c = h_G + \frac{I_{G,x}}{h_G A} = h - \frac{b}{2} + \frac{\frac{lb^3}{12}}{\left(h - \frac{b}{2}\right)bl} = \frac{2}{3}\frac{3h^2 + b^2 - 3bh}{2h - b} = 3{,}11 \text{ m.}$$

b) $M = F\mu\frac{d}{2}$,

$$M = F\mu\frac{d}{2} = \gamma A h_G \mu \frac{d}{2} = \gamma l b\left(h - \frac{d}{2}\right)\mu\frac{d}{2} = 10^4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot$$

$$\cdot\left(4 - \frac{2}{2}\right) 0{,}2\,\frac{0{,}15}{2} = 2700 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

10.7. Să se determine forţa care solicită îmbinarea fundului cu porţiunea laterală a unui recipient în forma unui trunchi de con (fig. 10.7), în care se păstrează mercur ($\rho = 13590$ kg/m^3), cunoscîndu-se : $R = 20$cm, $r = 10$ cm, $h = 40$ cm. Se vor considera două variante : a) vasul aşezat pe un plan orizontal ; b) vasul suspendat.

Rezolvare. a) Forţa verticală de suprapresiune împinge porţiunea laterală de jos în sus, iar mărimea ei este proporţională cu volumul corpului rotund a cărui secţiune meridiană este haşurată

$$F_h = \gamma\left[\pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(R^2 + rR + r^2)\right] =$$

$$= \gamma\frac{\pi h R^2}{3}\left(2 - \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right) =$$

$$= \frac{13{,}59 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2^2}{3}\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 28{,}500 \text{ N.}$$

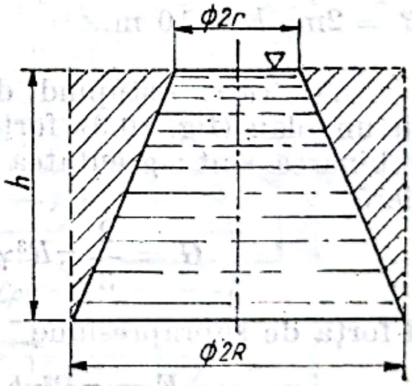


Fig. 10.7

b) Forţa verticală de suprapresiune împinge fundul în jos şi este

$$F_p = \pi R^2 \gamma h = \pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 13{,}59 \cdot 10^4 \cdot 0{,}4 = 6850 \text{ N.}$$

Se observă că forţa F_p este mai mare decît greutatea, ceea ce nu era evident la prima vedere (paradoxul hidrostatic).

10.8. Să se determine forţa de suprapresiune pe un capac emisferic şi centrul de presiune. Se dau raza capacului $R = 2$ m, adîncimea $h = 10$ m a centrului capacului şi $\rho_{apă} = 10^3$ kg/m^3 (fig. 10.8).

Rezolvare. Componenta orizontală este

$$F_x = \gamma \pi R^2 h,$$

iar componenta verticală se obține aplicînd principiul lui Arhimede

$$F_h = \frac{2}{3} \gamma \pi R^3$$

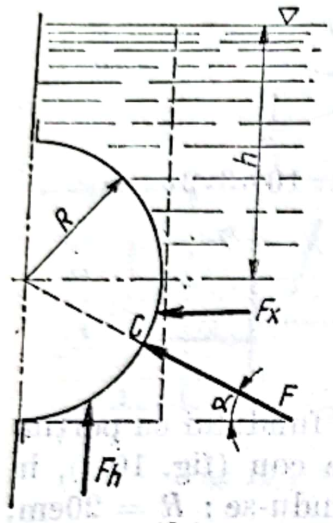


Fig. 10.8

Rezultanta este

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_h^2} = \gamma \pi R^2 \sqrt{h^2 + \frac{4}{9} R^2} =$$

$$= \pi \cdot 10^4 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{10^2 + \frac{4}{9} \cdot 4} = 1{,}265 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

Centrul de presiune este situat pe sferă, iar raza lui are înclinația dată de unghiul α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_h}{F_x} = \frac{2}{3} \frac{R}{H} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{10} = 0{,}133,$$

de unde rezultă

$$\alpha = 7°35'.$$

10.9. O deschidere circulară de diametru $2R$, în peretele înclinat cu 45° al unui rezervor, se închide cu o trapă emisferică. Să se determine componenta normală F_n și cea tangențială F_t ale forței de suprapresiune (necesare pentru dimensionarea îmbinării) și poziția centrului de presiune. Se dau: $R = 2\text{m}$, $h = 10$ m.

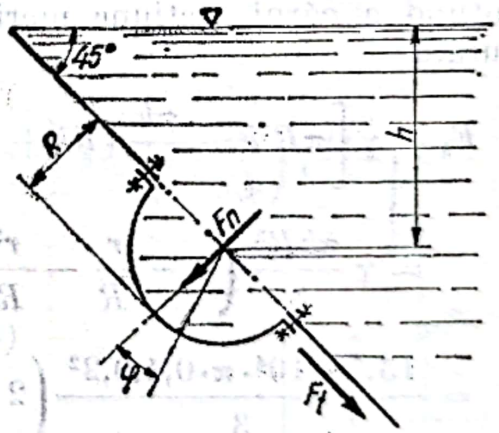


Fig. 10.9

Rezolvare. Astupînd deschiderea AB cu un plan (fig. 10.9), forțele care solicită îmbinarea sînt: greutatea apei din emisferă

$$G = \frac{2}{3} \pi R^3 \gamma$$

și forța de suprapresiune

$$F = \pi R^2 \gamma h$$

pe acest capac plan.

Deci forțele căutate sînt:

$$F_n = F + \frac{G}{\sqrt{2}} = \pi R^2 \gamma h + \frac{\sqrt{2}}{3} \pi R^3 \gamma = \gamma \pi R^2 \left(h + \frac{\sqrt{2}}{3} R \right) =$$

$$= 10^3 \cdot \pi \cdot 4 \left(10 + \frac{\sqrt{2}}{3} 2 \right) = 137 \text{ tf} = 1370 \text{ kN}.$$

$$F_t = \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi R^3 \gamma = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi \cdot 8 \cdot 10^3 = 11{,}8 \text{ tf} = 118 \text{ kN}.$$

Centrul de presiune se află pe raza de pantă

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_t}{F_n} = \frac{\gamma \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\pi R^3}{\gamma\pi R^2\left(h + \frac{\sqrt{2}}{3}R\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}R}{h + \frac{\sqrt{2}}{3}R} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3h}{R\sqrt{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{3.10}{2\sqrt{2}}} = 0{,}0862$$

de unde rezultă $\varphi \approx 5°$.

10.10. Un rezervor cilindric de rază $R = 1$ m, conține două lichide imiscibile : ulei rășinos, cu densitatea $\rho_1 = 870$ kg/m³ și apă, cu densitatea $\rho_2 = 1000$ kg/m³. Apa ocupă jumătatea inferioară a cilindrului, iar uleiul partea superioară, pînă la înălțimea $H = 3$ m (fig. 10.10). Să se calculeze rezultanta acțiunii celor două lichide pe capacul plan lateral și punctul ei de aplicație.

Rezolvare. Se calculează separat acțiunea fiecărui lichid. Pentru ulei rășinos, se adoptă sistemul de axe xOy, cu axa Ox conținută în planul

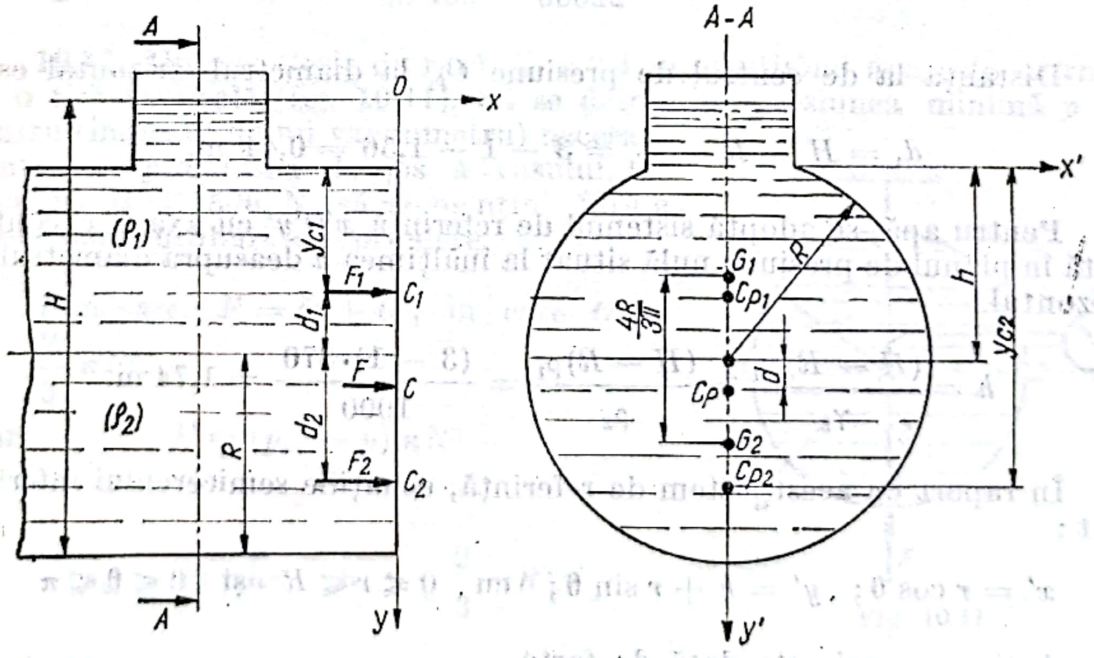


Fig. 10.10

suprafeței libere. Acțiunea uleiului pe semicercul superior este dată de forța

$$F_1 = \gamma_1\left(H - R - \frac{4R}{3\pi}\right)\frac{\pi R^2}{2} = 870 \cdot 9{,}81\left(3 - 1 - \frac{4.1}{3\pi}\right)\frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 22000\ \text{N},$$

aplicată pe diametrul vertical al capacului în punctul C_{p_1} de ordonată

$$y_{C_1} = \frac{I_{1x}}{S_1 y_{G_1}} = \frac{\gamma_1 I_{1x}}{F_1} = \frac{\rho_1 g I_{1x}}{F_1}.$$

Cu sistemul de axe ales, semicercul superior are ecuaţiile

$$x = r\cos\theta, \quad y = H - R + r\sin\theta, \text{ cu } 0 \leqslant r \leqslant R \text{ şi } -\pi \leqslant \theta \leqslant 0.$$

Rezultă :

$$I_{1x} = \int_{S_1} y^2\, dS_1 = \int_0^R \int_{-\pi}^0 (H - R + r\sin\theta)^2\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \pi R^2 \left[\frac{1}{2}(H-R)^2 - \frac{4R}{3\pi}(H-R) + \frac{R^2}{8}\right] = \pi \cdot 1^2 \left[\frac{1}{2}(3-1)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{4.1}{3\pi}(3-1) + \frac{1^2}{8}\right] = 4{,}01 \text{ m}^4$$

se obţine :

$$y_{C_1} = \frac{870 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}01}{22000} = 1{,}56 \text{ m}.$$

Distanţa la de centrul de presiune C_{p_1} la diametrul orizontal este

$$d_1 = H - R - y_{C_1} = 3 - 1 - 1{,}56 = 0{,}44 \text{ m}.$$

Pentru apă, se adoptă sistemul de referinţă $x'O'y'$ cu axa $O'x'$ conţinută în planul de presiune nulă situat la înălţimea h deasupra diametrului orizontal.

$$h = \frac{(H-R)\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{(H-R)\rho_1}{\rho_2} = \frac{(3-1)\cdot 870}{1000} = 1{,}74 \text{ m}.$$

În raport cu acest sistem de referinţă, ecuaţiile semicercului inferior sînt :

$$x' = r\cos\theta\,; \quad y' = h + r\sin\theta\,; \quad \text{cu} \quad 0 \leqslant r \leqslant R \quad \text{şi} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

Acţiunea apei este dată de forţa

$$F_2 = \gamma_2 y'_{G_2} S_2 = \rho_2 g \left(h + \frac{4R}{3\pi}\right) \frac{\pi R^2}{2} = 1000 \cdot 9{,}81 \left(1{,}74 + \frac{4.1}{3\pi}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 33.400 \text{ N},$$

Scanned with OKEN Scanner

aplicată în punctul C_{p_1} situat pe diametrul vertical la

$$y'_{C_2} = \frac{I_{2x'}}{S_2 y_{G_2}} = \frac{\gamma_2 I_{2x'}}{F_2} = \frac{\rho_2 g}{F_2}\int_{S_2} y'^2\,dS_2 = \frac{\rho_2 g}{F_2}\int_0^R\int_0^\pi (h + r\sin\theta)^2 r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{\rho_2 g}{F_2}\cdot\frac{\pi R^2}{2}\left(h^2 + \frac{8hR}{3\pi} + \frac{R^2}{2}\right) = \frac{1000\cdot 9{,}81}{33\,400}\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{2}\left(1{,}74^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{8\cdot 1{,}74\cdot 1}{3\pi} + \frac{1^2}{2}\right) = 2{,}32 \text{ m}.$$

Distanţa de la centrul de presiune C_{p_2} la diametrul orizontal este

$$d_2 = y'_{C_2} - h = 2{,}32 - 1{,}74 = 0{,}58 \text{ m}.$$

Forţa rezultantă

$$F = F_1 + F_2 = 22\,000 + 33\,400 = 55\,400 \text{ N}.$$

este aplicată în punctul C_p de pe diametrul vertical, a cărui distanţă faţă de diametrul orizontal este

$$d = \frac{1}{F}(d_2F_2 - d_1F_1) = \frac{1}{55\,400}(0{,}58\cdot 33\,400 - 0{,}44\cdot 22\,000) = 0{,}175 \text{ m}.$$

10.11. Un vas sferic de rază $R = 0{,}4$ m, conţinînd apă este atîrnat de o tijă verticală (fig. 10.11). Să se determine presiunea minimă p în centru (indicată de un vacuumetru) necesară pentru ca jumătatea de jos a vasului, de greutate $G = 1500$ N, să se menţină fără a fi necesare şuruburi de prindere.

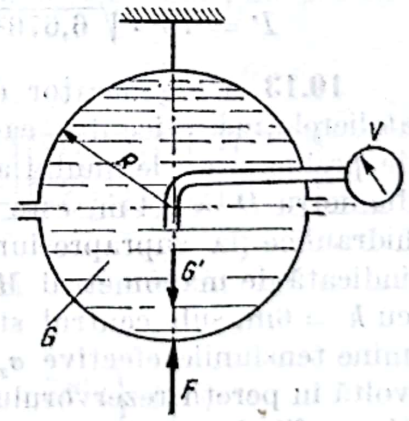


Fig. 10.11

Rezolvare. $F = G + G'$, în care $G' = \gamma\frac{2}{3}\pi R^3$.

Dar $F = (p_{at} - p)\,\pi R^2$

deci

$$(p_{at} - p)\,\pi R^2 = G + \gamma\frac{2}{3}\pi R^3,$$

de unde

$$p = p_{at} - \frac{G}{\pi R^2} - \frac{2}{3}\gamma R = 1{,}0332\cdot 10^5 - \frac{1500}{\pi\cdot 0{,}4^2} - \frac{2}{3}\cdot 10^4\cdot 0{,}4 = 0{,}9765\cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Depresiunea indicată de vacuumetrul V este $p_d = p_{at} - p = 1{,}0332\cdot 10^5 - 0{,}9765\cdot 10^5 = 5650$ N/m^2 $\cong$ 565 mm H_2O = 41,6 torr (mm Hg).

Scanned with OKEN Scanner

10.12. Să se determine forța de presiune care acționează pe jumătatea verticală a rezervorului din figura 10.12, cilindric vertical cu capac emisferic, cu lichide și gaz sub presiune, dacă se cunosc următoarele: presiunea gazului $p = 2$ at, înălțimile $h_1 = 4$ m., $h_2 = 2$ m, greutățile specifice $\gamma_1 = 0{,}85$ tf/m^3, $\gamma_2 = 1$ tf/m^3, diametrul $D = 4$ m, și raza semisferei $R = D/2 = 2$ m.

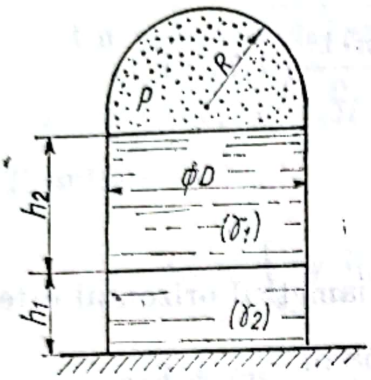


Fig. 10.12

Rezolvare. Forța de presiune ce solicită peretele curb reprezentat de semicilindrul și sfertul de sferă va fi dată de relația

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2},$$

unde

$$P_x = \left(\gamma_1 \frac{h_1}{2} + p\right) h_1 D + \left(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 \frac{h_2}{2} + p\right) h_2 D +$$

$$+ \frac{\pi R^2}{2} p = \left(850 \frac{4}{2} + 2.10^4\right) \cdot 44 + \left(850 \cdot 4 + 1000 \cdot \frac{2}{2} + 2 \cdot 10^4\right) \cdot 2 \cdot 4 +$$

$$+ \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \cdot 2 \cdot 10^4 = 6{,}676 \cdot 10^5 \text{ kgf} = 6{,}55 \cdot 10^6 \text{ N};$$

$$P_y = 0;$$

$$P_z = \frac{\pi R^2}{2} p = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot 2 \cdot 10^4 = 6{,}28 \cdot 10^4 \text{ kgf} = 6{,}16 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Cu aceste valori rezultă

$$P = 10^5 \cdot \sqrt{6{,}676^2 + 0{,}628^2} = 6{,}7 \cdot 10^5 \text{ kgf} = 6{,}57 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

10.13. Un generator de gaz utilizat la atelierele mecanice din cadrul combinatelor de prelucrare a lemnului are corpul sferic de diametru $D = 8{,}4$ m, este supus unei probe hidraulice la suprapresiunea $p_s = 2{,}4$ ats., indicată de manometrul M, care este montat cu $h = 6$m, sub centrul sferei. Să se determine tensiunile efective σ_x și σ_h care se dezvoltă în pereții rezervorului, forțele de tracțiune fiind orientate normal pe planurile diametrale orizontal și vertical. Grosimea peretelui este $s = 6$ mm.

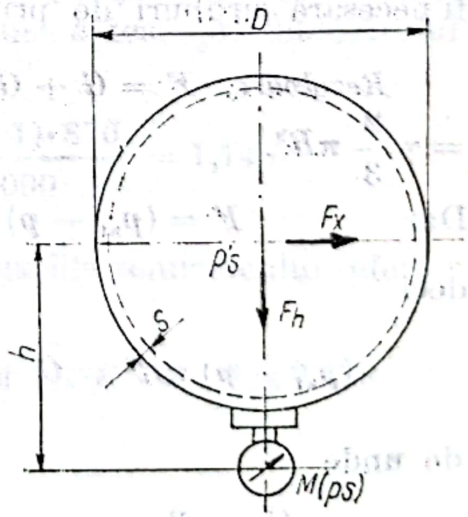


Fig. 10.13

Rezolvare. Suprapresiunea în centrul rezervorului fiind p_s' (fig. 10.13), se poate scrie

$$p_s = p_s' + \gamma h,$$

deci

$$p_s' = p_s - \gamma h,$$

de unde rezultă:

$$F_x = \frac{\pi D^2}{4} \cdot p_s' = \frac{\pi D^2}{4} (p_s - \gamma h);$$

$$\sigma_x = \frac{F \cdot x}{\pi D s} = \frac{D}{4s} (p_s - \gamma h) = \frac{8{,}4}{4 \cdot 0{,}006} (2{,}4 \cdot 10^4 - 10^3 \cdot 6) =$$

$$= 6{,}3 \cdot 10^6 \text{ daN/m}^2;$$

$$\sigma_x = 630 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{adm} = 800 \text{ daN/cm}^2;$$

$$F_h = \gamma V = \gamma \left[\frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{p_s'}{\gamma} - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right];$$

$$\sigma_h = \frac{F_h}{\pi D_s} = \frac{D}{4s} p_s' + \frac{D^2}{12 s} = \sigma_x + \frac{\gamma D^2}{12 s};$$

$$\sigma_h = 6{,}3 \cdot 10^6 + \frac{10^3 \cdot 8{,}4^2}{12 \cdot 0{,}006} = 7{,}28 \cdot 10^6 \text{ daN/m}^2 =$$

$$= 728 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{adm}.$$

Observație. S-a considerat cazul cînd greutatea γV se adaugă forței de suprapresiune $F_{p_s'}$.

10.14. Să se determine încărcarea specifică (forță pe unitatea de suprafață) pe care o poate asigura o plută din lemn de stejar, de grosime $h = 0{,}4$ m, cunoscînd densitatea relativă $\rho_r = \frac{\gamma_{stejar}}{\gamma_{apă}} = 0{,}9$ (fig. 10.14).

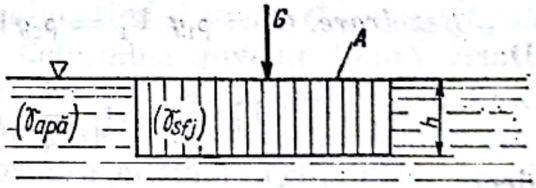


Fig. 10.14

Rezolvare. Dacă placa se afundă complet

$$G + \gamma_{stj.} Ah = \gamma_{apă} Ah,$$

de unde

$$G = (\gamma_{apă} - \gamma_{stj.}) Ah = \gamma_{apă} \left(1 - \frac{\gamma_{stj.}}{\gamma_{apă}} \right) Ah$$

și

$$\frac{G}{A} = \gamma_{apă} (1 - \rho_r) h = 10^3 (1 - 0{,}9) \cdot 0{,}4 = 40 \text{ daN/m}^2.$$

10.15. Pentru a se determina greutatea specifică a materialului lemnos, γ_m, din care a fost confecționată o piesă, ea a fost cîntărită în aer ($\gamma_{aer} = 1{,}2$ daN/m^3, în condițiile experienței) găsindu-se $G_1 = 3$ daN, apoi în apă (fig. 10.15), găsindu-se $G_2 = 0{,}273$ daN. Se cere γ_m.

Rezolvare. Forțele descensionale în aer și apă sînt respectiv

$$G_1 = (\gamma_m - \gamma_{aer})\, V_c \quad \text{și} \quad G_2 = (\gamma_m - \gamma_{apă}) \cdot V_c .$$

Din raportul lor

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma_m - \gamma_{aer}}{\gamma_m - \gamma_{apă}},$$

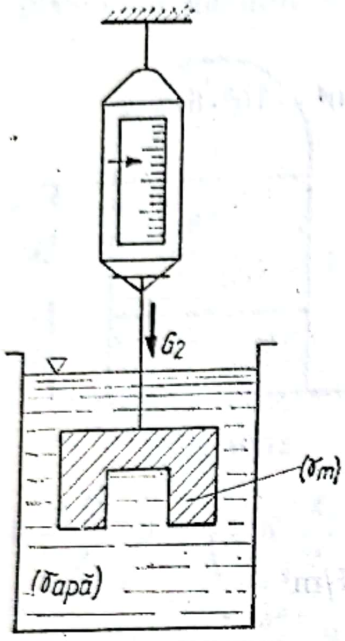


Fig. 10.15

rezultă

$$\gamma_m = \frac{G_1 \gamma_{apă} - G_2 \gamma_{aer}}{G_1 - G_2} = \frac{3 \cdot 10^3 - 0{,}273 \cdot 1{,}2}{3 - 0{,}273} =$$

$$= 1100 \text{ daN/m}^3$$

Observație. Avem de a face cu o piesă din lemn de stejar, cu $\gamma_m > \gamma_{apă}$.
— Termenul $G_2\, \gamma_{aer}$ este neglijabil în comparație cu $G_1\, \gamma_{apă}$.

10.16. Un areometru de masă $m = 100$ g, se afundă într-o soluție (extrase din vegetale, uleiuri răşinoase ş.a.) cu masa specifică $\rho_1 = 0{,}865 \text{ kg/dm}^3 = 0{,}865 \dfrac{g}{\text{cm}^3}$, pînă la nivelul A, iar în cazul $\rho_2 = 0{,}878 \text{ kg/dm}^3 = 0{,}878 \text{ g/cm}^3$ pînă la nivelul B (la 15°C). Să se determine distanța $AB = h$ (lungimea scării aparatului), cunoscînd diametrul părții cilindrice $d = 6$ mm (fig. 10.16).

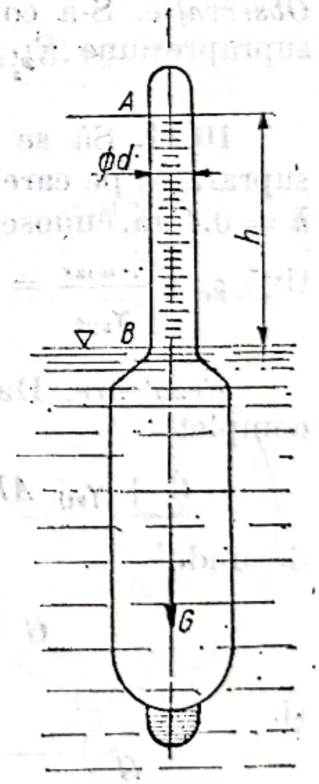


Fig. 10.16

Rezolvare. $G = \rho_1 g\, V_1 = \rho_2 g V_2$.

Dar

$$V_1 = V_2 + \frac{\pi d^2}{4} h,$$

deci

$$\rho_2 \left(V_1 - \frac{\pi d^2}{4} h \right) = \rho_1 V_1,$$

de unde

$$h = \frac{4 V_1}{\pi d^2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right).$$

Însă

$$V_1 = \frac{G}{\rho_1 g}$$

și rezultă

$$h = \frac{4G}{\pi d^2 \rho_1 g} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = \frac{4m}{\pi d^2 \rho_1} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = \frac{4 \cdot 100}{\pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}865} \left(1 - \frac{0{,}865}{0{,}878} \right) =$$

$$= 6{,}15 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.17. Pentru determinarea densității unui ulei răşinos se foloseşte un areometru format dintr-un tub de sticlă închis, de diametru $d = 10\,\text{mm}$ prevăzut la partea inferioară cu un mic rezervor sferic, de rază $R = 15\,\text{mm}$, în care se pun greutăţi (fig. 10.17). Introducînd areometrul în lichidul de densitate necunoscută, se constată că acesta se scufundă pînă la adîncimea $h = 20$ cm. Să se determine densitatea ρ a uleiului răşinos, ştiind că masa areometrului este $m = 26$ g.

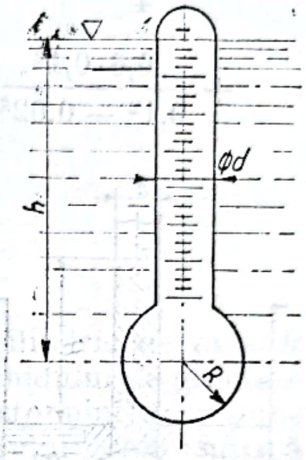


Fig. 10.17

Rezolvare. Poziţia de echilibru a areometrului este determinată de egalitatea dintre forţa portantă şi greutatea proprie

$$\rho g\left(\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{1}{4}\pi d^2 h\right) = mg.$$

Rezultă:

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{1}{4}\pi d^2 h} =$$

$$= \frac{26 \cdot 10^{-3}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}015^3 + \frac{1}{4}\pi \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}2} = 870 \text{ kg/m}^3$$

10.18. Pe fundul unui rezervor cu apă utilizat la fabricarea PFL, se află o vană cu diametrul $d = 2$ cm, fixată printr-o tijă de un plutitor cu diametrul $D = 10$ cm (fig. 10.18). Cunoscînd greutatea totală a plutitorului, tijei şi vanei $G = 100$ gf., să se determine nivelul limită H, la care începe deschiderea vanei. Lungimea tijei este $l = H - h = 60$ cm, grosimea ei fiind neglijabilă.

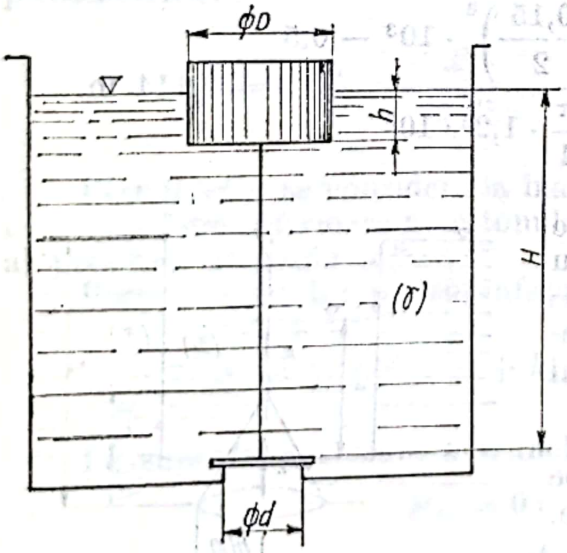


Fig. 10.18

Rezolvare. Forţa de suprapresiune pe vană este

$$F = \gamma H \frac{\pi d^2}{4},$$

iar deschiderea are loc în cazul limită cînd forţa F egalează forţa ascensională F_a, deci

$$\gamma \frac{\pi D^2}{4}(H - l) - G = H \frac{\pi d^2}{4}\gamma,$$

de unde rezultă

$$H = \frac{G + \gamma \frac{\pi D^2}{4} l}{\gamma \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)} = \frac{4G}{\gamma\pi(D^2 - d^2)} + \frac{lD^2}{D^2 - d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{1000 \cdot \pi(0{,}1^2 - 0{,}02^2)} +$$

$$+ \frac{0{,}6 \cdot 0{,}1^2}{0{,}1^2 - 0{,}02^2} = 0{,}63825 \text{ m}.$$

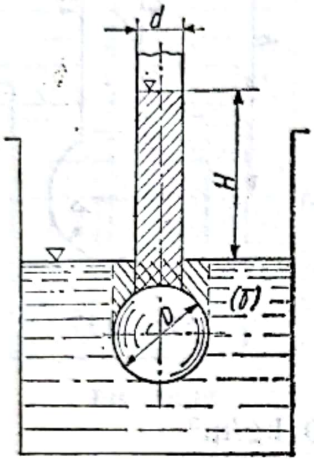


Fig. 10.19

10.19. În figura 10.19 este redat principiul de funcţionare a supapei sferice. O sferă cu diametrul $D = 150$ mm şi cu greutatea $G = 0{,}5$ daN, scufundată în apă, închide intrarea într-un tub interior cu diametrul $d = 100$ mm.

Să se determine diferenţa de nivel H la care bila permite intrarea apei din tubul interior în rezervor.

Rezolvare. Se aplică metoda haşurilor la stabilirea componentelor verticale a rezultantei presiunilor.

Condiţia de echilibru a ventilului sferic este

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \gamma = \frac{\pi d^2}{4} H\gamma + G,$$

de unde rezultă

$$H = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \gamma - G}{\frac{\pi d^2}{4}\gamma} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{0{,}15}{2}\right)^3 \cdot 10^3 - 0{,}5}{\frac{\pi}{4} \cdot 1{,}2^2 \cdot 10^3} = 0{,}114 \text{ m}.$$

10.20. Să se determine care este valoarea minimă a adîncimii z pentru care vana conică din figura 10.20 realizează închiderea orificiului, dacă nivelul în vas este h, iar greutatea conului este neglijabilă.

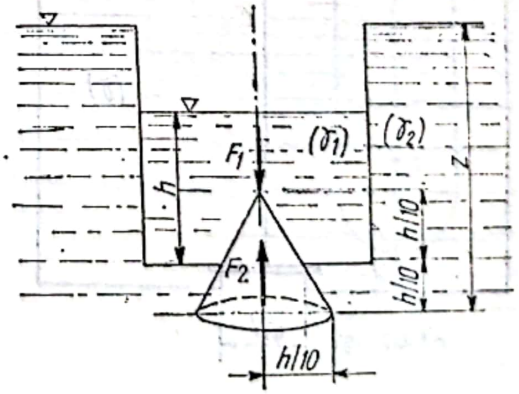


Fig. 10.20

Rezolvare. Forţele de presiune pe vană nu dau componente orizontale.

Forţele verticale sînt :

— în lichidul (γ_1)

$$F_1 = \gamma_1\left[\pi\left(\frac{h}{20}\right)^2 h - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{20}\right)^2 \frac{h}{10}\right] = \frac{29\pi\gamma_1 h^3}{12\,000}$$

Scanned with OKEN Scanner

orientată în jos;

— în lichidul (γ_2)

$$F_2 = \gamma_2 \left\{ \pi \left(\frac{h}{20} \right)^2 \left(z - \frac{h}{10} \right) + \frac{\pi}{3} \frac{h}{10} \left[\left(\frac{h}{10} \right)^2 + \left(\frac{h}{20} \right)^2 + \frac{h^2}{200} \right] \right\} =$$

$$= \frac{\pi \gamma_2 h^2}{400} \left(z + \frac{2h}{15} \right),$$

orientată în sus.

Egalînd cele două forţe rezultă

$$z_{\min} = \frac{h}{15} \left(\frac{29}{2} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 2 \right).$$

10.21. Orificiul de fund de rază r al unui vas cilindric de rază R este obturat de un con de greutate G. Pe suprafaţa lichidului de greutate specifică γ din vas se aplică forţa P prin intermediul pistonului de secţiune circulară cu raza R. Să se determine apăsarea ventilului conic (supapă unidirecţională) pe pereţii orificiului (locaşul ventilului) (fig. 10.21).

Rezolvare. În secţiunea A inferioară a pistonului, suprapresiunea este

$$P_A = \frac{P}{\pi R^2},$$

iar înălţimea de lichid echivalentă (sarcina piezometrică)

$$h_A = \frac{p_A}{\gamma} = \frac{P}{\gamma \pi R^2}.$$

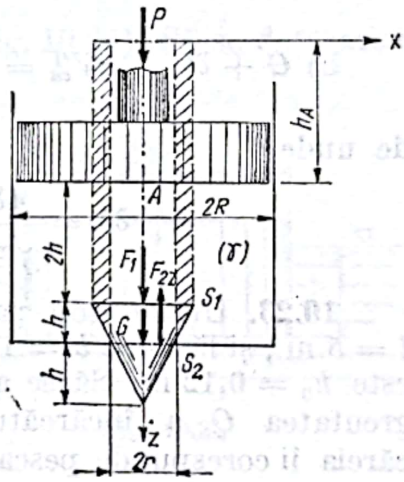


Fig. 10.21

Planul xOy se consideră la înălţimea h_A deasupra feţei inferioare a pistonului ca plan al presiunii atmosferice.

Forţa lichidului pe suprafaţa plană S_1 este:

$$F_1 = \gamma \pi (2r)^2 (2h + h_A) = 4 \gamma \pi r^2 \left(2h + \frac{P}{\gamma \pi R^2} \right).$$

Pe suprafaţa laterală a trunchiului de con udat se obţine:

$$F_{2x} = 0; \qquad F_{2y} = 0;$$

$$F_{2z} = -\gamma \left\{ \pi (2r)^2 (2h + h_A) + \frac{\pi h}{3} \left[(2r)^2 + r^2 + 2r \cdot r \right] - \pi r^2 (3h + h_A) \right\} =$$

$$= -\gamma \pi \left(8r^2 h + 4r^2 h_A + \frac{7}{3} r^2 h - 3r^2 h - r^2 h_A \right) = -\gamma \pi r^2 \left(\frac{22}{3} h + \frac{3P}{\gamma \pi R^2} \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Forţa totală de apăsare a conului pe orificiu este :

$$F = F_1 + G + F_{2z} = \frac{2}{3}\gamma\pi r^2 h + P\frac{r^2}{R^2} + G.$$

10.22. Un pod rotitor se sprijină pe un cilindru de diametru $D = 3{,}4$ m, care pluteşte într-o cameră cu apă (fig. 10.22). Să se determine :

a) pescajul h al plutitorului, cunoscînd greutatea proprie $G = 30$ tf $= 300$ kN.

b) creşterea pescajului δh, cînd podul este încărcat cu o sarcină $G = 10$ tf $= 100$ kN.

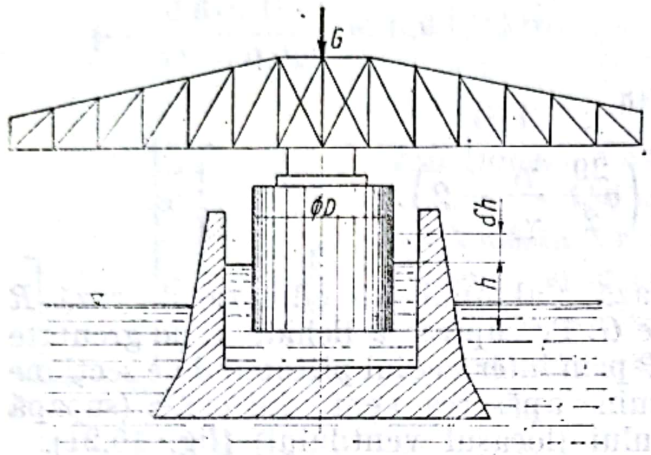


Fig. 10.22

Rezolvare. a) $G = \gamma V_{ca} = \gamma\dfrac{\pi D^2}{4}h,$

de unde

$$h = \frac{4G}{\gamma\pi D^2} = \frac{4\cdot 30\cdot 10^3}{10^3\cdot\pi\cdot 3{,}4^2} = 3{,}3 \text{ m}.$$

b) $G + \delta G = \gamma V'_{ca} = \gamma\dfrac{\pi D^2}{4}(h + \delta h),$

de unde

$$\delta h = \frac{4\delta G}{\gamma\pi D^2} = h\frac{\delta G}{G} = h\frac{10}{30} = 1{,}1 \text{ m}.$$

10.23. Un ponton paralelipipedic (o plută de lemn) are lungimea $l = 5$ m., şi lăţimea $b = 1{,}8$ m (fig. 10.23). Pescajul pontonului neîncărcat este $h_0 = 0{,}12$ m. Să se afle greutatea Q a încărcăturii căreia îi corespunde pescajul $h = 0{,}6$ m şi să se studieze stabilitatea echilibrului. Centrul de greutate G al pontonului încărcat se găseşte la distanţa $h' = 0{,}5$ m de baza pontonului.

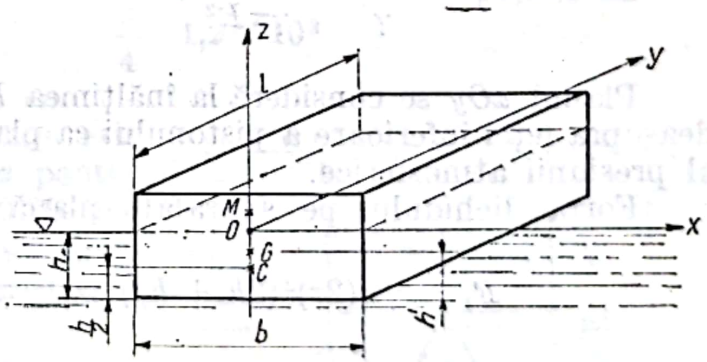


Fig. 10.23

Rezolvare. Greutatea proprie G a pontonului este egală cu portanţa apei corespunzătoare pescajului h_0

$$G = \gamma l b h_0 = 9{,}81\cdot 10^3\cdot 5\cdot 1{,}8\cdot 0{,}12 = 10\,600 \text{ N}.$$

Portanţa corespunzătoare pescajului h este

$$P = \gamma l b h = 9{,}81\cdot 10^3\cdot 5\cdot 1{,}8\cdot 0{,}6 = 53\,000 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiţia de plutire a pontonului încărcat este

$$Q = P - G = 53 \cdot 10^3 - 10{,}6 \cdot 10^3 = 42{,}4 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Distanţa metacentrică CM dintre centrul de carenă C şi metacentrul M este

$$CM = \frac{I_y}{V_c} = \frac{\frac{lb^3}{12}}{lbh} = \frac{b^2}{12h} = \frac{1{,}8^2}{12 \cdot 0{,}6} = 0{,}45 \text{ m}.$$

Distanţa dintre centrul de carenă C şi baricentrul G este

$$CG = h' - \frac{h}{2} = 0{,}5 - \frac{0{,}6}{2} = 0{,}2 \text{ m}.$$

Echilibrul este stabil, deoarece este îndeplinită condiţia

$$CM > CG.$$

10.24. În apă pluteşte o rondelă de lemn, avînd densitatea relativă $\rho_r = \frac{\gamma_{lemn}}{\gamma_{apă}} = 0{,}8$, de înălţime h şi diametru d (fig. 10.24). Să se determine la ce valoare a raportului $\frac{d}{h}$ el îşi pierde stabilitatea în poziţia cu axa verticală.

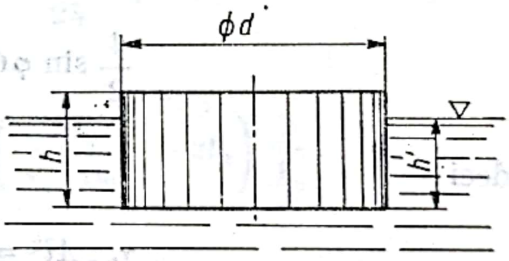


Fig. 10.24

Rezolvare. Distanţa metacentrică este

$$d_m = \frac{I_i}{V_{ca}} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4} h'} = \frac{d^2}{16h'}.$$

Din condiţia de plutire rezultă

$$\frac{h'}{h} = \frac{\gamma_{lemn}}{\gamma_{apă}} = \rho_r, \quad h' \text{ fiind pescajul.}$$

Condiţia de stabilitate la limită este

$$C_s = \frac{d_m}{c} = 1, \quad \text{cu} \quad c = \frac{h - h'}{2}$$

Rezultă

$$C_s = \frac{\frac{d^2}{16h'}}{\frac{h - h'}{2}} = \frac{d^2}{8h'(h - h')} = \frac{d^2}{8h^2 \rho_r (1 - \rho_r)} = 1$$

și

$$\frac{d}{h} = \sqrt{8\rho_r(1-\rho_r)} = \sqrt{8 \cdot 0{,}8(1-0{,}8)} = 1{,}13.$$

Deci plutirea verticală este stabilă pentru $\frac{d}{h} \geqslant 1{,}13$. Dacă nu se respectă condiția impusă, echilibrul stabil poate fi asigurat pentru plutirea orizontală (axa rondelei orizontală).

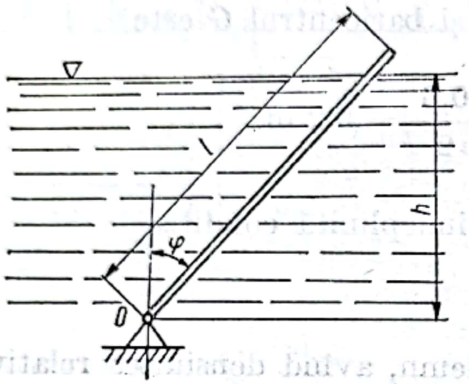


Fig. 10.25

10.25. O bară omogenă din lemn de fag având greutatea specifică $\gamma_{fag} = 0{,}85$ daN/dm³, de lungime l și de secțiune constantă A (fig. 10.25), plutește în apă, iar partea inferioară a barei este articulată în O la adîncimea h. Pentru $h/l = 0{,}65$ să se determine: a) unghiul de înclinare φ corespunzător echilibrului stabil al barei; b) reacțiunea din articulație în poziția de echilibru; c) valoarea raportului l/h astfel ca bara să fie verticală ($\varphi = 0$).

Rezolvare. Egalînd momentele în raport cu articulația O

$$\frac{l}{2}\sin\varphi\, G = \frac{h\sin\varphi}{2\cos\varphi}\,\gamma V_{ca},$$

deci

$$\gamma_{fag} A l^2 = \gamma_{apă} A \left(\frac{h}{\cos\varphi}\right)^2,$$

de unde se obține

$$\cos\varphi = \frac{h}{l}\sqrt{\frac{\gamma_{apă}}{\gamma_{fag}}} = 0{,}65\sqrt{\frac{1}{0{,}85}} = 0{,}707 \quad \text{și} \quad \varphi = 45°.$$

b) $$F_r = \gamma V_{ca} - G = A\left(\frac{\gamma_{apă} h}{\cos\varphi} - \gamma_{fag} l\right) = A\,\gamma_{apă} l\left(\frac{\frac{h}{l}}{\cos\varphi} - \frac{\gamma_{fag}}{\gamma_{apă}}\right) =$$

$$= A\gamma_{apă} l\left(\frac{0{,}65}{0{,}707} - 0{,}85\right) = 70\, Al\ [\text{daN}].$$

c) Se pune condiția $\cos\varphi = 1$, de unde $\frac{l}{h} \leqslant \sqrt{\frac{\gamma_{apă}}{\gamma_{fag}}} = 1{,}085.$

Scanned with OKEN Scanner

10.26. Să se determine variaţia pescajului unui ponton prismatic, cu secţiunea trapezoidală (fig. 10.26, *a*), în funcţie de greutate, care variază de la 6 la 7 tf., pescajul iniţial fiind $h_0 = 1$ m, lungimea pontonului $l = 3$m, lăţimea la fund $b_1 = 1{,}6$ m. Greutatea specifică a apei (de mare) se va lua $\gamma_{apă} = 1026$ daN/m³.

Rezolvare. Notînd cu b_0 lăţimea maximă a carenei la pescajul h_0, greutatea iniţială este

$$G_0 = \gamma_{apă}\, l \frac{h_0}{2}(b_0 + b_1),$$

de unde se obţine

$$b_0 = \frac{2G_0}{\gamma_{apă}\, l h_0} - b_1.$$

Pentru o greutate oarecare G rezultă

$$G = \gamma_{apă}\, l \frac{h}{2}(b + b_1),$$

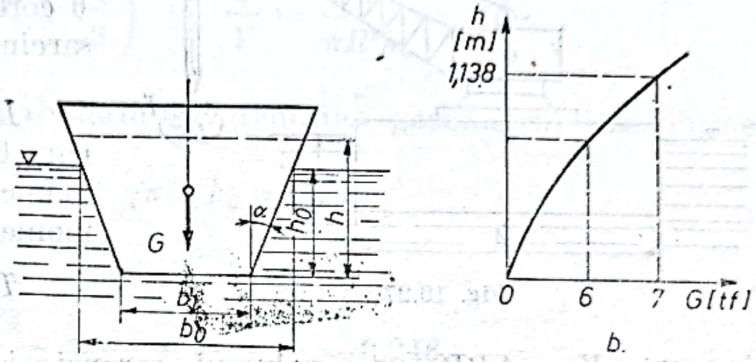


Fig. 10.26

în care b este lăţimea maximă a carenei la pescajul h.

Din relaţiile evidente

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_0 - b_1}{2h_0} = \frac{b - b_1}{2h},$$

Se deduce

$$b = b_1 + (b_0 - b_1)\frac{h}{h_0} = b_1 + \left(\frac{2G_0}{\gamma_{apă}\, l h_0} - 2b_1\right)\frac{h}{h_0},$$

deci

$$G = \gamma_{apă}\, lh\left[b_1 + \left(\frac{G_0}{\gamma_{apă}\, l h_0} - b_1\right)\frac{h}{h_0}\right].$$

Efectuînd calculele numerice, ecuaţia parabolei se scrie

$$G = 1026 \cdot 3.1\left[1{,}6 + \left(\frac{6000}{1026 \cdot 3.1} - 1{,}6\right)\frac{h}{1}\right]h = 4920\ h + 1080\ h^2\ [\text{daN}] =$$

$$= 4{,}92\ h + 1{,}08\ h^2\ [\text{tf}].$$

Curba $G(h)$ este o parabolă care trece prin origine (fig. 10.26, *b*). Pentru $G = 7$ tf se obţine

$$1{,}08 \cdot h^2 + 4{,}92\ h - 7 = 0,$$

de unde $h = 1{,}138$ m, deci

$$\delta h = h - h_0 = 1{,}138 - 1 = 0{,}138 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.27. Pe un şlep cu secţiunea orizontală dreptunghiulară $AXB = 60 \times 10$ [m²] şi pescajul $H = 1{,}5$ m, este instalată o macara pentru ridicat buşteni, capabilă să ridice o greutate $T = 5$ tf $= 49 \cdot 10^3$N la o deschidere a braţului $L = 15$ m. Distanţa dintre centrul de greutate al ambarcaţiunii şi centrul de carenă este $a = 3{,}5$ m. Să se determine unghiul de înclinare θ corespunzător macaralei sub sarcină (fig. 10.27).

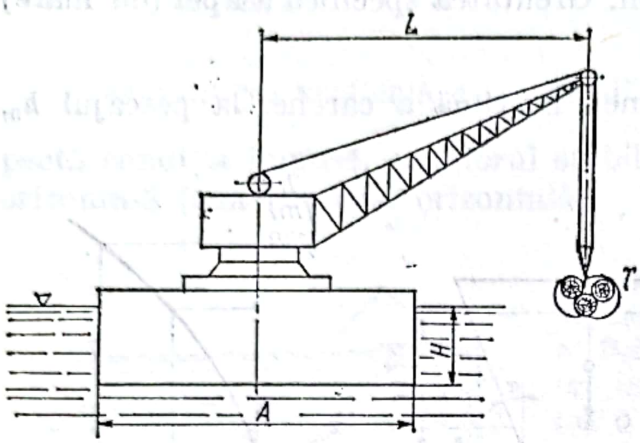


Fig. 10.27

Rezolvare. Unghiul de înclinare θ se deduce din egalitatea momentului de răsturnare cu momentul de restabilire

$$TL \cos\theta = \gamma V d \sin\theta,$$

în care $V = ABH$ este volumul carenei, iar

$$d = \frac{I_0}{V} - a = \frac{BA^3}{12} \cdot \frac{1}{ABH} - a$$

este distanţa metacentrică

Rezultă :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{TL}{\gamma V d} = \frac{12\,TL}{\gamma AB(A^2 - 12\,aH)} = \frac{12 \cdot 49 \cdot 10^3 \cdot 15}{9810 \cdot 60 \cdot 10 \cdot (60^2 - 12 \cdot 3{,}5 \cdot 1{,}5)} =$$

$$= 0{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\, 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}028°$$

10.28. Un gazometru cilindric (fig. 10.28) care are raza $R = 3{,}6$ m şi înălţimea $H = 2{,}5$ m., este umplut cu gaz la presiunea atmosferică şi apoi scufundat, cu gura deschisă, în apă. Prin slăbirea cablului, gazometrul coboară în apă cu distanţa h_0. Dacă greutatea proprie a gazometrului este $G = 10$ tf, iar centrul de greutate se află la $h = 1{,}78$ m, se cere să se verifice dacă este îndeplinită condiţia de stabilitate la plutire. În calcule se va neglija volumul de apă dislocuit de pereţii gazometrului.

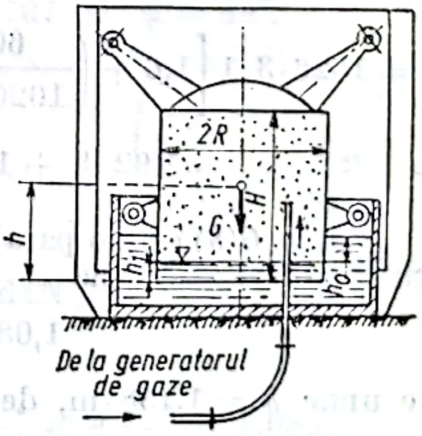


Fig. 10.28

Rezolvare. Condiţia de stabilitate se poate scrie sub forma

$$a < \frac{I_0}{V},$$

în care a este distanţa dintre centrul de carenă şi centrul de greutate;

I_0 — momentul de inerţie al suprafeţei de plutire în raport cu axul de oscilaţie;

V — volumul carenei.

Este evident că:

$$a = h - \left(h_1 + \frac{h_0}{2}\right) \quad \text{şi} \quad \frac{I}{V} = \frac{\frac{\pi R^2}{4}}{\pi R^2 h_0} = \frac{1}{4h_0}.$$

Egalînd forţa de flotabilitate cu greutatea gazometrului se obţine

$$\gamma V = \gamma \pi R^2 h_0 = G,$$

din care rezultă

$$h_0 = \frac{G}{\gamma \pi R^2} = \frac{10^4}{10^3 \cdot \pi \cdot 3{,}6^2} = 0{,}246 \text{ m}.$$

Legea transformării izoterme este

$$p_1 \pi R^2 (H - h_1) = p_0 \pi R^2 H.$$

Din relaţia

$$p_1 - p_0 = \gamma h_0 = \frac{G}{\pi R^2},$$

rezultă

$$h_1 = \frac{p_1 - p_0}{p_1} H = \frac{\gamma h_0}{p_1} H = \frac{\gamma h_0}{p_0 + \gamma h_0} H =$$

$$= \frac{10^3 \cdot 0{,}246}{1{,}0332 \cdot 10^4 + 10^3 \cdot 0{,}246} \cdot 2{,}5 = 0{,}058 \text{ m}.$$

Cu acestea, se obţine

$$a = 1{,}78 - 0{,}058 - \frac{0{,}246}{2} = 1{,}6 \text{ m}.$$

valoare care, comparată cu valoarea

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{4h_0} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}246} = 1{,}015$$

arată că stabilitatea nu este asigurată.

Scanned with OKEN Scanner

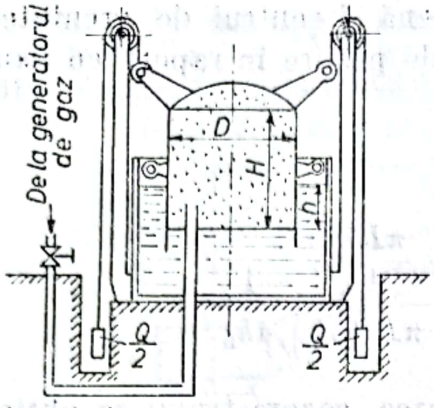


Fig. 10.29

10.29. Un rezervor pentru gaz, cu greutatea de 400 kN, are diametrul $D=12{,}5$ m și înălțimea $H=4{,}5$ m (fig. 10.29). Densitatea gazului este $\rho = 0{,}57$ kg/m^3.

Să se determine contragreutatea totală Q necesară pentru a crea gazului o presiune de 2 kN/m^2; care este denivelarea h a apei corespunzătoare acestei presiuni?

R. $Q = 390$ kN; $h = 0{,}2$ m.

10.30. Un plutitor paralelipipedic (o plută de lemn, o grindă de lemn, un ponton etc.) are lățimea $2b$ și pescajul h_0 (fig. 10.30). Să se găsească, în cazul oscilațiilor transversale, ecuațiile curbei de carenă și a curbei metacentrice. Se va verifica dacă intersecția curbei metacentrice cu axa de plutire (metacentrul principal M) se află față de centrul de carenă C la distanța rezultată din teorema metacentrului.

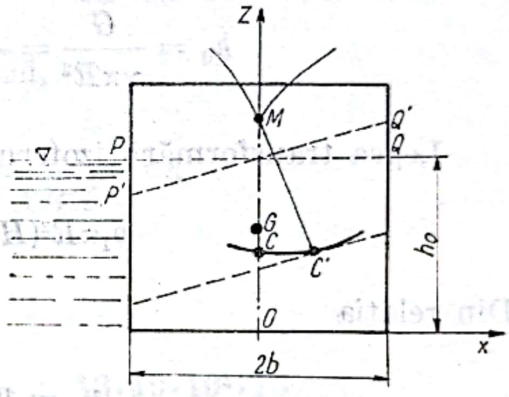


Fig. 10.30

Rezolvare. Se consideră secțiunea transversală medie a plutitorului și sistemul de axe rigid legat de plutitor.

Fie un plan de plutire oarecare $P'Q'$ de ecuație

$$z = h_0 + \lambda x.$$

Centrul de carenă corespunzător are coordonatele

$$x_{C'} = \frac{1}{A}\int_{ABP'Q'} x\,\mathrm{d}A\,; \qquad z_{C'} = \frac{1}{A}\int_{ABP'Q'} z\,\mathrm{d}A,$$

în care $A = 2bh_0$.

$$\int_{ABP'Q'} x\mathrm{d}A = \int_{-b}^{b} x\,\mathrm{d}x \int_{0}^{h_0+x\lambda} \mathrm{d}z = \int_{-b}^{b} (h_0 + \lambda x)\,x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\lambda b^3,$$

$$\int_{ABP'Q'} z\,\mathrm{d}A = \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \int_{0}^{h_0+\lambda x} z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} (h_0 + \lambda x)^2\,\mathrm{d}x = b\left(h_0^2 + \frac{\lambda^2 b^2}{3}\right).$$

Rezultă

$$x_{C'} = \frac{1}{3}\lambda\frac{b^2}{h_0}, \qquad z_{C'} = \frac{1}{2}\left(h_0 + \frac{\lambda^2}{3}\frac{b^2}{h_0}\right).$$

Eliminînd parametrul λ, rezultă ecuația curbei de carenă, în care $x_{C'}$ și $z_{C'}$, se notează simplu cu x și z:

$$z = \frac{h_0}{2}\left(1 + \frac{3x^2}{b^2}\right). \qquad (10.30.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică pentru $x = 0$, că

$$z = \frac{h_0}{2} = z_c.$$

Curba metacentrică se obţine ducînd normale la curba de carenă şi luînd înfăşurătoarea lor. Din ecuaţia (10.30.1) coeficientul unghiular al tangentei duse într-un punct oarecare este

$$k = \frac{dz}{dx} = \frac{h_0}{2}\,\frac{3}{b^2}\,2x = \frac{3h_0}{b^2}\,x.$$

Normala la curba de carenă are coeficientul unghiular

$$k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{b^2}{3h_0 x}.$$

Ecuaţia normalelor este

$$z - \beta = -\frac{b^2}{3h_0 x}(x - \alpha), \qquad (10.30.1')$$

unde α şi β verifică ecuaţia (10.30.1), deci,

$$\beta = \frac{h_0}{2}\left(1 + \frac{3\alpha^2}{b^2}\right). \qquad (10.30.1'')$$

Înlocuind (10.30.1'') în (10.30.1'), se obţine :

$$z - \frac{h_0}{2}\left(1 + \frac{3\alpha^2}{b^2}\right) + \frac{b^2}{3h_0 x}(x - \alpha) = F(x, y, \alpha) = 0; \qquad (10.30.2)$$

$$F'_\alpha = -\frac{h_0}{2}\,\frac{3}{b^2}\,2\alpha - \frac{b^2 x}{3h_0\alpha^2} = 0. \qquad (10.30.3)$$

Se elimină parametrul α între (10.30.2) şi (10.30.3) şi se obţine curba metacentrică (10.30.4).

Din (10.30.3),

$$\alpha^3 = -\frac{b^4 x}{9h_0^2}, \qquad \text{deci} \quad \alpha = -b\sqrt[3]{\frac{bx}{9h_0^2}}.$$

Înlocuind expresia obţinută în (10.30.2), se determină prin calcul ecuaţia

$$z - \frac{h_0}{2}\left(1 + \sqrt[3]{\frac{b^2x^2}{3}}\right) - \frac{b}{3h_0}\sqrt[3]{\frac{9h_0^2}{bx}}\left(x + b\sqrt[3]{\frac{bx}{9h_0^2}}\right) \qquad (10.30.4)$$

Scanned with OKEN Scanner

Distanţa OM la metacentrul principal M este ($x = 0$):

$$Z_M = \frac{h_0}{2} + \frac{b^2}{3h_0}$$

şi deci rezultă distanţa metacentrică

$$CM = Z_M - \frac{h_0}{2} = \frac{b^2}{3h_0}.$$

Din teorema metacentrului, l fiind lungimea plutitorului ($l > 2b$), rezultă:

$$CM = \frac{I'_y}{V_c} = \frac{\frac{l(2b)^3}{12}}{l\,2bh_0} = \frac{b^2}{3h_0},$$

adică aceeaşi valoare dedusă din ecuaţia (10.30.4).

10.31. Să se studieze legea de repartiţie a presiunilor şi forma suprafeţei libere a lichidului γ conţinut într-un recipient cilindric care se roteşte în jurul unei axe orizontale cu viteză unghiulară constantă ω (fig. 10.31) după stabilirea echilibrului relativ (se neglijează greutatea lichidului în raport cu forţa centrifugă).

Rezolvare. Se scrie ecuaţia de echilibru a unui volum elementar de lichid a cărui suprafaţă de bază este egală cu dS şi înălţime dr, dirijată în lungul unei raze, asupra căruia se exercită forţa de presiune şi forţa centrifugă.

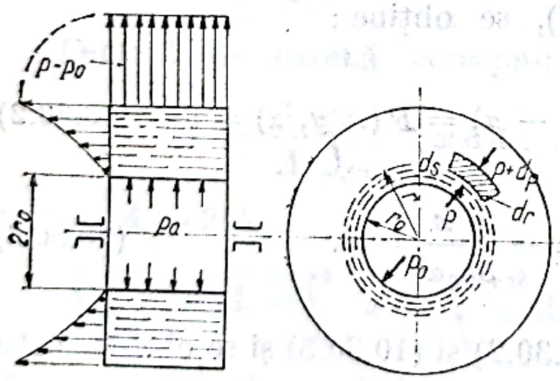


Fig. 10.31

Dacă se notează cu p, presiunea care acţionează în centrul suprafeţei dS la o distanţă r de axa de rotaţie şi cu $p + dp$ presiunea care acţionează în centrul bazei opuse a volumului de lichid considerat la o distanţă $r + dr$ de axa de rotaţie, ecuaţia de echilibru pe direcţia radială este

$$p\,dS - (p + dp)\,dS + \rho\omega^2 r\,dr\,dS = 0$$

sau

$$dp = \rho\omega^2 r\,dr.$$

După integrare, se obţine:

$$p = \rho\omega^2 \frac{r^2}{2} + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea constantei de integrare C se face punînd condiţia ca $p = p_0$, cînd $r = r_0$; deci

$$C = p_0 - \rho\omega^2 \frac{r_0}{2}.$$

Se obţine legea de repartiţie a presiunilor $p = p(r)$ sub forma

$$p = p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - r_0^2).$$

Este evident că în acest caz suprafeţele echipotenţiale, deci şi suprafaţa liberă a lichidului după stabilirea echilibrului relativ (de rază r_0 şi pe care se exercită presiunea p_0) sînt suprafeţe cilindrice circulare cu axa comună, care este axa de rotaţie a lichidului. Acest sistem se utilizează la unele maşini de separat pasta de lemn din emulsiile pastă-apă.

10.32. Un vas cilindric cu diametrul $D = 2H = 200$ mm este plin cu apă şi este închis cu un capac (fig. 10.32) în centrul căruia se află un orificiu. Să se determine forţa ce solicită fundul vasului şi cea care solicită capacul, dacă vasul se roteşte în jurul axei verticale cu turaţia $n = 3000$ rot/min.

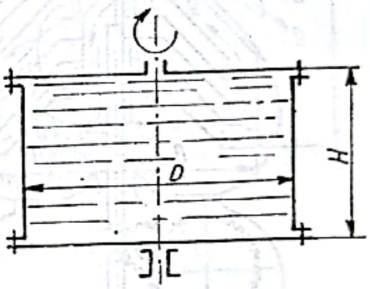


Fig. 10.32

Rezolvare. Ţinînd seama că pe un element de suprafaţă inelară presiunea se poate considera constantă, forţa de presiune pe acest element de suprafaţă va fi

$$dP = \gamma\left(z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) 2\pi r\, dr$$

şi, mai departe

$$P = 2\pi\gamma \int_{R_1}^{R_2} \left(z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) r\, dr.$$

Pentru fundul vasului $z_0 = H$ şi deci

$$P_1 = 2\pi\gamma \int_0^{D/2} \left(H + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) r\, dr = 2\pi\gamma \left[\frac{D^2}{8} + \frac{\omega^2 D^4}{8 \cdot 16 \cdot g}\right] =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 10^4 \left[\frac{0{,}2^2}{8} + \frac{\left(\frac{\pi \cdot 3\,000}{30}\right)^2 \cdot 0{,}2^4}{8 \cdot 16 \cdot 9{,}81}\right] = 8\,020 \text{ N}.$$

Pentru capac, $z = 0$, şi

$$P_2 = 2\pi\gamma \int_0^{D/2} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) r\, dr = \frac{2\pi\gamma\, \omega^2 D^4}{8 \cdot 16 \cdot g} = \frac{2\pi \cdot 10^4 \left(\frac{\pi \cdot 3\,000}{30}\right)^2 \cdot 0{,}2^4}{8 \cdot 16 \cdot 9{,}81} = 7\,700 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.33. În cazul unui separator centrifug avînd diametrul vasului $D = 300$ mm și adîncimea $h = 500$ mm (fig. 10.33), s-a stabilit din condiția de rezistență că presiunea relativă maximă nu trebuie să depășească 10 000 N/m². Se cere să se determine turația maximă admisibilă a vasului în cazul unui ulei rășinos extras din cetină de brad avînd densitatea $\rho = 0{,}87$ kg/m³.

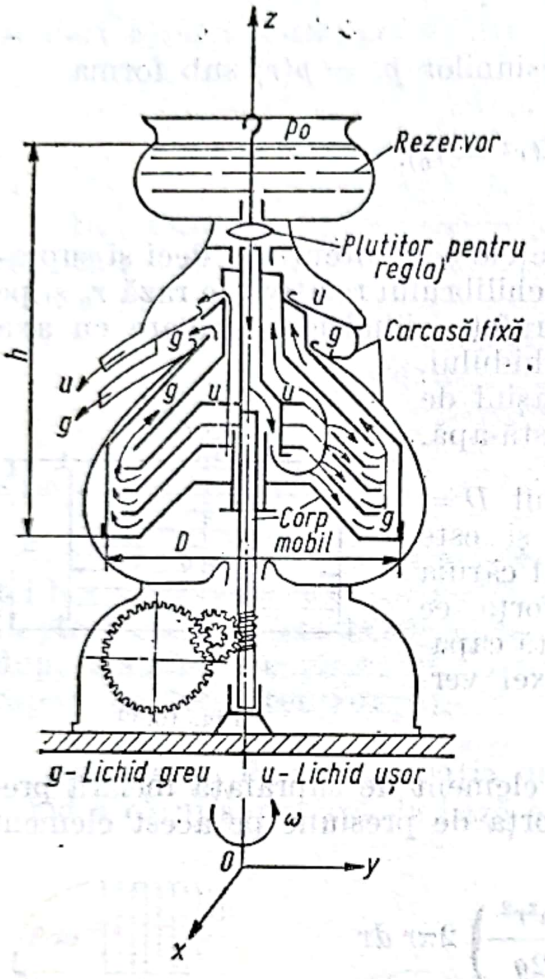


Fig. 10.33

Rezolvare. Relația generală a echilibrului relativ în cazul unui vas cilindric în rotație devine

$$p = \rho\left(gz - \frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = C.$$

În punctul O, caracterizat prin $r = 0$, $z = h$ și $p = p_0$ rezultă:

$$C = p_0 + \rho g h.$$

Prin urmare

$$p = p_0 + \rho g\left(h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right).$$

Se constată că presiunea este maximă în punctul $(z = 0,\ r = R)$:

$$p_{max} - p_0 = \rho\, gh + \frac{\rho\omega^2 R^2}{2}.$$

Turația corespunzătoare presiunii maxime admise este

$$n = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30}{\pi R}\sqrt{2\frac{p_{max} - p_0}{\rho} - 2gh} = \frac{30}{\pi \cdot 0{,}15}\sqrt{2\frac{10^4}{0{,}87} - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5} =$$

$$= 9\,660 \text{ rot/min}.$$

10.34. O garnitură hidraulică, pentru etanșarea arborelui unui compresor de aer, are un disc-rotor care se mișcă într-o cuvă cu apă (fig. 10.34). Diametrul inelului de apă în contact cu atmosfera este $D = 0{,}3$ m, presiunea uleiului în carter este $p = 0{,}7$ ata, turația arborelui este $n = 2\,000$ rot/min, iar diametrul arborelui este $d = 0{,}15$ m. Viteza unghiulară de rotație a apei este jumătate din

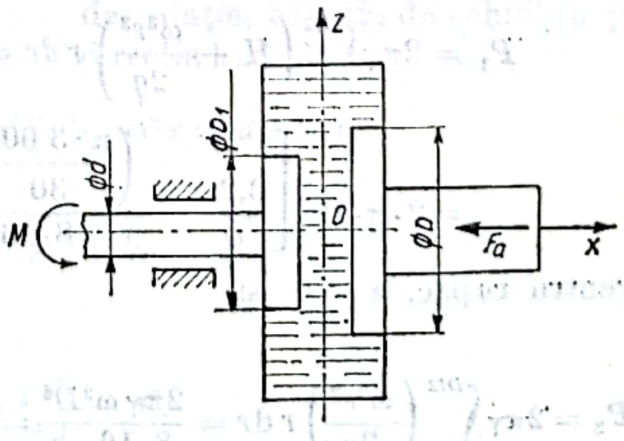


Fig. 10.34

cea a arborelui. Să se determine forţa axială de presiune, diametrul D_1 al inelului de lichid în contact cu aerul comprimat şi excentricitatea lui.

Rezolvare. La rotaţia în jurul unei axe orizontale ecuaţia echilibrului relativ este

$$U = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + z^2) + gz + \text{const.},$$

iar suprafeţele izobare (echipotenţiale) au ecuaţia $U = \text{const.}$, adică

$$x^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2}z = \text{const.}$$

care în planul xOz reprezintă cercuri cu centrul pe axa Oz la cota (excentricitatea) $z_C = \frac{g}{\omega^2}$.

Prin urmare

$$z_C = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9{,}81 \cdot 30^2}{(\pi \cdot 2\,000)^2} = 0{,}000896 \text{ m}.$$

Forţa de presiune este

$$F_a = \frac{\pi D^2}{4}(p_{at} - p) = \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4}(1{,}0332 \cdot 10^5 - 0{,}7 \cdot 10^5) = 2350 \text{ N},$$

şi este aplicată în punctul de cotă z_C.

Scriind formula presiunii în acelaşi plan orizontal, se obţine

$$\frac{p}{\gamma} - \frac{\omega^2}{2g}\frac{D_1^2}{4} = \frac{p_{at}}{\gamma} - \frac{\omega^2}{2g}\frac{D^2}{4},$$

de unde rezultă

$$D_1 = \sqrt{D^2 - \frac{8g}{\gamma\omega^2}(p_{at} - p)} =$$

$$= \sqrt{0{,}3^2 - \frac{8 \cdot 9{,}81}{10^4\left(\frac{\pi \cdot 2\,000}{30}\right)^2}(1{,}0332 \cdot 10^5 - 0{,}7 \cdot 10^5)} = 0{,}26 \text{ m}.$$

10.35. În cuplajul hidraulic (fig. 10.35) uleiul sub presiunea $p = 2$ at intră prin interiorul axului şi apoi trece printr-un orificiu în spaţiul dintre roata dinţată A şi capacul B care poate culisa în lungul axului. Se cere să se determine forţa de presiune pe capacul B, dacă diametrul $D = 120$ mm, diametrul axului $d = 20$ mm, $n = 6\,000$ rot/min şi $\rho_u = 920$ kg/m^3.

Scanned with OKEN Scanner

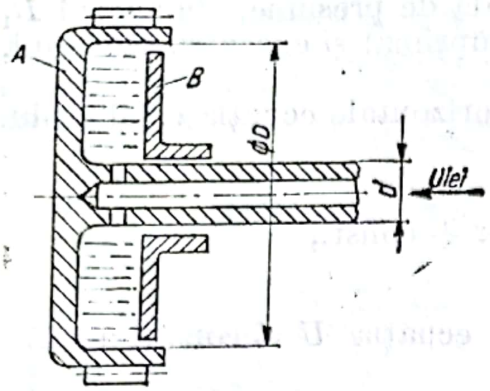


Fig. 10.35

Rezolvare. Forța de presiune pe capac, datorită rotației A va fi

$$P_1 = 2\pi\gamma \int_{d/2}^{D/2} \frac{\omega^2 r^2}{2g} r\,dr = \frac{\pi \rho_u \omega^2}{4 \cdot 16}(D^4 - d^4) =$$

$$= \frac{\cdot 920 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 6\,000}{30}\right)^2}{4 \cdot 16}(0{,}12^5 - 0{,}02^4) =$$

$$= 3\,680 \text{ N}.$$

iar cea datorită uleiului sub presiune este

$$P_2 = \left(p_0 + \frac{\gamma D}{2}\right)\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} =$$

$$= \left[2 \cdot 10^5 + \frac{0{,}92 \cdot 10^4 \cdot 0{,}12}{4}\right]\frac{\pi}{4}(0{,}12^4 - 0{,}02^2) = 2\,170 \text{ N}.$$

Rezultanta acestora este

$$P = P_1 + P_2 = 5\,850 \text{ N}.$$

10.36. Să se determine raza la care trebuie amplasat capătul conductei de ungere a lagărului de ghidaj al unei mașini hidraulice rotative cu axul vertical (fig. 10.36), cunoscîndu-se $H = 1$ m și $n = 125$ rot/min.

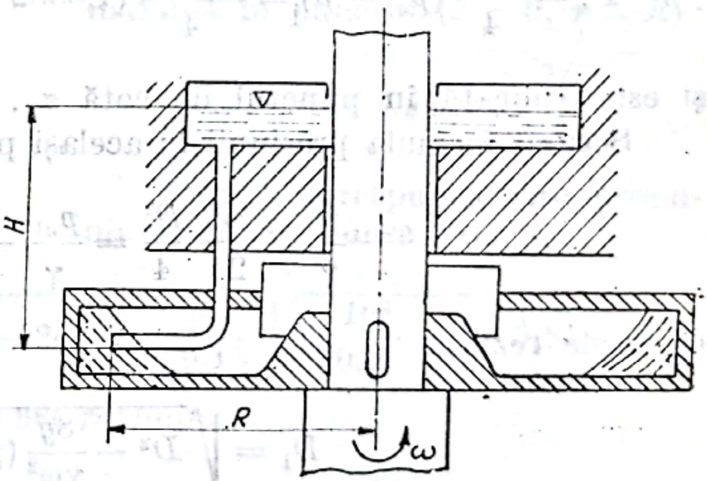


Fig. 10.36

Rezolvare. Pentru asigurarea ungerii este necesar ca presiunea din cuva de ulei în rotație să depășească presiunea hidrostatică a uleiului din cuva superioară fixă. În ipoteza neglijării forțelor gravitaționale (înălțimea cuvei în rotație este foarte mică) această condiție se scrie sub forma

$$\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} \geqslant \gamma H.$$

Se deduce

$$R \geqslant \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\gamma H}{\rho}} = \frac{30}{\pi n}\sqrt{2gH} = \frac{30}{\pi \cdot 125}\sqrt{2.9{,}81.1} = 0{,}336 \text{ m}.$$

10.37. Să se determine forţa axială pe care o exercită lichidul asupra rotorului pompei centrifugale din figura 10.37, admiţînd că între discurile rotorului şi corpului pompei (în spaţiile W_1 şi W_2) lichidul se roteşte cu o viteză unghiulară egală cu jumătatea vitezei de rotaţie a rotorului.

Se neglijează eventualele scăpări de lichid prin punctul A. Se cunosc presiunea relativă la ieşirea din rotor, $p_2 = 3{,}72$ MN/m² şi la intrare $p_1 = 0$, turaţia $n = 16\,500$ rot/min, dimensiunile rotorului $r_2 = 50$ mm, $r_1 = 25$ mm, $r_3 = 12$ mm şi greutatea specifică a lichidului $\gamma = 9 \cdot 10^3$ N/m³

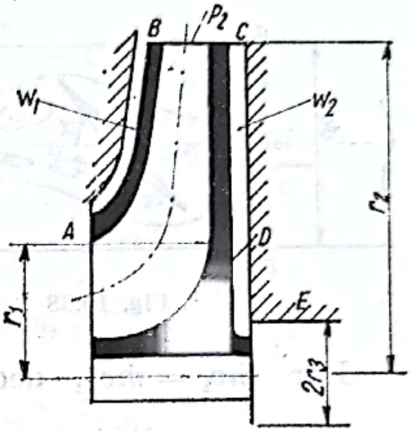


Fig. 10.37

Rezolvare. Forţele exercitate de lichid asupra suprafeţelor AB şi CD se echilibrează reciproc. Singura forţă care rămîne neechilibrată este rezultanta presiunii axiale asupra suprafeţei inelare DE, limitată de circumferinţele de raze r_1 şi r_3.

Această forţă este dirijată de la dreapta la stînga şi este egală cu

$$P = 2\pi \int_{r_3}^{r_1} pr\,dr.$$

Folosind legea de repartiţie a presiunilor $p = p(r)$ stabilită în problema (10.31).

$$p = p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - r_0^2)$$

şi substituind p_0 şi r_0 cu p_2 şi r_2, se obţine

$$p = p_2 - \gamma \frac{\omega_l^2}{2g}(r_2^2 - r^2),$$

în care ω_l este viteza unghiulară de rotaţie a lichidului.

În consecinţă,

$$P = 2\pi \int_{r_3}^{r_1} \left[p_2 - \gamma \frac{\omega_l^2}{2g}(r_2^2 - r^2) \right] r\,dr = \pi(r_1^2 - r_3^2)\left[p_2 - \gamma \frac{\omega_l^2}{2g}\left(r_2^2 - \frac{r_1^2 + r_3^2}{2} \right) \right]$$

şi, pentru datele indicate,

$$P = \pi(25^2 - 12^2) \cdot 10^{-6} \left[3{,}72 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^3 \left(\frac{\pi \cdot 16500}{2 \cdot 30} \right)^2 \frac{1}{2 \cdot 9{,}81} \left(50^2 - \frac{25^2 + 12^2}{2} \right) \cdot 10^{-6} \right] = 4510 \text{ N}.$$

10.38. Printr-o conductă de diametru $d = 600$ mm, în care este montată o vană — fluture sub un unghi $\alpha = 60°$ faţă de axa conductei (coeficientul de pierdere locală fiind $\varsigma = 118$), se scurge debitul de apă $\dot{V} = 140$ l/s (fig. 10.38). Să se determine : a) componenta axială a forţei de acţiune a lichidului asupra vanei ; b) forţa totală de acţiune asupra vanei.

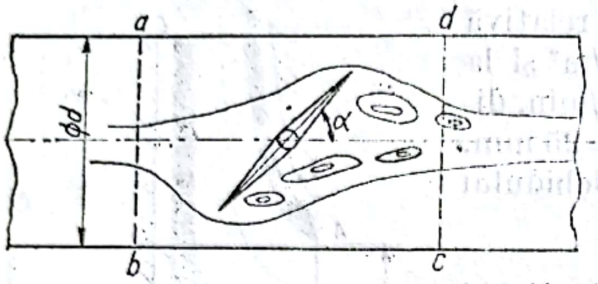


Fig. 10.38

Rezolvare. Pe suprafaţa de control, a, b, c, d, teorema forţelor de impuls se scrie

$$\bar{F}_a = (\dot{m}\bar{v})_1 - (\dot{m}\bar{v})_2 + \bar{F}_{p_1} - \bar{F}_{p_2},$$

Dar $\dot{m}v_1 = \dot{m}v_2$, deci se obţine

$$F_a = F_{p_1} - F_{p_2} = \delta p \cdot A,$$

în care

$$\delta p = \gamma h = \gamma \frac{v^2}{2g} \zeta \quad \text{şi} \quad A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Rezultă deci

$$F_a = \gamma \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{v^2}{2g} \zeta = \gamma \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{V^2}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2 \cdot 2g} = \gamma \frac{4V^2}{\pi d^2} \cdot \frac{\zeta}{2g} =$$

$$= 10^3 \frac{4 \cdot 0{,}14^2}{\pi \cdot 0{,}6^2} \frac{118}{19{,}62} = 415 \text{ daN}.$$

Forţa totală este

$$F = \frac{F_a}{\sin \alpha} = \frac{415}{\sin 60°} = 480 \text{ daN}.$$

10.39. Un ventil de siguranţă cu diametrul sediului $d = 25$ mm, fiind supus unei suprapresiuni $p_s = 32$ ats, lasă să treacă debitul de ulei $\dot{V} = 10 \frac{l}{s}$ (pentru ulei $\gamma = 900$ kgf/m^3), deschiderea ventilului fiind $s = 5$ mm (fig. 10.39). Neglijînd rezistenţele la deschiderea ventilului să se determine direcţia de scurgere a jetului din ventil (unghiul α), cunoscînd suprapresiunea din aval $p'_s = 25$ ats şi constanta arcului $C = 2$ kgf/mm.

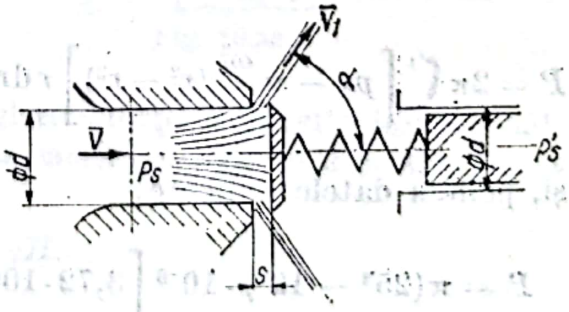


Fig. 19.39

Rezolvare. Din teorema forţelor de impuls pe direcţia axială

$$\rho \dot{V} v_1 \cos\alpha - \rho \dot{V} v = (p_s - p_s') \frac{\pi d^2}{4} - C \cdot s;$$

se obţine

$$v_1 \cos\alpha - v = \frac{1}{\rho \dot{V}} \left[(p_s - p_s') \frac{\pi d^2}{4} - Cs \right] =$$

$$= \frac{9{,}81}{900 \cdot 0{,}01} \left[(32 - 25) \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}025^2 - 2 \cdot 5 \right] = 26{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Condiţia de continuitate este

$$\dot{V} = \frac{\pi d^2}{4} V = \pi d s \sin\alpha \cdot v_1,$$

de unde rezultă vitezele

$$v = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} \quad \text{şi} \quad v_1 = \frac{\dot{V}}{\pi d s \sin\alpha},$$

deci

$$v_1 \cos\alpha - v = \frac{\dot{V}}{\pi d s \cdot \operatorname{tg}\alpha} - \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} = \frac{\dot{V}}{\pi d} \left(\frac{1}{s \operatorname{tg}\alpha} - \frac{4}{d} \right)$$

sau

$$\frac{1}{s \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{d} + \frac{\pi d}{\dot{V}} (v_1 \cos\alpha - v) = \frac{4}{0{,}025} + \frac{\pi \cdot 0{,}025 \cdot 26{,}5}{0{,}01} =$$

$$= 160 + 208 = 368 \text{ mm}^{-1}$$

şi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{368}{5} = 73{,}7, \text{ de unde rezultă } \alpha = 89°22'.$$

10.40. O pompă centrifugă (fig. 10.40) utilizată la curăţirea bazinelor de nămol, are conducta de aspiraţie cu diametrul $d_1 = 700$ mm, iar depresiunea este $p_d = 0{,}2$ atd, la un debit $\dot{V} = 1300$ l/s. Conducta de refulare are diametrul $d_2 = 500$ mm, iar suprapresiunea este $p_s = 8{,}8$ ats. Turaţia este $n = 960$ rot/min, iar puterea necesară a motorului electric $P = 1250$ kW.

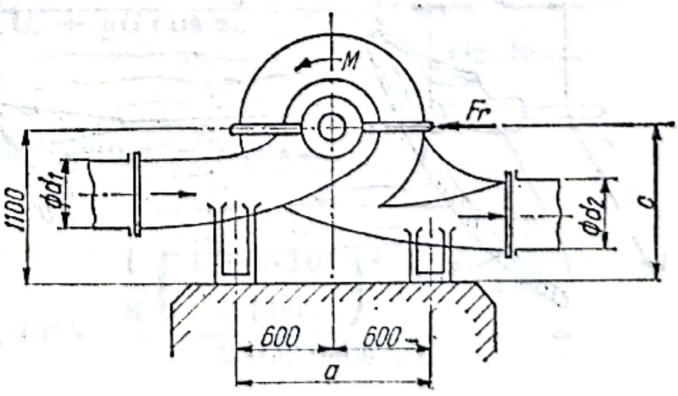


Fig. 10.40

Să se determine: a) forţa de împingere orizontală şi momentul, aplicate asupra întregii pompe; b) forţa de solicitare a buloanelor de ancorare pe postament (conductele nu preiau aceste solicitări avînd jonc-

ţiuni elastice). Greutatea pompei cu apă este $G = 6250$ daN, iar centrul de greutate este situat pe axa de rotaţie.

Rezolvare. a) Din teorema forţelor de impuls

$$\rho \dot{V}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = p_1 A_1 \bar{n}_1 + p_2 A_2 \bar{n}_2 + \bar{G} + \bar{F}_r.$$

Întrucît presiunea atmosferică nu contribuie, se înlocuiesc presiunile absolute cu cele relative şi se deduce forţa de reacţiune.

$$F_r = \rho \dot{V}(v_2 - v_1) - p_a \frac{\pi d_1^2}{4} + p_s \frac{\pi d_2^2}{4} = \rho \frac{4\dot{V}^2}{\pi}\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right) -$$

$$- \frac{\pi}{4}(p_a d_1^2 - p_s d_2^2) = \frac{10^3 \cdot 4 \cdot 1{,}3^3}{9{,}81 \cdot 4}\left(\frac{1}{0{,}5^2} - \frac{1}{0{,}7^2}\right) -$$

$$- \frac{\pi}{4}(0{,}2 \cdot 0{,}7^2 - 0{,}8 \cdot 0{,}5^2) = 428{,}35 \text{ daN}.$$

Momentul motor este $M = M_m = \frac{P}{\omega} = 761{,}2 \frac{1250 \cdot 1{,}36}{960} =$ $= 1270$ m · daN.

b) Forţa axială a buloanelor din dreapta este

$$F_a = \frac{cF_r + M_m - \frac{G}{2}a}{a} = \frac{1}{1{,}2}(428{,}35 \cdot 1{,}1 + 1270) -$$

$$- \frac{6250}{2} = -1675 \text{ daN}.$$

Observaţie. Datorită unei bune echilibrări, buloanele nu sînt solicitate la întindere, ci se dimensionează constructiv.

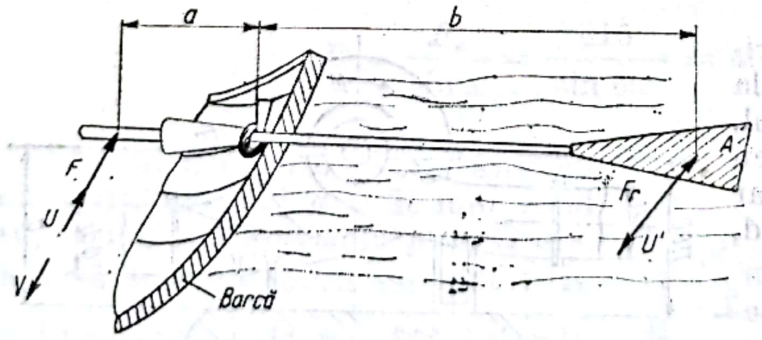


Fig. 10.41

10.41. Să se determine forţa F, pe care trebuie să o dezvolte un vîslaş, cunoscînd raportul $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, viteza bărcii $v = 10$ km/h, viteza mîinii vîslaşului $u = 1{,}5$ m/s şi porţiunea din vîslă imersă în apă, care este un triunghi de arie $A = 5$ dm² (fig. 10.41), iar coeficientul ei de rezistenţă la înaintare este $c_r = 1{,}2$.

Rezolvare. Momentele forţelor în raport cu strapazanul sînt

$$\bar{a} \times \bar{F} = \bar{b} \times \bar{F}_r,$$

de unde

$$F = \frac{b}{a} F_r,$$

în care

$$F_r = \frac{\rho}{2} w^2 A c_r, \quad w = v - u'.$$

Din condiţiile

$$u = a\omega \quad \text{şi} \quad u' = b\omega$$

rezultă prin eliminarea lui ω, $\omega = \frac{u}{a} = \frac{u'}{b}$, relaţia

$$u' = \frac{b}{a} u.$$

Înlocuind mărimile corespunzătoare în expresia forţei, rezultă

$$F = \frac{b}{a} \frac{\gamma}{2g} \left(v - \frac{b}{a} u \right)^2 A c_r = 3 \frac{10^3}{2 \cdot 9{,}81} \left(\frac{10}{3{,}6} - 3 \cdot 1{,}5 \right)^2 0{,}05 \cdot 1{,}2 = 27{,}6 \text{ daN}.$$

10.42. Un schior de greutate $G = 70$ daN coboară o pantă înclinată cu unghiul $\alpha = 45°$, cu o viteză de coborîre, după stabilirea regimului uniform, de $v = 137{,}5$ km/h. Cunoscînd aria secţiunii frontale $A = 0{,}4$ m^2 şi coeficientul de rezistenţă aerodinamică $C_s = 1{,}3$, să se determine coeficientul de frecare a schiurilor cu zăpada μ (fig. 10.42). Se consideră poziţia schiorului în coborîre perpendiculară pe pantă.

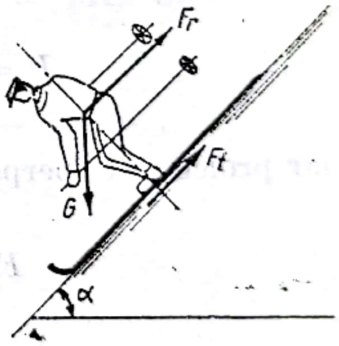


Fig. 10.42

Rezolvare. Aplicînd ecuaţia de echilibru pe direcţia traiectoriei, se obţine

$$G \sin \alpha = F_r + F_t = \frac{\rho}{2} v^2 A C_r + \mu G \cos \alpha,$$

sau

$$\frac{\rho}{2} v^2 A C_r = G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

de unde rezultă

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha - \frac{\rho v^2 A C_r}{2G \cos \alpha} = \operatorname{tg} 45° - \frac{\frac{1}{8} \left(\frac{137{,}5 \cdot 10^3}{3\,600} \right)^2 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}3}{2 \cdot 70 \cdot \cos 45°} =$$

$$= 1 - \frac{38{,}2^2 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}3}{8 \cdot 2 \cdot 70 \cdot 0{,}706} = 0{,}04,$$

$\left(\text{s-a considerat densitatea aerului } \rho = \frac{1}{8} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4 \right)$.

Scanned with OKEN Scanner

10.43. Acoperişul unui depozit de scînduri, deschis lateral, este un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 10°$, faţă de direcţia orizontală. Lungimea lui (anvergura) este $b = 20$ m, iar lăţimea (coarda) este $c = 8$ m (fig. 10.43). Acoperişul este suspendat pe 20 stîlpi de înălţime $h = 4$ m., dimensionaţi astfel ca să suporte o forţă de smulgere $F_s = 4{,}3$ tf. Să se determine viteza minimă a vîntului orizontal în timp de furtună, la care acoperişul poate fi smuls de jos în sus din îmbinările cu stîlpii. În figura 10.43 apare variaţia coeficientului de presiune $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2}$ pe extrados (−) şi pe intrados (+), determinată pe machetă în tunel aerodinamic. Se consideră temperatura atmosferică $t = 7°C$, iar presiunea $p_{at} = 740$ torr.

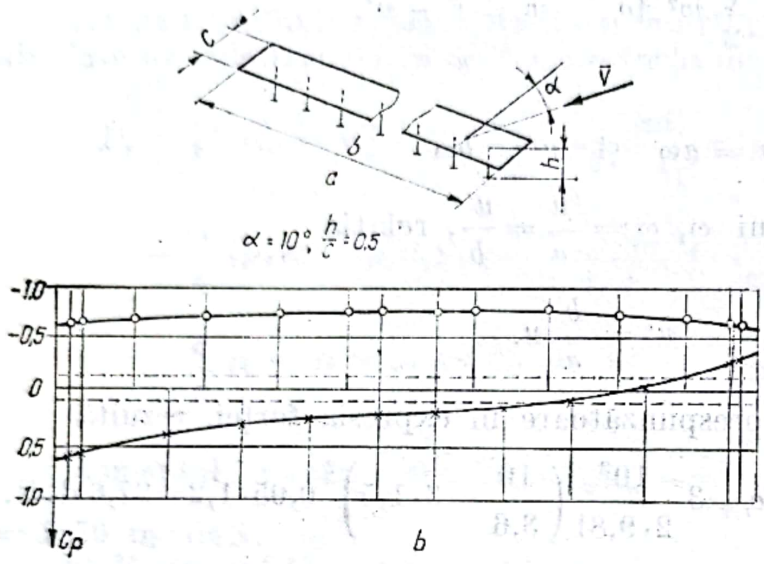


Fig. 10.43

Rezolvare. Rezultanta forţelor de presiune este

$$F = A\,(p_{ci} - p_{ce}) = bc\,\frac{\rho}{2}\,v_\infty^2\,(c_{pi} - c_{pe}),$$

iar proiecţia ei perpendiculară pe viteza v_∞ este portanţa

$$F_p = F\cos\alpha = bc\,\frac{\rho}{2}\,v_\infty^2\,(c_{pi} - c_{pe}).$$

Din condiţia $F_p \geqslant F_s$, rezultă

$$v_\infty \geqslant \sqrt{\frac{2F_s}{bc\rho\,(c_{pi} - c_{pe})\cos\alpha}}.$$

Densitatea aerului este

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{p_{at}}{gRT} = \frac{\frac{740}{760}\cdot 10\,332}{9{,}81\cdot 29{,}27\cdot 280} = \frac{1}{8}\ \text{kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4.$$

Prin planimetrarea diagramelor din figură se obţin valorile medii:

$$C_{p_i\,\text{med}} = 0{,}17 \quad \text{şi} \quad C_{p_e\,\text{med}} = -\,0{,}73.$$

Rezultă

$$v_\infty \geqslant \sqrt{\frac{2 \cdot 4\,300 \cdot 8}{20 \cdot 8 \cdot (0{,}73 - 0{,}17) \cdot 0{,}9848}} = 28 \text{ m/s}.$$

10.44. Pentru construirea şi amplasarea unor magazii, cabane ş.a., s-au efectuat, în tunel aerodinamic, determinări privind repartiţia presiunii vîntului, în vederea dimensionării şi poziţionării pe baze ştiinţifice; un caz interesant este prezentat în figura 10.44, *a*: aşezarea machetei la cota 1,04 h deasupra unui teren neregulat, avînd în aval un paravan-deflector.

Considerînd mişcarea plană, să se determine: a) forţa de suprapresiune pe fiecare faţă a machetei; b) portanţa F_p: c) rezistenţa aerodinamică F_r; d) rezultanta aerodinamică F.

Se dau: $\rho = 0{,}132$ daN · s²/m⁴, $v_\infty = 50$ m/s (pentru un calcul acoperitor), $h = 3$ m, $c = 2$ m, $\delta h = 0{,}44$ m şi anvergura unitară $b = 1$ m.

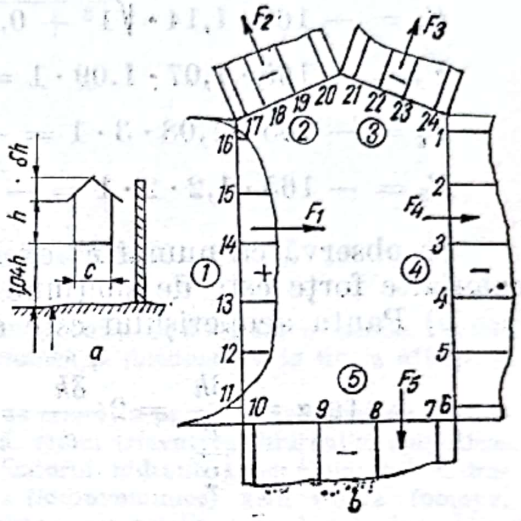


Fig. 10.44

Rezolvare. a) Prin planimetrarea diagramei presiunilor (fig. 10.44, *b*) s-au obţinut valori numerice medii ale coeficientului de presiune

$$C_p = \frac{p - p_{at}}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2}$$

pe fiecare dintre feţele numerotate

$$c_{p_1} = 0{,}66, \quad c_{p_2} = -1{,}14, \quad c_{p_3} = -1{,}07, \quad c_{p_4} = 1{,}08, \quad c_{p_5} = -1{,}20.$$

Din formula lui Bernoulli

$$p_{at} + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2} v^2,$$

rezultă

$$p = p_{at} + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2\right] = p_{at} + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 c_p,$$

astfel încît expresia forţei de suprapresiune este

$$\bar{F} = \iint_A p_s \bar{n}\, dA, \quad \text{sau} \quad F = (p - p_{at}) A = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 c_p A,$$

Scanned with OKEN Scanner

în care:

$$\frac{\rho}{2} v_\infty^2 = \frac{0{,}132}{2} 50^2 = 165 \text{ daN/m}^2.$$

Rezultă forţele de suprapresiune

$F_1 = 165 \cdot 0,66 \cdot 3 \cdot 1 = 327$ daN;

$F_2 = -165 \cdot 1,14 \cdot \sqrt{1^2 + 0,44^2} \cdot 1 = -188 \cdot 1 \cdot 1,09 = -205$ daN;

$F_3 = -165 \cdot 1,07 \cdot 1,09 \cdot 1 = -192,5$ daN;

$F_4 = -165 \cdot 1,08 \cdot 3 \cdot 1 = -535$ daN;

$F_5 = -165 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 1 = -396$ daN.

Se observă că numai F_1 exercită o apăsare, pe cînd efectul tuturor celorlalte forţe este de sucţiune:

b) Panta acoperişului este dată de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta h}{\frac{c}{2}} = 2 \frac{\delta h}{c} = 2 \frac{0{,}44}{2} = 0{,}44, \qquad \alpha = 23°45'$$

Portanţa este

$$F_p = \{|F_2| + |F_3|\} \sin \alpha - |F_5| = (205 + 192{,}5) \sin \alpha - 396 =$$
$$= 397{,}5 \cdot 0{,}402 - 396 = -236 \text{ daN}.$$

şi este orientată de sus în jos.

c) Rezistenţa aerodinamică este

$$F_r' = F_1 - F_4 = 327 - (-535) = 862 \text{ daN}.$$

d) Rezultanta aerodinamică este

$$F = \sqrt{F_p^2 + F_r^2} = \sqrt{236^2 + 862^2} = 892 \text{ daN}$$

şi este orientată oblic din amonte sus, spre aval în jos.

CAPITOLUL XI

PROBLEME DE ACȚIONĂRI HIDRAULICE ȘI PNEUMATICE UTILIZATE LA UNELE UTILAJE ȘI INSTALAȚII TEHNOLOGICE ÎN ECONOMIA FORESTIERĂ

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

Problemele prezentate, foarte diferite între ele, au intenția de a satisface felurite necesități și exigențe, legate de utilizarea acționărilor hidraulice și pneumatice la unele utilaje și instalații tehnologice în economia forestieră.

Problemele hidro (pneumo) mecanice prezentate se referă la principalele tipuri de mașini hidro(pneumo)statice simple utilizate: presa hidraulică, cricul (elevatorul)hidraulic, amplificatorul hidrostatic de presiune (ridicătorul sau multiplicatorul hidraulic), acumulatorul hidraulic și pneumatic; la principalele mașini hidrostatice (hidrovolumice) generatoare (pompe, compresoare) și motoare (de execuție) utilizate: cu piston, cu palete alunecătoare (cu culise rotitoare), cu roți dințate (cu angrenaje interioare și exterioare), cu membrană, cu inel de lichid; la aparatajul hidraulic de reglare, control și siguranță (vane, ventile, supape, regulatoare, limitatoare etc.).

Un loc deosebit îl ocupă hidromonitorul, ca un generator hidraulic de jet și fenomenul de perturbație în conducte forțate (lovitura de berbec).

Sintetizarea tuturor cunoștințelor teoretice necesare rezolvării unor aplicații practice de acționări hidraulice și pneumatice, la începutul capitolului, este extrem de dificil de realizat și nu poate fi obținută în mod satisfăcător la modul cel mai general.

Rezolvarea problemelor propuse. se bazează pe utilizarea principalelor principii, teoreme, legi și formule din statica și dinamica fluidelor, ilustrate în cadrul capitolului 10. Aspectele particulare ale calculului unor mașini, aparate, mecanisme hidraulice și pneumatice ș.a., sînt redate prin formule, explicații la calcule, interpretări sau indicații, trimiteri bibliografice, raționamente ș.a., la fiecare problemă propusă.

Problemele, pe cît posibil, sînt prezentate în ordinea crescîndă a dificultății de rezolvare. Dacă urmărirea soluției date prezintă dificultăți, se recomandă urmărirea sistematică a întregului capitol, a capitolului anterior, sau poate chiar recitirea unui manual de specialitate.

Dată fiind pregătirea științifică și chiar tehnică neomogenă a cititorilor, este posibil ca unii cititori să aibă o oarecare dificultate în înțelegerea unor formule, metode, unități de măsură ș.a., pe care le reclamă rezolvările unor probleme. În orice caz, sînt evitate folosirea metodelor de nivel matematic prea înalt și folosirea unor cunoștințe de prea strictă specialitate. Acelor cititori li se recomandă să ocolească, cel puțin la prima lectură, problemele dificile, dar să persevereze în urmărirea celor care intră neapărat în sfera lor de preocupări.

II. APLICAȚII

11.1. Presa hidraulică din figura 11.1 este acționată manual prin pîrghia pompei cu o forță $f = 245$ N, brațele pîrghiei fiind în raportul $a/b = 1/5$.

Pistonul mic are diametrul $d = 25$ mm și o garnitură de etanșare din piele cu înălțimea $h = 1$ cm. Pistonul mare al presei are $D = 500$ mm și o garnitură de etanșare cu înălțimea $H = 3$ cm,

a) neglijînd frecările, se cere să se calculeze forţa de presiune teoretică ce se exercită pe pistonul mare;

b) să se calculeze aceeaşi forţă ţinînd seama de frecarea garniturilor cu pistoanele, pentru un coeficient de frecare $\mu = 0{,}15$;

c) să se determine randamentul presei.

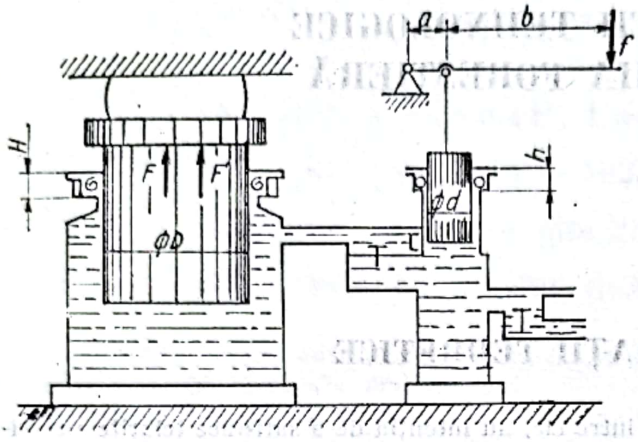


Fig. 11.1

Rezolvare. a) Din ecuaţia de momente în raport cu articulaţia, rezultă forţa exercitată de către pîrghie asupra pistonului mic

$$f_1 = \frac{a+b}{a} \cdot f.$$

Forţele masice fiind neglijabile în raport cu cele de presiune, presiunea în ulei este constantă (principiul transmiterii presiunii — principiul lui Pascal)

$$p = \frac{4F}{\pi D^2} = \frac{4f_1}{\pi d^2},$$

de unde

$$F = \left(\frac{D}{d}\right)^2 f_1 = \frac{a+b}{a}\left(\frac{D}{d}\right)^2 f = 6 \cdot \left(\frac{500}{25}\right)^2 \cdot 245 = 588\,000 \text{ N}.$$

b) Ţinînd seama de frecările în etanşări, apar alte valori ale forţelor şi presiunii.

Forţa f_1 creată de pîrghie serveşte la învingerea frecării în etanşare f_h şi la crearea presiunii p'. Deci

$$f_1 = f_h + p' \frac{\pi d^2}{4},$$

$f_h = \mu f_n$, unde f_n este apăsarea normală a garniturii pe piston produsă de presiunea de lichid, $f_n = p' \pi d h$.

Prin urmare

$$f_1 = \frac{a+b}{a} f = \mu p' \pi d h + p' \frac{\pi d^2}{4},$$

de unde

$$p' = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{f}{\pi d\left(\mu h + \frac{d}{4}\right)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forţa de presiune exercitată de ulei asupra pistonului mare serveşte pentru crearea forţei utile F' şi pentru învingerea frecării în etanşare:

$$p' \frac{\pi D^2}{4} = f_H + F',$$

unde

$$f_H = \mu F_n = \mu p' \pi DH.$$

Rezultă

$$F' = p' \frac{\pi D^2}{4} - \mu p' \pi DH = p' \pi D \left(\frac{D}{4} - \mu H \right),$$

şi ţinînd seama de expresia obţinută mai sus pentru p', se obţine:

$$F' = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{D\left(\frac{D}{4} - \mu H\right)}{d\left(\frac{d}{4} + \mu h\right)} f = 6 \frac{0{,}5\left(\frac{0{,}5}{4} - 0{,}15 \cdot 0{,}03\right)}{0{,}025\left(\frac{0{,}025}{4} + 0{,}15 \cdot 0{,}01\right)} 245 = 458\,000 \text{ N}.$$

c) Randamentul presei este

$$\eta = \frac{F'}{F} = \frac{458\,000}{588\,000} = 0{,}78, \text{ adică } 78\%.$$

11.2. Presa cu şurub din figura 11.2 cu acţionare manuală utilizează ulei avînd coeficientul de compresibilitate $k = -47{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm²/daN. Cunoscînd alezajul $d = 1$ cm, pasul şurubului $h = 2$ mm şi volumul iniţial de ulei $V = 200$ cm³ la presiunea atmosferică normală, să se determine numărul n de rotaţii necesare şurubului pentru a se obţine o suprapresiune $p_s = 200$ daN/cm².

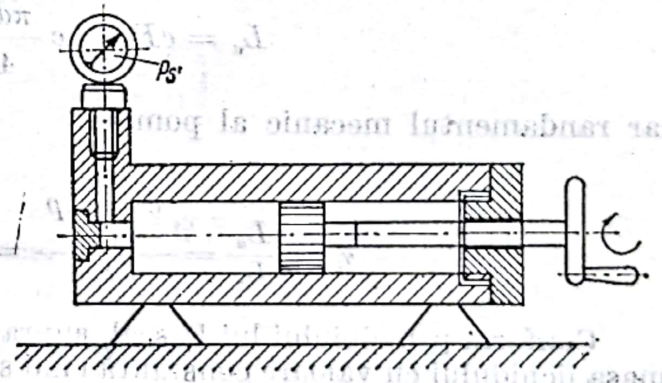


Fig. 11.2

Rezolvare. Din relaţia de definiţie a coeficientului de compresibilitate, pentru lichide

$$k = -\frac{1}{\Delta p} \cdot \frac{\Delta V}{V}, \text{ în care } \Delta V = \frac{\pi}{4} d^2 n h,$$

iar $\Delta p = p_s$, se obţine

$$k = -\frac{1}{p_s} \frac{\pi d^2 n h}{4V}$$

și rezultă

$$n = \frac{4kVp_s}{\pi d^2 h} = \frac{4 \cdot 47{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 200}{3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 0{,}2} = 12{,}1 \text{ rotații.}$$

11.3. Un cric hidraulic constă dintr-un cilindru fix cu diametrul $D = 200$ mm și un cilindru alunecător format din două părți reunite (fig. 11.3). În partea de sus culisează pistonul pompei de comandă de diametru $d = 20$ mm. Să se determine forța necesară pe mîner F, la sarcina $G = 120\,000$ N, cunoscînd raportul brațelor pîrghiei $\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$, randamentul mecanic al pompei $\eta = 0{,}65$, și randamentul mecanic al cilindrului $\eta' = 0{,}9$.

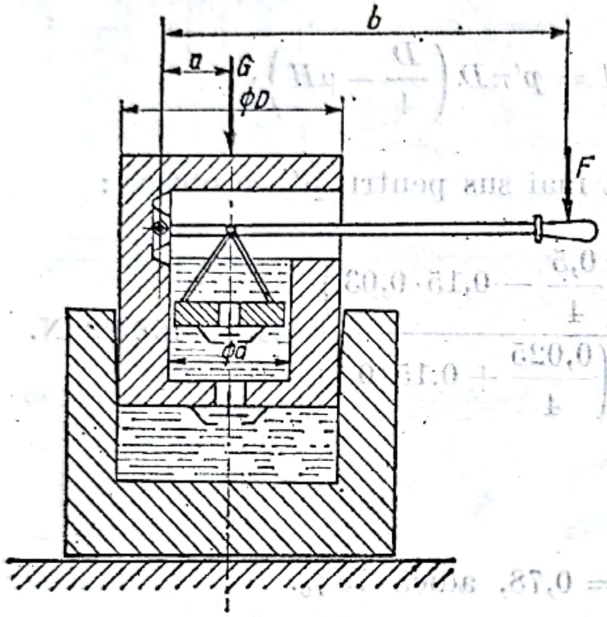


Fig. 11.3

Rezolvare. Fie α [rad] unghiul de rotație a pîrghiei, corespunzător curbei c a pistonului mic ($c = a\alpha$); lucrul mecanic absorbit de pompă este

$$L_a = bF\alpha.$$

Dacă $F_p = \frac{\pi d^2}{4}\delta p$ este forța de presiune pe fața pistonului mic, lucrul mecanic util al pompei este

$$L_u = cF_p = c\frac{\pi d^2}{4}\delta p,$$

iar randamentul mecanic al pompei

$$\eta = \frac{L_u}{L_a} = \frac{c\frac{\pi d^2}{4}\delta p}{bF\alpha} = \frac{a}{b}\frac{\pi d^2}{4F}\delta p.$$

Conform principiului lui Pascal, suprapresiunea se transmite în toată masa lichidului cu valoare constantă cînd supapa inferioară este deschisă; astfel se obține pe fața pistonului mare forța de suprapresiune

$$F'_p = \frac{\pi D^2}{4}\delta p.$$

Notînd cu c' cursa pistonului mare, lucrul mecanic absorbit de cilindru este

$$L'_a = \frac{\pi D^2}{4}c'\delta p,$$

iar lucrul mecanic util este $L'_u = Gc'$; rezultă randamentul mecanic al cilindrului

$$\eta' = \frac{L'_u}{L'_a} = \frac{Gc'}{\frac{\pi D^2}{4} c' \delta p} = \frac{4G}{\pi D^2 \delta p}.$$

Eliminînd suprapresiunea δp din expresiile (η) şi (η'), se obţine

$$F = \frac{G}{\eta\eta'} \frac{a}{b} \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \frac{120\,000}{0{,}65 \cdot 0{,}9} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{20}{200}\right)^2 = \frac{120\,000}{0{,}585} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 410\,\text{N}.$$

Observaţii. 1. O rezolvare mai expeditivă se putea da făcînd provizoriu abstracţie de randamente (în locul forţei reale F intervine forţa teoretică F_t). Astfel, din condiţia de echilibru a momentelor

$$bF_t = aF_p.$$

se obţine

$$F_t = \frac{a}{b} F_p = \frac{a}{b} \frac{\pi d^2}{4} \delta p,$$

iar din condiţia de echilibru a forţelor

$$G = \frac{\pi D^2}{4} \delta p.$$

Prin eliminarea lui δp rezultă

$$F_t = G \frac{a}{b} \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

Forţa reală este $F = \frac{F_t}{\eta\eta'}$, deci $F = \frac{G}{\eta\eta'} \frac{a}{b} \left(\frac{d}{D}\right)^2$.

2. Raportul de amplificare a forţelor

$$\frac{G}{F} = \eta\eta' \frac{b}{a} \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

conţine doi factori: $\frac{b}{a} = 5$ (amplificare mecanică prin pîrghii) şi $\left(\frac{D}{d}\right)^2 = \left(\frac{200}{20}\right)^2 = 100$ (amplificare hidraulică). Incomparabil mai eficientă este amplificarea hidraulică, ceea ce explică răspîndirea transmisiilor hidro-

Scanned with OKEN Scanner

pneumatice în mecanizarea și automatizarea proceselor de producție, de exemplu.

11.4. Principiul amplificatorului hidrostatic de presiune (ridicătorul sau multiplicatorul hidraulic) este ilustrat prin trei scheme constructive.

Astfel în figura 11.4, *a* este redat un amplificator al cărui piston diferențial are diametrele $D = 50$ cm și $d = 10$ cm. Să se determine

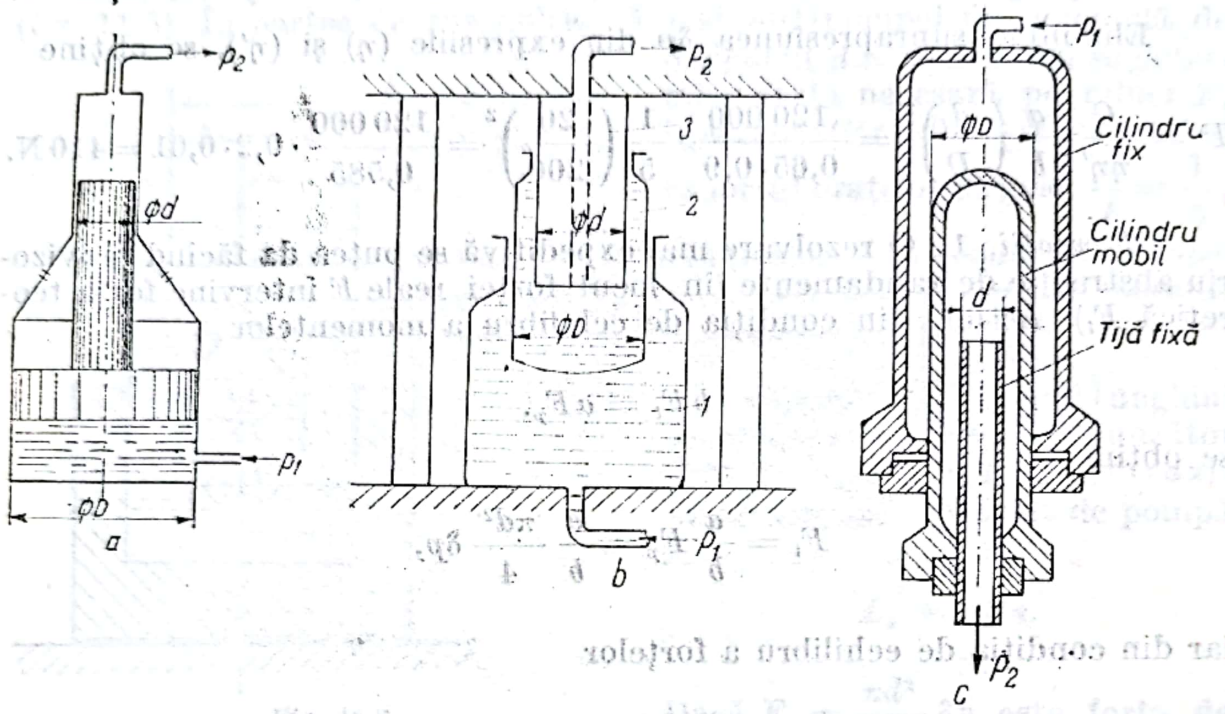


Fig. 11.4

presiunea absolută sporită p_2 care se dezvoltă, știind că uleiul trimis sub pistonul mare are suprapresiunea $p_1 = 5$ ats (daN/cm²), iar randamentul mecanic al transmisiei este $\eta = 0{,}85$.

Multiplicatorul hidraulic reprezentat în figura 11.4, *b* este folosit pentru multiplicarea presiunii p_1 furnizate de către o pompă sau un acumulator. Sub acțiunea presiunii p_1, comunicate cilindrului 1 pistonul cilindrului 2 cu lichid în interior, de diametru D și greutatea G, se deplasează în lungul axului fix 3 de diametru d, comprimînd lichidul în interiorul său pînă la presiunea p_2. Această presiune multiplicată este transmisă consumatorului prin canalul axului fix.

Ridicătorul hidraulic de presiune din figura 11.4, *c* este construit după aceleași principii.

Rezolvare. Fie l deplasarea pistonului în mișcarea ascendentă (fig. 11.4, *a*). Lucrul mecanic absorbit corespunde forței de suprapresiune F_s, care se transmite prin tijă și este $L = F_s l = p_1 \dfrac{\pi d^2}{4} l$.

Lucrul mecanic util corespunde aceleași forțe F_s și aceleași deplasări l

$$L_u = F_s l = p_1' \frac{\pi d^2}{4} l.$$

Randamentul are expresia

$$\eta = \frac{L_u}{L_a} = \frac{p_1' d^2}{p_1 D^2},$$

deci

$$p_1' = \eta p_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2.$$

Prin urmare, presiunea absolută, [ata] adică [daN/cm²], este

$$p_2 = p_{at} + p_1' = p_{at} + p_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2 \eta = p_{at} + 5\left(\frac{50}{10}\right)^2 \cdot 0{,}85 = p_{at} + 106 \text{ [ata]}.$$

11.5. Un acumulator hidraulic cu greutăţi (fig. 11.5) se încarcă cu o pompă prin împingerea lichidului în cilindrul *A*, care ridică cilindrul împreună cu greutatea *G*. La descărcarea acumulatorului cilindrul coboară şi lichidul sub presiune este folosit de un agregat. Se cere să se determine presiunea p_1 a apei la încărcare, presiunea p_2 la descărcare şi randamentul acumulatorului, dacă se ştie că diametrul plungerului este $D = 100$ mm, greutatea sarcinii împreună cu a cilindrului este $G = 150\,000$ N, lăţimea manşetei etanşatoare $b = 25$ mm, iar coeficientul de frecare a manşetei de plunger este $\mu = 0{,}1$.

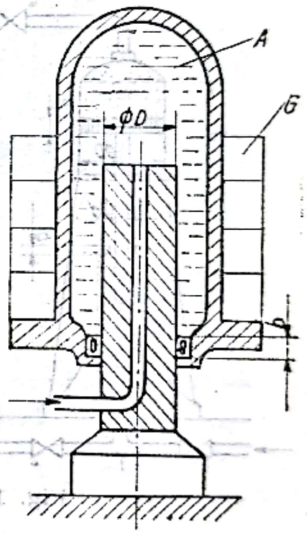


Fig. 11.5

Rezolvare. Presiunea p_1 a lichidului la încărcare trebuie să învingă greutatea *G* şi forţa de frecare între garnitură şi cilindrul fix. Din definiţia presiunii se poate scrie relaţia

$$p_1 = \frac{G + \mu p_1 \pi D b}{\frac{\pi D^2}{4}},$$

de unde rezultă

$$p_1 = \frac{G}{\frac{\pi D^2}{4} - \mu \pi D b} = \frac{15 \cdot 10^4}{0{,}768 \cdot 10^{-2} - 0{,}1 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}025} =$$

$$= 2{,}09 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2;$$

$$p_1 \simeq 213 \text{ daN/cm}^2.$$

La descărcarea acumulatorului forţa de frecare este de sens opus greutăţii *G* şi atunci

$$p_2 = \frac{G - \mu p_2 \pi D b}{\frac{\pi D^2}{4}},$$

de unde rezultă

$$p_2 = \frac{G}{\frac{\pi D^2}{4} + \mu \pi D b} = \frac{15 \cdot 10^4}{0{,}785 \cdot 10^{-2} + 0{,}785 \cdot 10^{-3}} = 1{,}71 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 =$$

$$= 174 \text{ daN/cm}^2.$$

Randamentul acumulatorului definit ca raportul între puterea utilă şi puterea consumată se reduce ca expresie la forma $\eta = p_2/p_1$, iar ca valoare se estimează

$$\eta = \frac{174}{213} = 0{,}817 = 81{,}7\,\%$$

11.6. Încărcarea unui acumulator pneumatic (fig. 11.6) se face prin deplasarea pistonului în cilindrul acumulatorului, de jos în sus, sub acţiunea unei forţe care acţionează asupra părţii frontale a tijei pistonului, ca urmare a presiunii lichidului livrat de o pompă. Se cere să se determine :

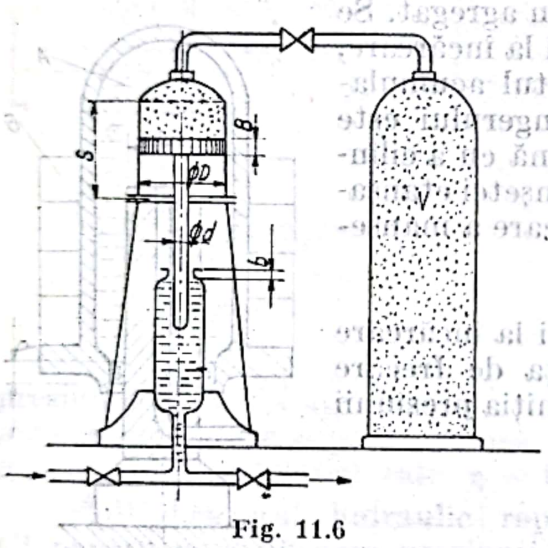


Fig. 11.6

a) presiunea aerului la punctul superior şi respectiv inferior al pistonului, dacă acumulatorul are următoarele dimensiuni : $d = 135$ mm., $D = 600$ mm., cursa $s = 1400$ mm, lăţimea garniturilor de etanşare $b = 20$ mm, respectiv $B = 25$ mm, volumul buteliei $V = 1{,}5\ \text{m}^3$, coeficientul de frecare al garniturilor presupunîndu-se $\mu = 0{,}1$, iar presiunea maximă dezvoltată de pompă fiind $p_p = 300$ at ;

b) presiunea maximă şi minimă a lichidului imprimată de acumulator. În calcule se presupune că mişcarea pistonului este uniformă şi procesul comprimării aerului în acumulator este izoterm.

Rezolvare. a) Presiunea aerului la punctul superior al pistonului corespunzînd presiunii maxime a pompei, rezultă din ecuaţia de echilibru

$$p_p \left(\frac{\pi d^2}{4} - \mu b \pi d \right) = p_{as} \left(\frac{\pi D^2}{4} + \mu B \pi D \right),$$

şi anume

$$p_{as} = \frac{\frac{d^2}{4} - \mu b d}{\frac{D^2}{4} + \mu B D} \cdot p_p = \frac{\frac{0{,}135^2}{4} - 0{,}1 \cdot 0{,}020 \cdot 0{,}135}{\frac{0{,}6^2}{4} + 0{,}1 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}6} \cdot 300 \cdot 10^5 =$$

$$= 1{,}373 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 14 \text{ at.}$$

Presiunea aerului în acumulator corespunzătoare poziției pistonului în punctul inferior rezultă din relația transformării izoterme a aerului din acumulator (produsul dintre presiune și volum este constant) scrisă sub forma

$$p_{ai}\left(V+\frac{\pi D^2}{4}s\right)=Vp_{as},$$

deci

$$p_{ai}=\frac{V}{V+\frac{\pi D^2}{4}s}p_{as}=\frac{1{,}5}{1{,}5+1{,}4\frac{3{,}14\cdot 0{,}6^2}{4}}1{,}373\cdot 10^6=1{,}08\ \text{N/m}^2=11\ \text{at.}$$

b) Presiunea maximă și minimă a lichidului, dezvoltate de acumulator se obțin din ecuația de echilibru :

$$p_{as}=\left(\frac{\pi D^2}{4}-\mu B\pi D\right)=p_{\max}\left(\frac{\pi d^2}{4}+\mu b\pi d\right),$$

respectiv

$$p_{ai}\left(\frac{\pi D^2}{4}-\mu B\pi D\right)=p_{\min}\left(\frac{\pi d^2}{4}+\mu b\pi d\right),$$

de unde rezultă

$$p_{\max}=\frac{\frac{D^2}{4}-\mu BD}{\frac{d^2}{4}+\mu bd}\cdot p_{as}=\frac{\frac{0{,}6^2}{4}-0{,}1\cdot 0{,}025\cdot 0{,}6}{\frac{0{,}135^2}{4}+0{,}1\cdot\cdot 0{,}020\cdot 0{,}135}\cdot 1{,}373\cdot 10^6=$$

$$=2{,}52\cdot 10^7\ \text{N/m}^2=257\ \text{at.}$$

și respectiv

$$p_{\min}=\frac{\frac{D^2}{4}-\mu BD}{\frac{d^2}{4}+\mu bd}p_{ai}=1{,}98\cdot 10^7\ \text{N/m}^2=202\ \text{at.}$$

11.7. Să se dimensioneze o pompă cu piston cu simplă acțiune, destinată alimentării cu apă sub presiune. Debitul impus de procesul tehnologic este $Q=1{,}68\ \text{m}^3/\text{h}$, iar presiunea maximă de lucru este $p=20\ \text{daN/cm}^2$.

Rezolvare. a) Dimensiunile principale ale cilindrului pompei se determină din ecuația debitului

$$Q=60\,\eta_v k\frac{\pi D^2}{4}sn\ [\text{m}^3/\text{h}], \qquad (11.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care :

η este randamentul volumic, avînd valorile $\eta_v = 0{,}86 \ldots 0{,}95$ pentru apă curată şi $\eta_v = 0{,}8 \ldots 0{,}9$ pentru lichide vîscoase, dense, murdare ;

k — numărul de suprafeţe active ale pistonului ;

D — diametrul cilindrului (pistonului) pompei, în m ;

s — cursa pistonului, în m ;

n — numărul de curse duble pe minut (turaţia), în rot/min.

Se folosesc următoarele notaţii :

$\psi = \frac{s}{D}$ este raportul dintre cursa şi diametrul pistonului, avînd valori cuprinse între 1,3 şi 1,75 pentru pompe cu acţiune directă ;

$u = \frac{sn}{30}$ — viteza medie a pistonului, cuprinsă între 0,3 şi 0,6 m/s, pentru pompe cu acţiune directă.

Cu aceste notaţii relaţia (11.1) devine

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{60 \cdot \eta_v k \pi s n}} = \sqrt[3]{\frac{4Q}{60 \eta_v k \pi \psi n}} = \sqrt{\frac{Q}{60 \eta_v k \pi 30 u}}, \qquad (11.2)$$

Se adoptă : $k = 1$, $\eta_v = 0{,}9$, $\psi = 1{,}3$, $u = 0{,}27$.

Se calculează diametrul cilindrului pompei :

$$D = \sqrt{\frac{1{,}68}{60 \cdot 0{,}9 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 30 \cdot 0{,}27}} = 0{,}0583 \text{ m}.$$

Se adoptă o pompă avînd

$$D = 70 \text{ mm} ; \; s = \psi D = 1{,}3 \cdot 70 \approx 90 \text{ mm} ; \; n = \frac{30 \cdot u}{s} = \frac{30 \cdot 0{,}27}{0{,}09} = 90 \text{ rot/min}.$$

Pentru valoarea recomandată maximă $u = 0{,}6$ m/s, corespunde o turaţie maximă $n = \frac{30 \cdot 0{,}6}{0{,}09} = 200$ rot/min şi un debit maxim $\frac{200}{90} \cdot 1{,}68 = 3{,}7$ m³/h.

b) Puterea de antrenare a pompei :

$$N = \frac{\gamma Q H}{360 \cdot 102 \cdot \eta_p} = \frac{pQ}{3600 \cdot 102 \cdot \eta_p} = \frac{20 \cdot 10^4 \cdot 1{,}68}{3600 \cdot 102 \cdot 0{,}7} = 1{,}3 \text{ kW.},$$

pentru un randament al pompei ($\eta_p = 0{,}6 \ldots 0{,}8$) adoptat, egal cu 0,7.

Puterea de antrenare a pompei la debitul maxim ($Q = 3{,}7$ m³/h, cu $n = 200$ rot/min) este

$$N_{max} = \frac{Q_{max}}{Q} \cdot N = \frac{3{,}7}{1{,}68} \cdot 1{,}3 = 2{,}86 \text{ kW}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Determinarea dimensiunilor corpului pompei

Grosimea pereţilor cilindrilor se determină cu relaţia lui Bach pentru pereţi groşi :

$$e = \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{4\sigma_a + 3p}{4\sigma_a - 3p}} - 1\right) + k \text{ [cm]}, \qquad (11.3)$$

în care rezistenţa admisibilă pentru fontă se ia $\sigma_a = 300 \ldots 350$ daN/cm^2 iar k reprezintă un adaos care ia în considerare numărul de alezări ale cilindrului la reparaţii şi are valori cuprinse între 0,3 şi 1 cm (valorile mai mici sînt pentru cilindrii cu bucşă).

Prin urmare, grosimea pereţilor cilindrului, cu $\sigma_a = 300$ daN/cm^2

$$e = \frac{7}{2}\left(\sqrt{\frac{4 \cdot 300 + 3 \cdot 20}{4 \cdot 300 - 3 \cdot 20}} - 1\right) + (0{,}3 \ldots 1) = 0{,}175 + (0{,}3 \ldots 1) =$$

$$= 0{,}475 \ldots 1{,}175 \text{ [cm]}$$

Se adoptă $e = 0{,}5$ cm.

Grosimea bucşei este

$$e_b = 0{,}015 \cdot D + k = 0{,}015 \cdot 7 + (0{,}3 \ldots 1) = 0{,}405 \ldots 1{,}105 \text{ [cm]}.$$

Se adoptă $e_b = 0{,}5$ cm

Celelalte părţi ale corpului pompei se dimensionează în funcţie de mărimea m, numită modul :

$$m = e \ldots (e + 0{,}5) \text{ [cm]}.$$

Prin urmare

$$m = 0{,}5 \ldots 1 \text{ [cm]}.$$

Se adoptă $m = 0{,}5$ cm.

Grosimea capacului cilindrului $e_1 = 0{,}8 \cdot m = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$ cm.
Grosimea flanşei cilindrului $e_2 = (1{,}2 \ldots 1{,}4) \cdot m = 0{,}6$ cm.
Grosimea plăcii supapelor $e_3 = (1 \ldots 1{,}2) \cdot m = 0{,}5$ cm.

d) Calculul şuruburilor de strîngere a capacelor

Diametrul prezonului $d_p = 0{,}75 \cdot e_2 = 0{,}75 \cdot 0{,}6 = 0{,}45$ cm.
Se adoptă $d_p = 0{,}5$ cm.
Lăţimea flanşelor $b = (2{,}8 \ldots 3)\, d_p = 1{,}5$ cm.
Diametrul cercului centrelor prezoanelor

$$D_1 = D + b = 7 + 1{,}5 = 8{,}5 \text{ cm}.$$

Pe baza condiţiei de etanşeitate, se alege distanţa dintre centrele prezoanelor alăturate (pasul prezoanelor)

$$t = (2{,}5 \ldots 3) \cdot d_p = 1{,}25 \ldots 1{,}5 \text{ [cm]}$$

Se adoptă $t = 1{,}5$ cm.
Numărul de prezoane

$$z = \frac{\pi D_1}{t} = \frac{\pi \cdot 8{,}5}{1{,}5} = 17{,}8.$$

Se adoptă $z = 18$ prezoane.

Scanned with OKEN Scanner

Se stabileşte forţa care tinde să deschidă capacul

$$P = \frac{\pi D^2}{4} p = \frac{\pi}{4} \cdot 7^2 \cdot 20 = 770 \text{ daN}.$$

Pe baza forţei P se pote face un eventual calcul de verificare al şuruburilor, din punct de vedere al efortului unitar.

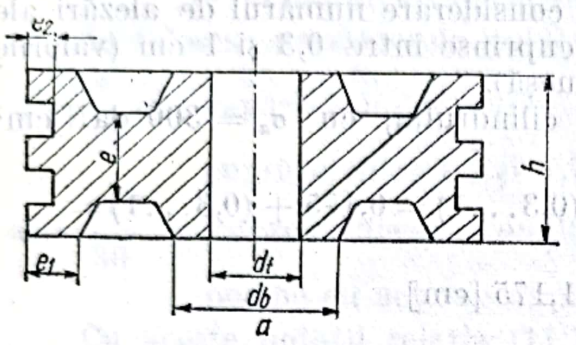


Fig. 11.7,a

e) Calculul pistonului

Se consideră un piston-disc, din fontă, cu două canale pentru segmenţi (fig. 11.7, *a*).

Grosimea pereţilor de piston se determină cu relaţia

$$e = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{kp}{\sigma_a}} \text{ [cm]}, \qquad (11.4)$$

în care rezistenţa admisibilă pentru fontă $\sigma_a = 200 \ldots 300$ daN/cm², iar k este un coeficient care depinde de raportul dintre diametrul tijei şi diametrul pistonului $\frac{d_t}{D}$.

k are valorile 2,5; 1,6; 1 şi 0,6 pentru $\frac{d_t}{D}$ avînd valorile corespunzătoare 0,2; 0,3; 0,4 şi 0,5.

Diametrul tijei pistonului

$$d_t = (0{,}2 \ldots 0{,}5) \cdot D = (0{,}2 \ldots 0{,}5) \cdot 7 = 2{,}1 \text{ cm}.$$

Prin urmare, se adoptă $d_t/D = 0{,}3$ şi $k = 1{,}6$.

Grosimea peretelui de piston, cu $\sigma_a = 250$ daN/cm²:

$$e = \frac{7}{2} \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 20}{250}} = 1{,}25 \text{ cm}.$$

Celelalte dimensiuni ale pistonului se determină în funcţie de modulul

$$m_1 = D\sqrt{p} = 7\sqrt{20} = 31{,}3.$$

Grosimea pereţilor circulari $e_1 = 0{,}016 \cdot m_1 = 0{,}5$ cm.

Adîncimea locaşurilor pentru segmenţi

$$e_2 = 0{,}009 \cdot m_1 = 0{,}28 \text{ cm}.$$

Diametrul butucului $d_b = (1{,}5 \ldots 2) \cdot d_t = (1{,}5 \ldots 2) \cdot 2{,}1 = 3{,}15 \ldots 4{,}2$ cm.

Înălţimea minimă a pistonului se determină cu relaţia

$$h = \frac{D}{10} \sqrt{\frac{50 \cdot p}{\sigma_a}}. \qquad (11.5)$$

Deci,

$$h = \frac{7}{10}\sqrt{\frac{50 \cdot 20}{250}} = 1{,}4 \text{ cm}.$$

f) Calculul supapelor

În figura 11.7, *b* este prezentată schema funcționării iar în figura 11.7, *c* este prezentat ansamblul supapei.

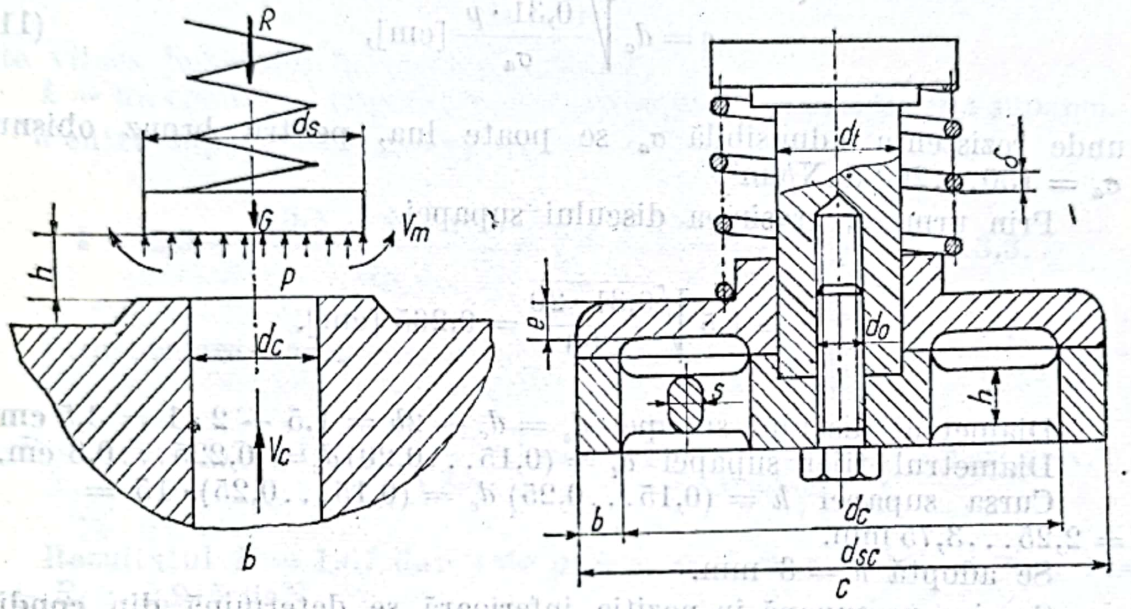


Fig. 11.7,b și c.

Debitul lichidului prin scaunul supapei este

$$Q = \frac{\pi d_c}{4} v_c,$$

de unde se obține relația de dimensionare:

$$d_c = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_c}} \text{ [m]}.$$

Viteza lichidului în scaunul supapei v_c se adoptă: 2...3,5 m/s, pentru supapa de aspirație și 2,5...4 m/s, pentru supapa de refulare.

Diametrul orificiului scaunului supapei:

— de aspirație

$$d_c = \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}68}{3600 \cdot \pi(2...3{,}5)}} = \frac{1}{\sqrt{3370...5900}} = 0{,}0172...0{,}013 \text{ m};$$

— de refulare

$$d_c = \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}68}{3600 \cdot \pi(2{,}5...4)}} = \frac{1}{\sqrt{4200...6750}} = 0{,}0154...0{,}0122 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se pot adopta orificii egale, avînd $d_c = 15$ mm.

Lăţimea suprafeţei de sprijin a supapei se ia

$$b = 0{,}8.\ \sqrt{d_c} = 0{,}8.\ \sqrt{1{,}5} = 0{,}98 \approx 1 \text{ cm}.$$

Grosimea discului supapei se determină după formula plăcilor plane circulare, încărcate cu o sarcină uniformă şi rezemate pe periferie

$$e = d_c \sqrt{\frac{0{,}31 \cdot p}{\sigma_a}} \text{ [cm]}, \tag{11.6}$$

unde rezistenţa admisibilă σ_a se poate lua, pentru bronz obişnuit, $\sigma_a = 150 \ldots 200$ daN/cm^2.

Prin urmare, grosimea discului supapei

$$e = 1{,}5 \sqrt{\frac{0{,}31 \cdot 20}{200}} = 0{,}265 \text{ [cm]}.$$

Diametrul discului supapei $d_s = d_c + 2b = 1{,}5 + 2 \cdot 1 = 3{,}5$ cm

Diametrul tijei supapei $d_t = (0{,}15 \ldots 0{,}20)\, d_c = 0{,}225 \ldots 0{,}3$ cm.

Cursa supapei $h = (0{,}15 \ldots 0{,}25)\, d_c = (0{,}15 \ldots 0{,}25) \cdot 15 = 2{,}25 \ldots 3{,}75$ mm.

Se adoptă $h = 3$ mm.

Sarcina pe supapă în poziţia inferioară se determină din condiţia ca supapa să se închidă fără lovituri :

$$G + R_i = 4{,}18 \frac{Q n f_s^2 \gamma}{d_s \mu^2 l^2} \tag{11.7}$$

în care : G este greutatea supapei în lichid ;

R_i — forţa arcului în poziţia inferioară a supapei ;

$f_s = \dfrac{\pi d_s^2}{4} = \dfrac{\pi}{4} 3{,}5^2 = 9.65$ cm^2 ;

$l = \pi d_s = \pi \cdot 3{,}5 = 11$ cm ;

μ — coeficientul de scurgere prin supapă, avînd valori :

$\mu = 0{,}870 \ldots 0{,}370$, pentru $h = 1 \ldots 18$ mm. Pentru $h = 3$ mm, $\mu = 0{,}65$.

Prin urmare,

$$G + R_i = 4{,}18 \frac{1{,}68 \cdot 90 \cdot 9{,}65^2 \cdot 10^{-8} \cdot 1000}{3600 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}65^2 \cdot 0{,}11^2} = 0{,}915 \text{ daN}.$$

Un calcul mai simplu al supapelor a fost elaborat pe baze experimentale stabilindu-se următoarea relaţie :

$$P = \gamma f_c \frac{v_c^2}{2g} \left[k + \left(\frac{d_c}{4 \mu h} \right)^2 \right], \tag{11.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$f_c = \frac{\pi d_c^2}{4} = \frac{\pi}{4}(1{,}5 \cdot 10^{-2})^2 = 1{,}77 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

este aria secţiunii scaunului supapei :

$$v_c = \frac{Q}{f_c} = \frac{1{,}68}{3600 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-4}} = 2{,}64\ \frac{m}{s}$$

este viteza lichidului în scaunul supapei ;

k — un coeficient experimental care depinde de construcţia supapei.

Pentru supapele cu ghidaj superior :

$$k = 2{,}5 + \frac{19(b - 0{,}1\, d_c)}{d_c} = 2{,}5 + \frac{19(1 - 0{,}1 \cdot 1{,}5)}{1{,}5} = 13{,}3.$$

Prin urmare, forţa care menţine supapa deschisă :

$$P = 1000 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2{,}64^2}{2 \cdot 9{,}81}\left[13{,}3 + \left(\frac{15}{4 \cdot 0{,}65 \cdot 3}\right)^2\right] = 1{,}07\ \text{daN}.$$

Rezultatul $P = 1{,}07$ daN este practic egal cu cel obţinut mai sus, $G + R_i = 0{,}915$ daN.

Sarcina pe supapă în poziţia superioară a acesteia se poate calcula cu formula

$$G + R_s = \frac{\gamma}{2g} f_s \left(\frac{\pi Q}{\mu l h_{max}}\right)^2. \qquad (11.9)$$

Prin urmare

$$G + R_s = \frac{1000}{2 \cdot 9{,}81} \cdot 9{,}65 \cdot 10^{-4}\left(\frac{\pi \cdot 1{,}68}{3600 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}11 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 2{,}3\ \text{daN}.$$

Valorile R_s, R_i vor permite dimensionarea arcului supapei.

11.8. Se consideră o acţionare hidrostatică avînd la bază o pompă volumică, pentru care se limitează presiunea de lucru la 50 daN/cm² şi un cilindru de lucru (motor hidraulic rectiliniu), căruia i se impune o forţă de lucru la tijă de 400 daN şi o viteză de execuţie de aproximativ 10 cm/s. Se cere : să se dimensioneze şi să se adopte un motor hidraulic rectiliniu dintr-o serie tipizată la noi în ţară ; să se adopte debitul necesar şi puterea hidraulică a pompei ; să se calculeze puterea motorului hidrostatic.

Indicaţii de calcul. Forţa totală la tija motorului hidrostatic este

$$F_t = F + R_p + R_t + F_c + F_i + G \qquad (11.10)$$

în care : F este forţa de lucru, utilă ;

Scanned with OKEN Scanner

R_p şi R_t — forţele de frecare (de etanşare) a pistonului şi tijei;

F_c — forţa de contrapresiune în cilindru, care apare în camera din spatele pistonului;

F_i — forţa de inerţie;

G — greutatea sau componenta greutăţii pe direcţia tijei motorului, în cazul lucrului într-o poziţie diferită de orizontală.

Forţele de frecare în etanşări pentru cilindrii cu dublu efect (considerăm o etanşare cu manşete profilate) se compun din frecarea de etanşare a pistonului

$$R_{pm} = \mu_{pm} \pi D b_{pm} p \qquad (11.11)$$

şi frecarea dintre tijă şi manşetele de etanşare ale capacului

$$R_{tm} = \mu_{tm} \pi d b_{tm} p, \qquad (11.12)$$

în care D este diametrul interior al cilindrului hidraulic, egal cu diametrul pistonului;

d — diametrul tijei;

p — presiunea de lucru (pentru presiuni sub 25 daN/cm² se consideră în calcul p = 25...50 daN/cm²)

b_{pm}, b_{tm} — lungimea suprafeţei de etanşare, adică lăţimea garniturii (la un diametru al tijelor egal cu 16...20 mm lăţimea manşetei se ia de 8...17 mm, iar grosimea $g = 2...4$ mm);

μ_{pm} — coeficientul de frecare (se alege în funcţie de materialul manşetei şi de condiţiile de lucru : în medie pentru calculele de orientare, în timpul mişcării de regim, $\mu_{pm} = 0{,}08$);

μ_{tm} — coeficientul de frecare, se alege în limitele 0,07...0,13, valorile mici pentru piele moale, iar cele mari pentru piele tăbăcită cu crom sau pentru manşete din policlorură de vinil.

Forţa F_c datorită contrapresiunii din spatele pistonului se determină în funcţie de caracteristicile circuitului hidraulic. Contrapresiunea este creată prin laminarea lichidului de lucru la ieşire, cu scopul de a se realiza o viteză de lucru uniformă. Contrapresiunea elimină şi posibilitatea pătrunderii aerului în cilindru.

La maşinile cu sarcini de lucru mici, contrapresiunea se ia egală cu 2...3 daN/cm².

La maşinile al căror organ de lucru este dispus vertical şi nu este echilibrat cu ajutorul unei contragreutăţi, contrapresiunea este determinată de greutatea G a părţilor mobile şi trebuie să fie cu 2...3 daN/cm² mai mare decît raportul G/S, în care S este suprafaţa de lucru a pistonului.

În cazul maşinilor de prelucrarea lemnului, în multe situaţii greutatea piesei ce se prelucrează poate fi neglijată, fiind mică.

Forţele de inerţie F_i, care apar în momentul demarării şi frînării, acţionează deci mai ales atunci cînd cilindrul de lucru nu exercită forţă de lucru. Pentru majoritatea cazurilor la maşinile din industria de prelucrare a lemnului, termenul inerţial poate fi neglijat în cadrul unui calcul preliminar.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. În primă instanţă, motorul hidraulic nefiind adoptat, nu se cunosc valorile D şi d, deci nu e posibilă determinarea forţei totale la tijă, care ar permite dimensionarea pistonului, în baza formulei.

$$D = 1{,}13\sqrt{\frac{F_t}{p}}.$$

În primă aproximaţie, se dimensionează motorul introducînd sub radical forţa de lucru necesară, cunoscută, F şi se majorează rezultatul cu 20...30%.

Prin urmare

$$D = (1{,}2\ldots 1{,}4)\,1{,}13\sqrt{\frac{F}{p}} = (1{,}2\ldots 1{,}3)\cdot 1{,}13\sqrt{\frac{400}{50}} = 4 \text{ cm}$$

(cu o majorare de 25%).

Se adoptă un motor hidraulic rectiliniu (cilindru de lucru) din serie grea, cu presiunea maximă $p_n = 160$ daN/cm², tipizat în două variante la noi în ţară, cu manşete profilate [9]. Se consideră prima tipodimensiune din varianta I, avînd $D = 40$ mm, $d = 25$ mm, cursa admisibilă maximă $c_{max} = 600$ mm.

Forţa de frecare a pistonului, cu formula (11.11) este

$$R_p = 0{,}08 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2{,}5 \cdot 50 = 126 \text{ daN} \quad (\text{cu } b = 25 \text{ mm}).$$

Forţa de frecare a tijei, cu formula (11.12), este

$$R_{tm} = 0{,}08 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 50 = 59{,}2 \text{ daN} \quad (\text{cu } b = 15 \text{ mm}).$$

Forţa de contrapresiune asupra pistonului este

$$F_c = p_c \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = (2\ldots 3)\frac{\pi}{4}(4^2 - 2{,}5^2) = 23 \text{ daN}$$

(cu $p_c = 3$ daN/cm²).

Forţa totală la tija motorului hidraulic, cu $F_i = 0$ şi $G = 0$, este

$$F_t = 400 + 126 + 59{,}2 + 23 = 608{,}2 \text{ daN}.$$

Se verifică dimensionarea pistonului

$$D = 1{,}13\sqrt{\frac{F_t}{p}} = 1{,}13\sqrt{\frac{608{,}2}{50}} = 3{,}94 \text{ cm} \approx 4 \text{ cm}.$$

Calculul debitului necesar al pompei, din condiţia asigurării vitezei de execuţie $v = 10$ cm/s :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} v = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} \cdot 10 = 126 \text{ cm}^3/\text{s} = 126 \cdot 10^{-3} \cdot 60 = 7{,}56 \text{ l/min}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate alege o pompă volumică rotitoare, de tipul cu roţi dinţate cu angrenare exterioară, cu pistonaşe axiale sau radiale ş.a. care să asigure

$$Q \approx 8 \text{ l/min (ulei mineral) şi } p = 50 \text{ daN/cm}^2.$$

Viteza de întoarcere a pistonului, la mersul în gol:

$$v_{gol} = \frac{4Q}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^3}{60 \cdot \pi \cdot (4^2 - 2{,}5^2)} = 17{,}5 \text{ cm/s}.$$

Puterea hidraulică (utilă) a pompei

$$P_h = \frac{pQ}{612} = \frac{50 \cdot 8}{612} = 0{,}655 \text{ kW}.$$

Puterea motorului hidrostatic rectiliniu

$$P_M = \frac{F \cdot v}{102} = \frac{400 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{102} = 0{,}393 \text{ kW}.$$

11.9. Se consideră o acţionare hidrostatică a unei maşini de burghiat şi canelat SVPA. Mecanismul de strîngere, compus din cilindri de lucru cu simplă acţiune, impun un debit de ulei maxim de 32 l/min., la o presiune în sistem: de lucru 8 daN/ m², maximă 10 daN/cm². Se cere: să se adopte o pompă volumică (hidrostatică) cu palete alunecătoare, cu asipiraţie exterioară, cu simplu efect; să se calculeze turaţia de antrenare, din condiţia de asigurare a debitului impus la presiunea de lucru maximă; să se calculeze forţa care acţionează asupra lagărelor pompei; să se calculeze puterea de antrenare a electromotorului pompei; să se calculeze momentul de torsiune la cupla pompei.

Indicaţii de calcul. Debitul specific al acestei pompe [11], este dat de relaţia

$$q = 2e[\pi(LD + 4\,bd) - azL] \cdot 10^{-6} \text{ [l/rot]}, \qquad (11.13)$$

în care D este diametrul interior al carcasei, în mm;
L — lăţimea paletelor, în mm;
d — diametrul cepurilor de conducere a paletei, în mm;
b — lungimea cepurilor, în mm;
a — grosimea paletelor, în mm;
z — numărul de palete;
e — excentricitatea, în mm.

Debitul pompei la turaţia de antrenare n_0 [rot/min], cu considerarea randamentului volumetric η_v, este

$$Q = \eta_v \cdot q \cdot n_0 \quad \text{[l/min]} \qquad (11.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

Randamentul pompei η_p este egal cu produsul celor trei randamente parțiale: randamentul volumic η_v, randamentul hidraulic η_h și randamentul mecanic η_m, deci

$$\eta_p = \eta_v \eta_h \eta_m \tag{11.15}$$

și depinde de debitul și presiunea de lucru a pompei.

Forța care acționează asupra lagărelor pompei se poate determina cu suficientă precizie pentru practică, din relația:

$$F = pDL \text{ [daN]}, \tag{11.16}$$

în care presiunea de lucru a lichidului p, se ia în daN/cm², iar D și L, în cm.

Puterea de antrenare a pompei, la electromotor, se determină cu relația

$$P = \frac{P \cdot Q}{612\,\eta_p} \text{ [kW]}, \tag{11.17}$$

cu p, în daN/cm² și Q în l/min.

Momentul de torsiune la arborele pompei (la cuplă) se determină cu formula

$$M = 716{,}2\frac{P}{n} \text{ [daN} \cdot \text{m]}, \tag{11.18}$$

cu P în C P (1 kW = 1,36 C P) și n în rot/min.

Rezolvare. Se adoptă o pompă cu palete alunecătoare cu aspirație exterioară, cu simplă acțiune, avînd următoarele date constructive: $D = 50$ mm, $L = 30$ mm, $d = 5$ mm, $b = 4$ mm, $a = 2$ mm, $z = 7$, $e = 5$ mm. Din *[13]* se estimează, pentru randamente, valorile: $\eta_v = 0{,}95$, $\eta_m = 0{,}69$, $\eta_h = 0{,}92$ și $\eta_p = 0{,}6$.

Pe baza relațiilor (11.13) și (11.14) se obține

$$n_0 = \frac{Q}{\eta_v \cdot q} = \frac{Q}{2e[\pi(LD + 4bd) - azL]\,\eta_v \cdot 10^{-6}} \left[\frac{\text{rot}}{\text{min}}\right],$$

$$n_0 = \frac{32 \cdot 10^6}{2 \cdot 5[\pi(30 \cdot 50 + 4.4.5) - 2.7.30]0{,}95} \approx 750 \text{ rot/min}$$

Cu relația (11.16) se obține

$$F_{max} = 10.5.3 = 150 \text{ daN}.$$

Cu relația (11.17) se obține

$$P = \frac{10.32}{612.0{,}6} = 0{,}87 \text{ kW} = 0{,}87.1{,}36 = 1{,}2 \text{ CP}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu relația (11.18) se obține

$$M = 716{,}2\frac{1{,}2}{750} = 1{,}15 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

11.10. Se consideră o acționare hidrostatică pentru ridicarea valțurilor unui gater. Mecanismul de ridicare și strîngere a valțurilor superioare de avans impune o presiune de lucru de 10 daN/cm² și un debit de ulei de 12 l/min.

Se cere: să se adopte o pompă volumică (hidrostatică) cu palete alunecătoare, cu aspirație exterioară, cu dublu efect; să se verifice debitul pompei; să se calculeze forța cu care paleta este presată pe stator, care determină forța de frecare în fantă; să se calculeze puterea de antrenare a electromotorului pompei; să se calculeze momentul de torsiune la cupla pompei.

Indicații de calcul. Debitul pompei de acest tip se poate calcula cu relația [13]

$$Q = 2b\left[\pi(r_2^2 - r_1^2) - \frac{(r_2 - r_1)\cdot s\cdot z}{\cos\alpha}\right] n\cdot\eta_v\cdot 10^{-6}\ [\text{l/min}], \qquad (11.19)$$

în care r_2 este semiaxa mare, în mm;
r_1 — semiaxa mică, în mm;
b — lățimea rotorului, în mm;
s — grosimea paletei, în mm;
z — numărul de palete;
α — unghiul de înclinare al paletei, în grade;
n — turația de antrenare, în rot/min.;
η_v — randamentul volumic al pompei.

Forța cu care acționează paleta pe stator poate fi calculată cu o aproximație satisfăcătoare, cu formula

$$F = p\cdot s\cdot b\ [\text{daN}] \qquad (11.20)$$

în care presiunea de lucru a lichidului, p, se ia în daN/cm², iar s și b, în cm.

Rezolvare. Se consideră o pompă cu palete alunecătoare, cu dublă acțiune, avînd următoarele date constructive: $r_2 = 25$ mm, $r_1 = 23$ mm $b = 30$ mm, $s = 2$ mm, $z = 12$, $\alpha = 10°$. Se consideră turația de antrenare $n = 960$ rot/min. Se estimează pentru randamente [13], valorile:

$$\eta_v = 0{,}96,\ \eta_m = 0{,}74,\ \eta_h = 0{,}914 \text{ și } \eta_p = \eta_v\cdot\eta_m\cdot\eta_h \approx 0{,}65.$$

Debitul pompei, în baza relației (11.19), rezultă

$$Q = 2.30\left[\pi(25^2 - 23^2) - \frac{(25-23)\cdot 2.12}{\cos 10°}\right] 960\cdot 0{,}96\cdot 10^{-6} = 13{,}8 \text{ l/min}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum debitul cerut pompei este de 12 l/min, pompa de mai sus se dovedește foarte potrivită, excesul de debit reprezentînd o rezervă necesară acoperirii pierderilor volumice prin neetanșeitățile (scăpări) mecanismului hidrostatic.

Forța de apăsare a paletei, conform relației (11.20) este

$$F = 10 \cdot 0{,}2 \cdot 3 = 6 \text{ daN}.$$

Puterea de antrenare a pompei, conform relației (11.17) este

$$P = \frac{10 \cdot 13{,}8}{612 \cdot 0{,}65} = 0{,}347 \text{ kW} = 0{,}347 . 1{,}36 = 0{,}472 \text{ CP}.$$

Momentul de torsiune al arborelui pompei (la cuplă), conform relației (11.18) este

$$M = 716{,}2 \frac{0{,}472}{960} = 0{,}352 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

11.11. Se consideră o acționare hidrostatică avînd la bază o pompă volumică rotitoare cu roți dințate cu angrenare exterioară cu dinți drepți FS—PR 3 21/80—2200 și un cilindru de lucru, care impune o presiune de lucru maximă de 30 daN/cm², în condiții de viteză de execuție variabilă.

Se cere : să se calculeze caracteristica de reglaj prin turație a debitului pompei, dacă turația de antrenare a pompei poate fi variată între limitele $n = 600 \ldots 2200$ rot/min ; să se calculeze puterea de antrenare maximă a pompei și momentul de torsiune maxim la cupla pompei.

Indicații de calcul. Debitul pompei de acest tip se poate calcula cu relația

$$Q = \eta_v \frac{2\pi L m^2 z n}{10^6 \cos^2 \beta} = \eta_v 2\pi L m^2 z n \cdot 10^{-6} \text{ [l/min]}, \qquad (11.21)$$

în care L este lățimea roților dințate, în mm ;

m — modulul roților dințate, în mm ;

z — numărul de dinți ;

β — unghiul de înclinare a danturilor (în cazul dinților drepți, $\beta = 0$, $\cos \beta = 1$) ;

n — turația de antrenare, în rot/min ;

η_v — randamentul volumic al pompei.

Rezolvare. Se consideră pompa FS—PR 3 21/80-2200, avînd următoarele date constructive : $L = 13{,}035$ mm, $m = 4$ mm, $z = 8$, $D_p = mz = 32$ mm.

Se estimează, pentru randamente, valorile cele mai defavorabile : $\eta_v = 0{,}82$ și $\eta_p = 0{,}73$

Debitul pompei, în limitele de turație precizate, variază după cum rezultă din relația :

$$Q = 0{,}82 \cdot 2.\pi \cdot 13{,}035 \cdot 32.4 \cdot (600 \ldots 2200) \cdot 10^{-6} = 5{,}15 \ldots 19 \text{ l/min}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Variația debitului cu turația este liniară.

Puterea de antrenare maximă a pompei, conform relației (11.17) este

$$P_{max} = \frac{p \cdot Q}{612\,\eta_p} = \frac{30 \cdot 19}{612 \cdot 0{,}73} = 1{,}28\ \text{kW} = 1{,}36 \cdot 1{,}28 = 1{,}73\ \text{CP}.$$

Momentul de torsiune maxim la arborele pompei (la cuplă), conform relației (11.18) este

$$M_{max} = 716{,}2\,\frac{P}{n} = 716{,}2\,\frac{1{,}73}{2200} = 0{,}564\ \text{daN} \cdot \text{m}.$$

11.12. Să se determine parametrii principali ai unei pompe cu membrană impunîndu-se un debit de lichid de 38,5 l/h, la o turație de antrenare a camei de 1400 rot/min, pentru o presiune maximă de 220 mm.Hg.

Se consideră figura 11.12 în care este prezentată schița de dimensionare a pompei cu membrană.

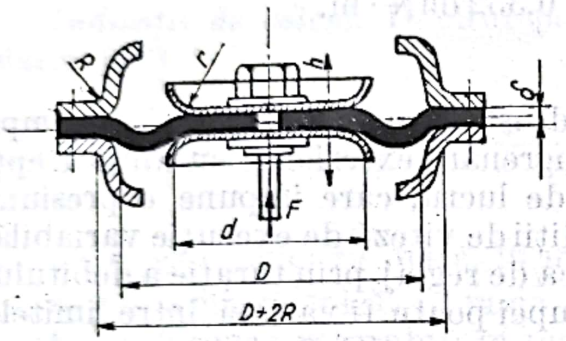


Fig. 11.12

Rezolvare. Debitul necesar de lichid pe un ciclu al pompei este

$$V_l = \frac{Q \cdot 10^6}{n \cdot 60} = \frac{38{,}5 \cdot 10^6}{1400 \cdot 60} = 456\ \text{mm}^3.$$

Presiunea de lucru maximă

$$p = \gamma_{Hg} \cdot h_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}220 = 3 \cdot 10^3\ \text{daN/m}^2 = 0{,}3\ \text{daN/cm}^2.$$

Se alege pentru cursa totală a tijei $h = 5$ mm. Valoarea cursei de lucru, la care pompa nu se mai utilizează, este $h_l = 0{,}1 \cdot h = 0{,}5$ mm.

Diametrul discului este dat de relația

$$d = \sqrt{\frac{4V_l}{\pi \cdot h_l}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 456}{\pi \cdot 0{,}45}} = 34{,}1\ \text{mm}.$$

Se ia $R = r = \dfrac{h}{2} = 2{,}5$ mm și $\delta = 0{,}5$ mm.

Diametrul interior al corpului pompei

$$D = d + 4r + 4\delta = 34{,}1 + 4 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 0{,}5 = 46{,}1\ \text{mm}.$$

Diametrul membranei în stare liberă (în stare montată și ondulată este D):

$$D_m = d + 2\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{D + 2R - d}{2}\right)^2} = 34{,}1 +$$

$$+ 2\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{46{,}1 + 5 - 34{,}1}{2}\right)^2} = 51{,}8\ \text{mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul de încărcare al membranei, cu $0 = d/D$, este

$$k_0 = \frac{1 + 0 + 0^2}{3} = \frac{1 + \frac{34,1}{46,1} + \left(\frac{34,1}{46,1}\right)^2}{3} = 0,763.$$

Forța de apăsare totală, în tijă, este

$$F = k_0 p \frac{\pi D^2}{4} = 0,763 \cdot 0,3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4,61^2 = 3,8 \text{ daN}.$$

Debitul volumic teoretic pe un ciclu al pompei este

$$V_t = \frac{\pi h}{12}(D^2 + d^2 + Dd) = \frac{\pi \cdot 5}{12}(46,1^2 + 34,1^2 + 46,1 \cdot 34,1) = 6385,5 \text{ mm}^3.$$

Debitul teoretic orar este

$$Q_t = V_t \cdot n_c \cdot 60 \cdot 10^{-6} = 6385,5 \cdot 1400 \cdot 60 \cdot 10^{-6} = 535 \text{ l/h}.$$

Dimensionarea pompei s-a făcut în baza indicației de a se asigura o diferență suficientă între debitul livrat și cel impus, de lucru, întrucît, în timpul funcționării, odată cu tendința de deplasare în sus a cursei de lucru, presiunea exercitată de arcul spiral se micșorează, ceea ce va determina și micșorarea debitului livrat.

Se admite funcționarea pompei pînă cînd cursa de lucru h devine egală cu cel puțin 0,1 h și, prin urmare, volumul teoretic la $h_t = 0,1 \cdot h$ trebuie să fie egal cu volumul de lichid corespunzător consumului maxim pe un ciclu de funcționare a pompei ($0,1 \cdot Qt = 53,5$ l/h $\geqslant$ Q, valoarea impusă fiind Q = 38,5 l/h).

Randamentul volumetric al pompei la cursa 0,1 h este

$$\eta_v = \frac{Q}{0,1 \cdot Q_t} = \frac{38,5}{53,5} = 0,72.$$

11.13. Se consideră un mecanism pneumatic cu membrană utilizat la fixarea articolelor sportive în timpul prelucrării avînd diametrul maxim al discului (corpului) $D = 72$ mm, diametrul discurilor centrale $d = 60$ mm (fig. 11.13). Presiunea de lucru p este cuprinsă între 170 și 220 mmHg. Se impun $n_c = 1200$ cicluri/oră. Cursa de realizat în dispozitivul de acționare se poate limita la $h = 5$ mm.

Se cere : Să se determine forța de apăsare totală, în tijă ; să se determine coeficientul de încărcare al membranei și diametrul membranei în stare liberă ; să se calculeze debitul necesar de agent de lucru, pentru asigurarea numărului de cicluri impus.

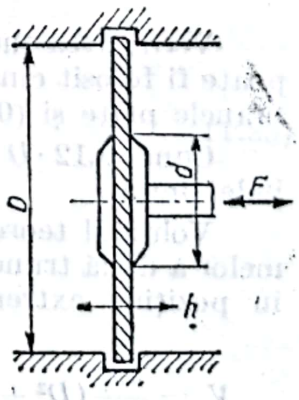


Fig. 11.13

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Presiunea de lucru

$$p = \gamma_{Hg} \cdot h_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3 (0{,}17 \ldots 0{,}22) = (2{,}3 \ldots 3) 10^3 \text{ daN/m}^2 =$$
$$= 0{,}23 \ldots 0{,}30 \text{ daN/cm}^2.$$

Forța totală de apăsare, în tijă

$$F = \frac{\pi p}{12}(D^2 + Dd + d^2) = \frac{\pi}{12}(0{,}23 \ldots 0{,}30)(7{,}2^2 + 7{,}2 \cdot 6 + 6^2) =$$
$$= 7{,}85 \ldots 10{,}2 \text{ daN}.$$

Coeficientul de încărcare al membranei, cu $\theta = d/D$, este

$$k_0 = \frac{F}{\frac{\pi D^2}{4} \cdot p} = \frac{1 + \theta + \theta^2}{3} = \frac{1 + \frac{60}{72} + \left(\frac{60}{72}\right)^2}{3} = 0{,}843.$$

Diametrul membranei D_m (în stare montată și ondulată devine D) în stare liberă, care asigură mișcarea membranei între limitele dimensiunilor arătate, se obține din relația

$$D_m = 2\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{D + 2R - d}{2}\right)^2} + d,$$

în care raza de recordare R a corpului se ia egală cu $0{,}5\,h$.

Prin urmare pentru $R = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$ mm,

$$D_m = 2\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{72 + 5 - 60}{2}\right)^2} + 60 = 77{,}7 \text{ mm}.$$

Verificarea cursei h, în baza recomandării că mecanismul cu membrană poate fi folosit cînd deplasarea tijei nu depășește $(0{,}12 \ldots 0{,}15)\,D$ la membranele plate și $(0{,}20 \ldots 0{,}25)\,D$ la membranele în formă de farfurie.

Cum $0{,}12 \cdot D = 0{,}12 \cdot 72 = 8{,}64$ mm și $h = 5$ mm, condiția este îndeplinită.

Volumul teoretic de lucru al mecanismului, V_t, egal cu suma volumelor a două trunchiuri de con care se formează cînd membrana se găsește în pozițiile extreme sus și respectiv jos:

$$V_t = \frac{\pi h}{12}(D^2 + d^2 + Dd) = \frac{\pi}{12} \cdot 0{,}5(7{,}2^2 + 6^2 + 7{,}2 \cdot 6) = 17 \text{ cm}^3/\text{ciclu}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Debitul necesar de agent de lucru, pentru asigurarea numărului de cicluri impus

$$Q_t = n_c V_t = 1200 \cdot 17 \cdot 10^{-3} = 20{,}4 \text{ l/h}.$$

11.14. Se consideră o pompă de vid cu inel de apă (fig. 11.14) cu următoarele caracteristici :

— presiunea la aspirație $p_a = 0{,}2$ daN/cm²;
— presiunea la refulare $p_y = 1{,}05$ daN/cm²
— distanța de la centrul rotorului pînă la limita dinspre interior a inelului lichid (la sfîrșitul perioadei de aspirație) ..... $r_x = 200$ mm;
— raza butucului rotorului $r_b = 90$ mm;
— turația de antrenare $n = 750$ rot/min;
— lungimea axială a rotorului $b = 500$ mm.

Să se calculeze debitul de aer aspirat și să se determine poziția orificiului de refulare din discul lateral.

Dacă pompa va trebui să funcționeze în regim de compresor, cu același debit, dar pentru condițiile :

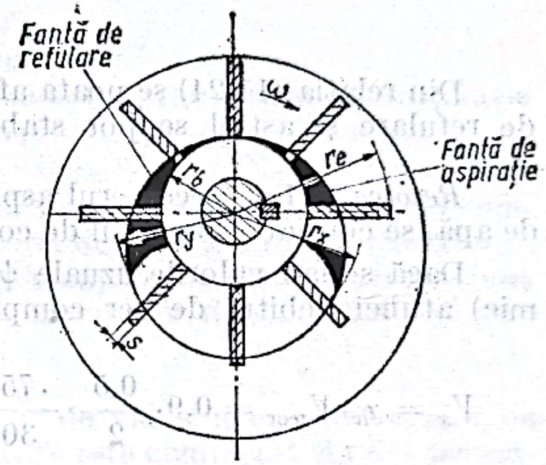


Fig. 11.14

$$p_x = 0{,}95 \text{ daN/cm}^2, \quad p_y = 2{,}00 \text{ daN/cm}^2,$$

Să se arate modificarea necesară a poziției orificiului de refulare din discul lateral.

Indicații de calcul. Folosind teorema lui Guldin, volumul descris în unitatea de timp de paletă la fiecare rotație este :

$$V_{x_{teor}} = \frac{b\omega}{2} \psi_x (r_x^2 - r_b^2) \text{ [m}^3\text{/s]}, \tag{11.22}$$

în care

$$\psi_x = \frac{t_m - s}{t_m} \tag{11.23}$$

S-au utilizat notațiile :

ψ_x este factorul de gîtuire a paletei;
b — lungimea axială a rotorului;
ω — viteza unghiulară rotorului;
t_m — pasul mediu al paletării;
s — grosimea paletelor.

Dacă se admite același factor de îngustare a paletelor, adică $\psi_x = \psi_y$ și dacă se notează

$$\frac{r_x}{r_b} = x \text{ și } \frac{r_y}{r_b} = y,$$

considerind procesul de comprimare politropic de exponent k, se obține relația

$$y^2 = (x^2 - 1)\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{k}} + 1. \qquad (11.24)$$

Din relația (11.24) se poata afla, în fiecare moment, valoarea presiunii de refulare și astfel se pot stabili dimensiunile carcasei.

Rezolvare. Deoarece aerul aspirat este în contact permanent cu inelul de apă, se consideră procesul de comprimare ca fiind izotermic, deci $k = 1$.

Dacă se iau valorile uzuale $\psi_x = 0{,}88$ și $\eta_v = 0{,}9$ (randamentul volumic) atunci debitul de aer comprimat este

$$V_x = \eta_v \cdot V_{teor} = 0{,}9 \cdot \frac{0{,}5}{2} \cdot \frac{\cdot 750}{30} \cdot 0{,}88 \cdot (0{,}2^2 - 0{,}09^2) = 0{,}4975 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Se calculează $\frac{p_x}{p_y} = \frac{0{,}2}{1{,}05} = 0{,}19$ și $x = \frac{r_x}{r_b} = \frac{200}{90} = 2{,}22$.

Din relația (11.24) rezultă

$$y = \sqrt{(x^2 - 1)\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{k}} + 1} = \sqrt{(2{,}22^2 - 1) \cdot 0{,}19 + 1} = 1{,}32$$

și începutul orificiului de refulare va fi la distanța

$$r_y = y \cdot r_b = 1{,}32 \cdot 90 = 119 \text{ mm}.$$

Dacă pompa va trebui să funcționeze în regim de compresor, pentru condiția

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475,$$

atunci

$$y = \sqrt{3{,}93 \cdot 0{,}475 + 1} = 1{,}69$$

și

$$r_y = 1{,}69 \cdot 90 = 152 \text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare rezultă, că, deşi debitul pompat rămîne acelaşi şi în cazul pompei şi în cazul compresorului, datorită presiunilor de refulare diferite, trebuie să se modifice poziţia orificiului de refulare din discul lateral.

11.15. Un compresor cu inel de lichid are următoarele caracteristici :
— debitul de aspiraţie $V_x = 0{,}117$ m³/s ;
— presiunea de aspiraţie $p_1 = 0{,}95$ daN/cm² ;
— presiunea de comprimare $p_2 = 3$ daN/cm² ;
— greutatea specifică a aerului aspirat la umiditatea aerului de 100 %
$\gamma_a = 1{,}163$ daN/m³ ;
— temperatura de aspiraţie $t = 20°C$;
— raza butucului $r_b = 72{,}5$ mm ;
— distanţa de la centrul rotorului pînă la capătul perioadei de aspiraţie
$r_x = 145$ mm ;
— randamentul total $\eta = 0{,}32$.

Să se calculeze puterea necesară de antrenare, la $n = 960$ rot/min. Să se studieze posibilitatea schimbării fantei de aspiraţie din discul lateral, în cazul cînd se pune condiţia ca acelaşi compresor să atingă o presiune finală $p_2' = 4$ daN/cm², fiind acţionat de un motor de 63,2 kW (86 CP) la 1450 rot/min.

Indicaţii de calcul. În cazul pompelor de vid şi a compresoarelor cu inel de lichid, datorită inelului de lichid, care este completat şi răcit permanent se poate considera transformarea ca fiind izotermică.

Puterea necesară la arborele pompei va fi :

$$N = \frac{\gamma_a V_x R T_1 \ln \frac{p_2}{p_1}}{102\,\eta} \text{ [kW]}, \tag{11.25}$$

în care R este constanta caracteristică a gazului, în cazul aerului avînd valoarea $R = 29{,}27$ m/grd.

Randamentul total al acestor pompe este de ordinul $\eta = 0{,}3 \ldots 0{,}5$.

Dacă turaţia pompei creşte, se obţine un volum aspirat V_x' mai mare şi o presiune finală p_2' mai ridicată.

Considerînd acelaşi factor de îngustare a paletei $\psi_x = \psi_x'$, rezultă

$$\frac{V_x}{V_x'} = \frac{n}{n'} \tag{11.26}$$

şi

$$\frac{N}{N'} = \frac{n(r_x^2 - r_b^2) \ln \frac{p_2}{p_1}}{n'(r_{x'}^2 - r_b^2) \ln \frac{p_2'}{p_1}}. \tag{11.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

Debitul aspirat depinde însă și de mărimea fantei de aspirație. Pentru fante de aspirație diferite și pentru turații diferite rezultă

$$\frac{V_x}{V'_x} = \frac{n(r_x^2 - r_b^2)}{n'(r_{x'}^2 - r_b^2)}. \tag{11.28}$$

Rezolvare. Puterea necesară la arborele motorului de antrenare al compresorului, conform (11.25) este

$$N = \frac{1{,}163 \cdot 0{,}117 \cdot 29{,}27 \cdot (273 + 20) \cdot 2{,}3 \log \dfrac{3}{0{,}95}}{102 \cdot 0{,}32} = 41{,}2 \text{ kW} = 56 \text{ CP}.$$

Se pune condiția ca același compresor să atingă o presiune finală $p'_2 = 4$ daN/cm², fiind acționat de un motor de 63,2 kW (86 CP) la 1450 rot/min. Pentru acest motor este necesară schimbarea fantei de aspirație din discul lateral.

Considerînd același randament, din relația (11.27) se determină r'_x:

$$r'_x = \sqrt{\frac{N'n}{Nn'}(r_x^2 - r_b^2)\frac{\ln \dfrac{p_2}{p_1}}{\ln \dfrac{p'_2}{p_1}} + r_b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{86 : 960}{56 \cdot 1450}(14{,}5^2 - 7{,}25^2)\frac{\ln \dfrac{3}{0{,}95}}{\ln \dfrac{4}{0{,}95}} + 7{,}25^2} = 13{,}5 \text{ cm}.$$

După cum rezultă, distanța r'_x este mai mică decît distanța r_x. Debitul V'_a aspirat prin fanta modificată este:

$$V'_a = V_x \frac{n'(r_{x'}^2 - r_b^2)}{n(r_x^2 - r_b^2)} = 0{,}117 \frac{1450(13{,}5^2 - 7{,}25^2)}{960(14{,}5^2 - 7{,}25^2)} = 0{,}145 \text{ m}^3/\text{s},$$

Prin urmare, deși r_x s-a micșorat, datorită măririi turației de la 960 la 1450 rot/min, debitul aspirat va fi mai mare.

Dacă se păstrează fanta inițială, adică $r'_x = r_x$ atunci

$$V'_a = \frac{n'}{n} V_x = \frac{1450}{960} 0{,}117 = 0{,}177 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Deci păstrînd fanta, debitul a crescut în raport cu turația de la 0,117 la 0,177 m³/s.

Puterea necesară în acest caz va fi :

$$N' = \frac{n'}{n} \cdot N \cdot \frac{\ln \frac{p_2'}{p_1}}{\ln \frac{p_2}{p_1}} = \frac{1450}{960} \cdot 56 \cdot \frac{\ln \frac{4}{0{,}95}}{\ln \frac{3}{0{,}95}} = 106 \text{ CP} = 78 \text{ kW}.$$

Dacă se pune condiţia ca acelaşi compresor să păstreze debitul aspirat $V_x = 0{,}117$ m³/s la presiunea $p_2' = 4$ daN/cm², atunci fanta de aspiraţie se va modifica. Din relaţia (11.28) se determină r_x' :

$$r_x' = \sqrt{\frac{n}{n'} \frac{V_x'}{V_x} (r_x^2 - r_b^2) + r_b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{960}{1450} \cdot \frac{0{,}177}{0{,}117} (14{,}5^2 - 7{,}25^2) + 7{,}25^2} = 12{,}55 \text{ cm}.$$

Puterea necesară pentru acelaşi V_x la o fantă modificată cu $r_x' = 125{,}5$ mm şi turaţia mărită la 1450 rot/min, este :

$$N' = N \frac{n'}{n} \frac{(r_{x'}^2 - r_b^2) \ln \frac{p_2'}{p_1}}{(r_x^2 - r_b^2) \ln \frac{p_2}{p_1}} = 65 \frac{1450}{960} \frac{(12{,}44^2 - 7{,}25^2) \ln \frac{4}{0{,}95}}{(14{,}5^2 - 7{,}25^2) \ln \frac{3}{0{,}95}} =$$

$$= 70 \text{ CP} = 51{,}5 \text{ kW}.$$

11.16. Se consideră o pompă de vid cu inel de lichid cu următoarele caracteristici

— turaţie de antrenare $n = 1000$ rot/min ;
— diametrul rotorului $d_e = 300$ mm ;
— presiunea maximă $p_2 = 1$ 0,5 m.col.apă ;
— presiunea minimă $p_1 = 1$ m.col.apă.

Să se verifice viteza fluidului, în cazul pompei cu inel de apă, v_2 şi să se calculeze turaţia minimă a pompei din condiţia $v_2 = 0$

Indicaţii de calcul. După Pfleiderer, în spaţiul în formă de seceră cuprins între diametrul exterior al rotorului şi carcasă există o scurgere liberă. Conform teoremei lui Bernoulli, dacă în spaţiul de refulare într-un punct 2 oarecare presiunea creşte prea mult şi prin urmare viteza v_2 ajunge la o valoare prea mică, atunci, în inelul de lichid, apar umflări, vîrtejuri, ceea ce duce la creşterea pierderilor şi la micşorarea randamentelor hidraulic şi volumic. Din acest motiv viteza v_2 trebuie să fie totdeauna mai mare ca zero.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema energiei (Bernoulli), aplicată în cazul de față, este

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_e^2}{2g} - \frac{p_2 - p_1}{2\gamma} - \frac{h_w}{2} \text{ [m]}. \qquad (11.29)$$

În primă instanță, pierderea de sarcină h_w se neglijează.

Rezolvare. Pentru cazul pompei cu inel de apă rezultă :

$$\frac{p_2 - p_1}{2\gamma} = \frac{10 \cdot 500 - 1000}{2 \cdot 1000} = 4{,}75 \text{ m}.$$

Viteza periferică

$$v_e = \frac{\pi d_e n}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}3 \cdot 1000}{60} = 15{,}70 \text{ m/s}.$$

Energia cinetică este :

$$\frac{v_e^2}{2g} = \frac{15{,}7^2}{2 \cdot 9{,}81} = 12{,}5 \text{ m}.$$

$$\frac{v_2^2}{v_e^2} = 1 - \frac{\frac{p_2 - p_1}{2\gamma}}{\frac{v_e^2}{2g}} = 1 - 0{,}38,$$

deci $v_2^2 = 0{,}62\, v_e^2$,
sau $v_2 - 0{,}78 \cdot v_e = 0{,}78 \cdot 15{,}70 = 12{,}25$ m/s.

Viteza minimă, din condiția $v_2 = 0$, pusă în relația (11.29) rezultă

$$v_{min} = \sqrt{g \frac{p_2 - p_1}{\gamma}} = 9{,}81 \cdot 9{,}5 = 9{,}65 \text{ m/s}.$$

Turația minimă a pompei este

$$n_{min} = \frac{60 \cdot v_{min}}{\pi d_e} = \frac{60 \cdot 9{,}65}{\pi \cdot 0{,}3} = 615 \text{ rot/min}.$$

11.17. Să se determine viteza de propagare a undelor de presiune (lovitura de berbec) și suprapresiunea maximă produsă de închiderea bruscă a vanei, dacă apa are viteza inițială $v_0 = 5$ m/s într-o conductă cu diametrul $d = 500$ mm, în două ipoteze :

a) Conducta este din oțel cu modulul de elasticitate $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm² ;

b) Conducta este din fontă cu $E = 10^6$ daN/cm².

Scanned with OKEN Scanner

Modulul de elasticitate al apei este $\varepsilon = 2{,}1 \cdot 10^4$ daN/cm².

Rezolvare. Conductele standardizate din oţel şi din fontă au respectiv grosimea pereţilor

$$\delta = 7{,}6 \text{ mm şi } 10{,}3 \text{ mm.}$$

a) Pentru conducta de oţel, cu formula lui J u k o v s k i

$$a = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E}\frac{d}{\delta}}} = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{2{,}1 \cdot 10^4}{2{,}1 \cdot 10^6} \cdot \frac{500}{7{,}6}}} = 1153 \text{ m/s};$$

$$\Delta p_{max} = \rho a v_0 = 1000 \cdot 1153 \cdot 5 = 5{,}765 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 57{,}65 \text{ bari}$$

b) pentru conducta de fontă,

$$a = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{2{,}1 \cdot 10^4}{10^6} \cdot \frac{500}{10{,}3}}} = 1107 \text{ m/s};$$

$$\Delta p_{max} = 1000 \cdot 1107 \cdot 5 = 5{,}535 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 55{,}35 \text{ bari.}$$

11.18. Un hidromonitor cu diametrul secţiunii de intrare $d_1 = 250$ mm şi al ajutajului $d_3 = 100$ mm (fig. 11.18) primeşte apa dintr-o coloană orizontală la presiunea $p = 13$ ata. Să se determine forţele preluate de

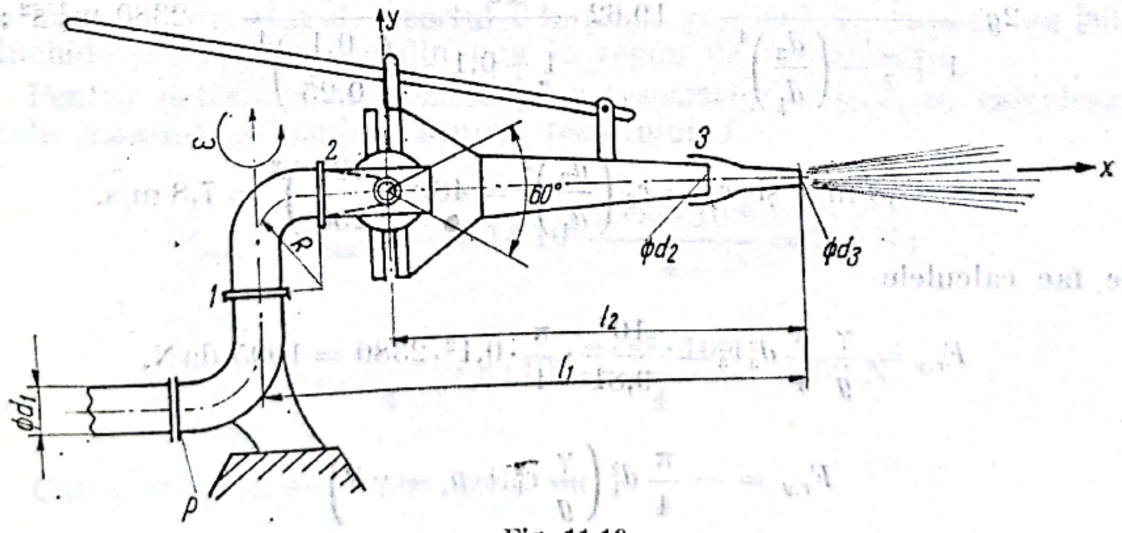


Fig. 11.18

articulaţia 2 care face joncţiunea coloanei cu dispozitivul ajutajului. Diametrul la intrarea în ajutaj este $d_2 = 150$ mm, lungimile racordurilor sînt $l_1 = 3000$ mm şi $l_2 = 2300$ mm, iar raza de curbură a cotului $R = 400$ mm. Sarcinile datorite greutăţilor se neglijează, dar se ţine seama de rezistenţele în ajutaj pentru $\zeta = 0{,}1$ coeficientul de contracţie fiind $\psi \approx 1$ (se neglijează contracţia)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Aplicînd teorema forțelor de impuls, pe suprafața de control dintre secțiunile *1* și *3*

$$\rho \dot{V}(\bar{v}_3 - \bar{v}_1) = \bar{F}_{p1} - \bar{F}_{p3} + \bar{F}_r,$$

proiecțiile reacțiunii din articulația *2* sînt

$$F_{r,x} = \rho \dot{V} v_3 = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{4} d_3^2 v_3^2, \; F_{p3} = 0 \text{ (jetul este lansat în atmosferă)};$$

$$F_{r,y} = -\left(\rho \dot{V} v_1 + p_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \right) = -\frac{\pi}{4} d_1^2 \left(\frac{\gamma v_1^2}{g} + p_s - \gamma R \right).$$

Viteza v_3 se obține din teorema energiei (Bernoulli)

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_3^2}{2g}(1 + \zeta) + \frac{p_{at}}{\gamma}$$

iar

$$p_1 = p - \gamma R \text{ sau } p_{s1} = p - p_{at} - \gamma R$$

și

$$v_1 d_1^2 = v_3 d_3^2,$$

deci

$$v_3^2 = 2g \frac{\frac{p - p_{at}}{\gamma} - R}{1 + \zeta - \left(\frac{d_3}{d_1} \right)^4} = 19{,}62 \frac{\frac{13 - 1{,}082}{10^3} \cdot 10^4 - 0{,}4}{1 + 0{,}1 - \left(\frac{0{,}1}{0{,}25} \right)^4} = 2380 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$

$$v_3 = 48{,}8 \text{ m/s} \text{ și } v_1 = v_3 \left(\frac{d_3}{d_1} \right)^2 = 48{,}8 \left(\frac{100}{250} \right)^2 = 7{,}8 \text{ m/s}.$$

Se fac calculele

$$F_{r,x} = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{4} d_3^2 v_3^2 = \frac{10^3}{9{,}81} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}1^2 \cdot 2380 = 1905 \text{ daN},$$

$$F_{r,y} = -\frac{\pi}{4} d_1^2 \left(\frac{\gamma}{g} v_1^2 + p_s - \gamma R \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} 0{,}25^2 \left(\frac{10^3}{9{,}81} \cdot 7{,}8^2 + 119{,}28 \right) = -301 \text{ daN}.$$

Momentul care solicită flanșa *1* este

$$M_2 = R F_{r,x} = 0{,}4 \cdot 1905 = 764 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

11.19. În figura 11.19 este prezentată schema regulatorului automat de scoatere din funcțiune a unei pompe.

Să se determine rezistențele resoartelor *1* și *2* ale regulatorului pentru următoarele condiții

$$p_{max} = 14 \text{ MN/m}^2;\ p_{min} = 8 \text{ MN/m}^2,\ d = 8 \text{ mm},\ l = 16 \text{ mm},\ D = 10 \text{ mm},$$
$$a = 2 \text{ mm},\ d_1 = 6 \text{ mm}.$$

Rezolvare. Cînd sistemul nu consumă lichid, pompa încarcă acumulatorul hidraulic *4* pînă la presiunea p_{max} la care pistonul d deschide supapa de trecere a lichidului către camera *A*.

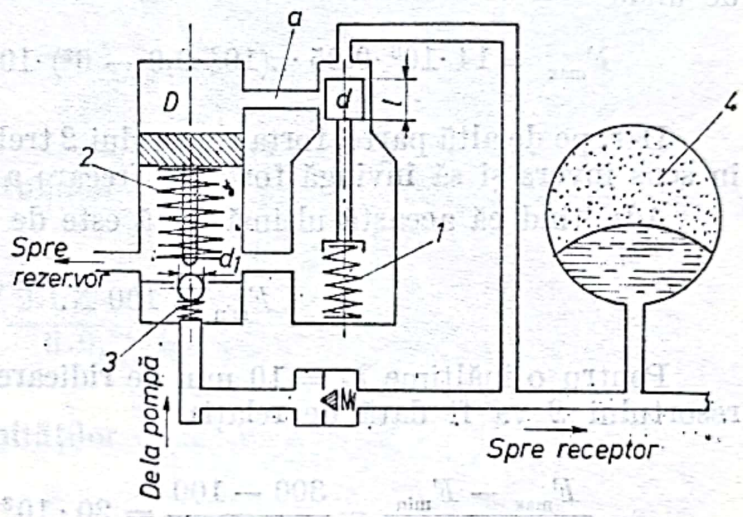


Fig. 11.19

Sub acțiunea presiunii p_{max}, pistonul D se deplasează și, cu tija sa, deschide supapa cu bilă, care leagă conducta de refulare a pompei de aceea de întoarcere în rezervor.

Pompa trece la funcționarea în gol pînă ce presiunea în sistem scade și devine egală cu p_{min}; la această presiune a pistonul d se deplasează în sus, punînd în legătură camera *A* cu conducta de întoarcere în rezervor; atunci, resortul *2* împinge pistonul D, supapa cu bilă se închide și pompa trece din nou în regim de funcționare.

Pentru determinarea rezistențelor resoartelor *1* și *2*, se calculează forțele maximă și minimă asupra resortului *1*

$$P_{max} = p_{max}\frac{\pi d^2}{4} = 14.10^6\frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 10^{-6}}{4} = 704 \text{ N};$$

$$P_{min} = p_{min}\frac{\pi d^2}{4} = 8 \cdot 10^6\frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 10^{-6}}{4} = 402 \text{ N}.$$

Cursa resortului *1* este egală cu

$$h_1 = l - a = 16 - 2 = 14 \text{ mm},$$

iar rezistența resortului *1* este dată de

$$\frac{P_{max} - P_{min}}{h_1} = \frac{704 - 402}{10^{-3} \cdot 14} = 21{,}6 \cdot 10^3 \text{ N/m} = 21{,}6 \text{ kN/m}.$$

Pentru ca supapa cu bilă să fie deschisă, trebuie ca forța de presiune care acționează asupra pistonului D să fie superioară sumei dintre forța resortului *2*, forța de frecare pe piston, forța care acționează pe supapa cu bilă și forța resortului *3*. Considerînd forța de frecare pe piston ca fiind egală cu 10 % din forța de presiune și forța Q a resortului *3* fiind de ordinul a 300 N, se obține ecuația care permite determinarea forței maxime F_{max} pe resortul *2*:

$$p_{max}\frac{\pi D^2}{4}\cdot 0{,}9 = F_{max} + p_{max}\frac{\pi d_1^2}{4} + Q,$$

de unde

$$F_{max} = 14\cdot 10^6\cdot 0{,}25\cdot\pi(10^2\cdot 0{,}9 - 6^2)\cdot 10^{-6} - 300 = 300 \text{ N}.$$

Dar, pe de altă parte, forța resortului *2* trebuie să deplaseze pistonul D în sens invers și să învingă forța de frecare a pistonului descărcat.

Admițînd că această ultimă forță este de ordinul a 100 N, se obține

$$F_{min} = 100 \text{ N}.$$

Pentru o înălțime $h_2 = 10$ mm de ridicare a pistonului D, rezistența resortului *2* va fi dată de relația

$$\frac{F_{max} - F_{min}}{h_2} = \frac{300 - 100}{10\cdot 10^{-3}} = 20\cdot 10^3 \text{ N/m} = 20 \text{ kN/m}.$$

11.20. În regulatorul unei turbine, mecanismul sensibil este un pendul centrifug cu releu hidraulic. Prin variația turației se modifică regimul pompei de ulei, deci și forța de presiunea care deformează resortul elicoidal din cilindru, transmițînd astfel comanda de reglaj la distribuitor (fig. 11.20). Să se determine raza r a tubului calibrat, de lungime l=0,7 m., presupus rectiliniu, astfel ca la debitul nominal al pompei, $\dot{V} = 0{,}39$ l/s, comprimarea resortului să fie f=60 mm. Caracteristica elastică a resortului este constantă $C = 0{,}75$ kgf/cm. Se mai dau : vîscozitatea uleiului $\eta = 0{,}3$ P și diametrul pistonului $D = 18$ mm. Rezistența în tubul de alimentare se neglijează.

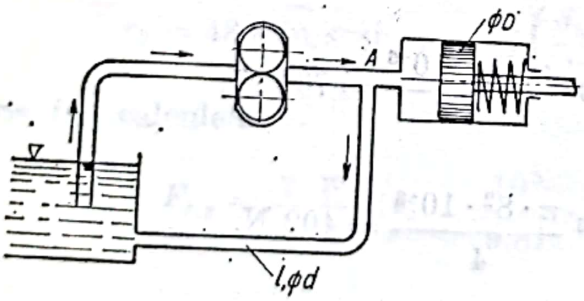


Fig. 11.20

Rezolvare. Fie p presiunea în punctul A de remificație

$$p = \frac{4F}{\pi D^2} = \frac{4fC}{\pi D^2}.$$

Pe de altă parte, în mișcarea laminară (Hagen-Poiseuille)

$$\dot{V} = \pi \frac{p_1 - p_2}{8l\eta} r_0^4 = \pi \frac{p}{8l\eta} r^4,$$

de unde rezultă

$$p = \frac{8l\eta}{\pi r^4} V.$$

Egalînd cele două expresii ale presiunii, se obține

$$\frac{4fC}{\pi D^2} = \frac{8l\eta}{\pi r^4} V,$$

de unde se deduce raza tubului

$$r = \sqrt[4]{\frac{2\eta l \dot{V} D^2}{fC}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 0{,}3 \cdot 70 \cdot 390 \cdot 1{,}8^2}{6 \cdot 0{,}75 \cdot 981000}} = 0{,}33 \text{ cm} = 3{,}3 \text{ mm}.$$

Pentru convertirea unităților de măsură, s-au considerat

$$\eta = 0{,}3 \; P = \frac{0{,}3}{981\,000} \text{ kgf} \cdot \text{s/cm}^2$$

și

$$\dot{V} = 0{,}39 \frac{l}{s} = 390 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

11.21. În figura 11.21 este reprezentat un dispozitiv pentru comanda hidraulică a unei vane de închidere într-o conductă forțată. Să se determine diametrul d al pistonului motor, cunoscînd diametrul conductei $D = 1500$ mm, presiunea statică în conductă $p = 10^5$ N/m² și greutatea părților mobile $G = 15 \cdot 10^3$ N. Se consideră că forța de frecare între piston și cilindru este 5% din greutatea părților mobile. Coeficientul de frecare în etanșările vanei este $\mu = 0{,}15$.

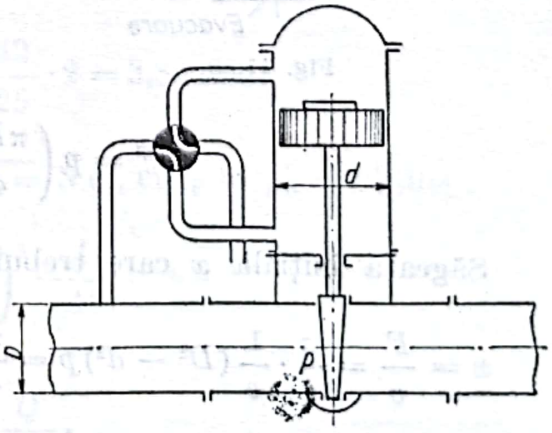


Fig. 11.21

Rezolvare. Dispozitivul trebuie dimensionat pentru situația cea mai dificilă de funcționare, atunci cînd vana, fiind complet închisă, trebuie ridicată.

Forţa hidrostatică exercitată asupra vanei, $F = p\dfrac{\pi d^2}{4}$, este echilibrată de forţa de frecare în etanşeităţile vanei

$$F_1 = \mu F' = \mu p \frac{\pi D^2}{4},$$

forţa de frecare între piston şi cilindru

$$F_2 = 0{,}05 \cdot G$$

şi greutatea G a părţilor mobile

$$F = F_1 + F_2 + G,$$

sau

$$p\frac{\pi d^2}{4} = \mu p \frac{\pi D^2}{4} + 0{,}05 \cdot G + G.$$

Rezultă

$$d = \sqrt{\mu D^2 + \frac{4G}{p\pi}(0{,}05 + 1)} = 0{,}650 \text{ m}.$$

11.22. Supapa de siguranţă a unui rezervor tampon reprezentată în figura 11.22 trebuie să se deschidă în momentul în care presiunea atinge valoarea de $2 \cdot 10^6$ N/m². Cunoscînd diametrele pistonului $d = 18$ mm, $D = 25$ mm şi valoarea constantei resortului $C = 15 \cdot 10^3$ N/m, se cere să se determine săgeata iniţială care trebuie dată resortului.

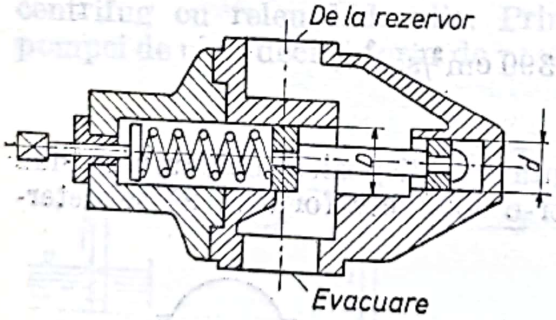


Fig. 11.22

Rezolvare. Forţa elastică a resortului F este echilibrată de rezultanta forţelor de presiune exercitate asupra pistonului

$$F = p\left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right).$$

Săgeata iniţială x care trebuie dată resortului este:

$$x = \frac{F}{c} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{c}(D^2 - d^2)p = \frac{\pi}{4}\frac{1}{15 \cdot 10^3}(0{,}025^2 - 0{,}018^2) \cdot 2 \cdot 10^6 =$$

$$= 0{,}0315 \text{ m} = 31{,}5 \text{ mm}.$$

11.23. Un ventil de siguranţă cu diametrul $d' = 25$ mm permite scurgerea unui debit de ulei $Q' = 5$ l/s datorită diferenţei de presiune $\delta p' = p_1' - p_2' = 10$ daN/cm², dopul fiind ridicat cu $h' = 2$ mm deasupra scaunului (fig. 11.23). Forţa de presiune asupra ventilului este $F' = 15$ daN. Cum trebuie modificat diametrul ventilului pentru ca mărind diferenţa de presiune δp de două ori, debitul de ulei să fie de patru ori mai mare? Să se determine ridicarea h şi forţa de presiune F în această situaţie.

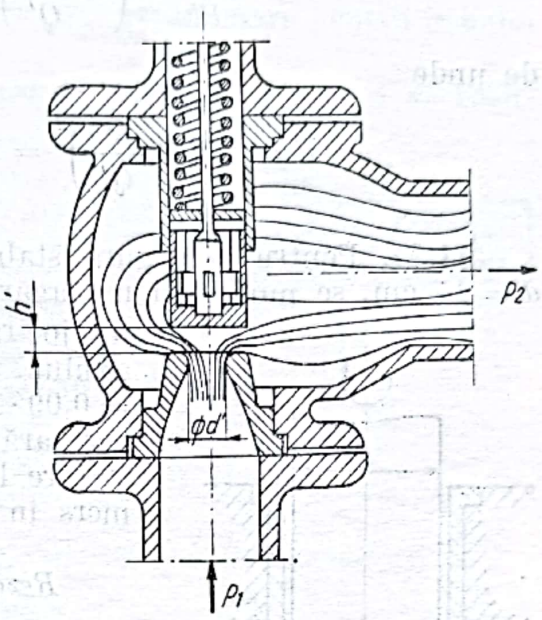


Fig. 11.23

Rezolvare. Din scara debitelor

$$\frac{Q'}{Q} = \lambda^2 \frac{v'}{v},$$

se obţine

$$\lambda = \frac{d'}{d} = \sqrt{\frac{Q'}{Q} \cdot \frac{v}{v'}},$$

deci

$$d = d' \sqrt{\frac{Q}{Q'} \cdot \frac{v'}{v}}.$$

Din criteriul presiunilor (E u l e r), E u = E u', cu $\rho = \rho'$, se obţine

$$\frac{\delta p'}{\delta p} = \left(\frac{v'}{v}\right)^2.$$

Rezultă

$$d = d' \sqrt{\frac{Q}{Q'} \sqrt{\frac{\delta p'}{\delta p}}} = 25 \sqrt{4 \sqrt{\frac{1}{2}}} = 25 \frac{2}{\sqrt[4]{2}} = 42 \text{ mm},$$

$$h = \frac{h'}{\lambda} = \frac{d}{d'} h' = \frac{42}{25} \cdot 2 = 3{,}35 \text{ mm}.$$

Din criteriul forţelor (N e w t o n), N e = N e', cu $\rho = \rho'$, se obţine

$$\frac{F}{F'} = \left(\frac{v}{v'}\right)^2 \cdot \frac{A}{A'}.$$

Dar

$$\frac{v}{v'} = \lambda^2 \frac{Q}{Q'},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\frac{F}{F'} = \left(\lambda^2 \frac{Q}{Q'}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} = \lambda^2 \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2,$$

de unde

$$F = F'\lambda^2 \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 = 15 \left(\frac{25}{42}\right)^2 4^2 = 85{,}5 \text{ daN}.$$

11.24. Pentru a asigura stabilitatea unui ax vertical de diametru $d = 15$ cm, se montează un lagăr de sprijin de lungime $l = 25$ cm., cu un joc radial $\varepsilon_r = 0{,}01$ cm (fig. 11.24). Ungerea axului se face cu ulei de vîscozitate $\eta = 0{,}09 \cdot 10^{-6}$ kgf · s/cm². Să se determine puterea necesară pentru învingerea rezistențelor de frecare la o turație $n = 200$ rot/min (regim de mers în gol).

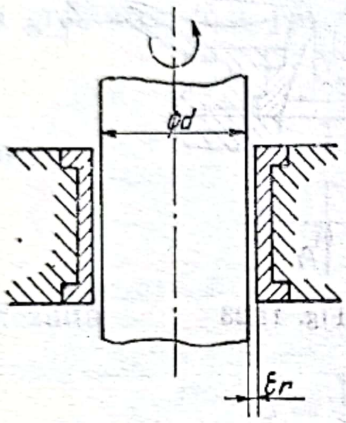


Fig. 11.24

Rezolvare. Forța de frecare este

$$F = \tau \pi l d,$$

în care

$$\tau = \eta \frac{dv}{dr} = \eta \frac{v_0}{\varepsilon_r} = \frac{\eta}{\varepsilon_r} \omega \frac{d}{2} = \frac{\eta}{\varepsilon_r} \frac{\pi n d}{60},$$

deci

$$F = \eta \frac{v_0}{\varepsilon_r} \pi l d.$$

Momentul acestei forțe are expresia

$$M = \frac{d}{2} F = \eta \frac{v_0}{\varepsilon_r} \pi l \frac{d}{2} = \frac{\pi}{2} \eta \frac{d^2 l}{\varepsilon_r} v_0.$$

Rezultă puterea

$$P = M\omega = \frac{\pi}{2} \eta \frac{d^2 l}{\varepsilon_r} v_0 \omega = \frac{\pi}{4} \eta \frac{d^3 l}{\varepsilon_r} \omega^2,$$

deci

$$P = \frac{\eta}{\varepsilon_r} \frac{\pi^3 n^2 d^3 l}{30^2 \cdot 4} = \frac{0{,}09 \cdot 10^{-6} \cdot \pi^3 \cdot 200^2 \cdot 15^3 \cdot 25}{0{,}01 \cdot 30^2 \cdot 4} =$$

$$= 263 \text{ kgf} \cdot \text{cm/s} = 2{,}63 \text{ kgf} \cdot \text{m/s} = 0{,}0351 \text{ CP}.$$

11.25. Să se efectueze calculul de alegere a ventilului de reglare din figura 11.25, *a* pentru cazul unui lichid, în următoarele condiții:

Scanned with OKEN Scanner

$Q_{med}=6$ m³/h ; $\gamma=900$ kg/m³ ; $\nu=1140$ cst ; $t=40°C$; $\Delta p_{med}=3$ daN/cm² ; $\Delta p_{vn}=1$ daN/cm² ; $\Delta p_0=5$ daN/cm².

Indicații de calcul. (Ventile de reglare prin strangulare pentru lichide, gaze și abur).

Variația debitului de fluid în circuitul din figura 11.25, *a* se realizează cu un ventil avînd o caracteristică liniară și cu un ventil avînd o caracteristică constructivă logaritmică, de altfel cele mai utilizate ventile pentru reglarea de debit.

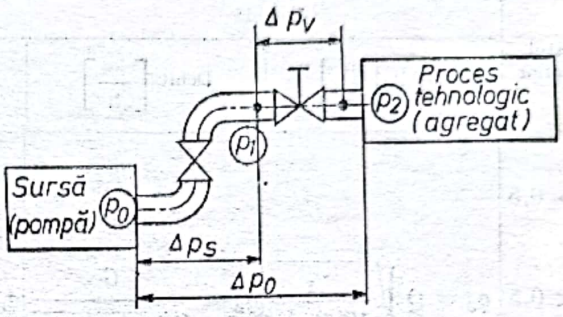


Fig. 11.25, a

Pierderile de presiune totale Δp_0 între sursă și consumator care apar în timpul funcționării sistemului sînt date de pierderile de presiune în organul de reglare Δp_v și de pierderile de presiune Δp_s în rezistențele suplimentare ale rețelei (coturi, curbe, armături etc.).

$$\Delta p_0 = \Delta p_v + \Delta p_s.$$

În tehnica reglării automate sînt utilizate mai multe metode de alegere a organelor de execuție prin strangulare, toate avînd o precizie limitată. În cele ce urmează am optat asupra unei metode utilizate mai frecvent la noi în țară și anume *metoda debitului specific* q_v pentru alegerea ventilelor de reglare prin strangulare pentru lichide, gaze și vapori.

La alegerea unui ventil de reglare pentru un sistem automat, se pune problema obținerii unei caracteristici statice ideale pentru acesta, astfel încît în procesul reglării pentru un raport dat $\frac{\Delta p_{vn}}{\Delta p_0}$, indicele n referindu-se la deschiderea nominală a ventilului, să se obțină un factor de amplificare total constant. Cea mai avantajoasă caracteristică statică ideală din punctul de vedere al stabilității sistemului este caracteristica exponențială.

Organele de reglare, avînd caracteristici statice liniare, sînt recomandate în general a fi utilizate la reglarea debitelor de lichide pentru instalații tehnologice avînd caracteristici dinamice integrale (reglare de nivel); în toate celelalte cazuri se recomandă organele de execuție avînd caracteristici statice ideale de procentaj egal.

Pentru valori ale raportului $\frac{\Delta p_{vn}}{\Delta p_0} > 0{,}3$, pe baza experienței căpătate în practica industrială, se recomandă ventile de reglare cu caracteristici constructive liniare, iar pentru valori ale raportului $\frac{\Delta p_{vn}}{\Delta p_0} < 0{,}3$ ventile cu caracteristici de procentaj egal (logaritmice).

Caracteristicile statice ideale și reale ale organelor de execuție pentru debit sînt date în normale firmelor constructoare de ventile de reglare.

Scanned with OKEN Scanner

În tabelul 11.25, *a* sînt prezentate formulele de calcul a debitului specific q_v pentru diverse fluide și pentru diferite valori ale raportului presiunilor înainte și după ventil.

Tabelul 11.25, a

(după J. Eckardt A. G. Stuttgart)

Raportul presiunilor	Lichide		Gaze		Abur	
	Debit $\left[\frac{m^3}{h}\right]$	Debit $\left[\frac{kg}{h}\right]$	Debit $\left[\frac{m^3}{h}\right]$	Debit $\left[\frac{kg}{h}\right]$	Debit $\left[\frac{kg}{h}\right]$	
$\frac{p_2}{p_1} > 0{,}5$ $\frac{p_0}{p_1} < 0{,}5$	$q_v = Q\sqrt{\frac{\gamma_1}{1000\cdot\Delta p}}$	$q_v = \frac{G}{\sqrt{1000\cdot\gamma_1\cdot\Delta p}}$	$q_v = \frac{Q_N}{514}\sqrt{\frac{\gamma_N T_1}{\Delta p\cdot p_2}}$	$q_v = \frac{G}{514}\sqrt{\frac{T_1}{\gamma_N \Delta p\, p_2}}$	$q_v = \frac{G}{1000}\sqrt{\frac{v_2}{\Delta p}}$	

S-au făcut următoarele notații

Q_N, γ_N — debitul de fluid și greutatea sa specifică în condiții normale fizice;

p_1 și p_2 — presiunea mediului fluid înainte și după ventil [daN/cm²];

$\Delta p = p_1 - p_2$ — căderea de presiune în ventil [daN/cm²];

γ_1, T_1 — greutatea specifică a fluidului și temperatura sa absolută înainte de ventil;

v — volumul specific al aburului la $p_1/2$ și t_1;

v_2 — volumul specific al aburului la p_2 și t_1.

Dacă vîscozitatea lichidului depășește 20 cst se face o corecție a coeficienților q_v determinați cu relațiile din tabelul 11.25, *a* astfel:

$$q_{vr} = K \cdot q_v. \qquad (11.30)$$

Coeficientul K se determină din diagrama dată în figura 11.25, *b* în funcție de Z.

Valoarea lui Z se determină cu relația

$$Z = \frac{3845 \cdot Q_{med}}{\sqrt{\nu \cdot q_{v\,med}}}, \qquad (11.31)$$

în care Q_{med} este debitul mediu, în m³/h;

ν — vîscozitatea cinematică, în cst.

În acest caz, alegerea ventilului se va face în funcție de coeficientul recalculat.

La alegerea unui ventil se recomandă pentru un debit de fluid mediu ca supapa ventilului să se găsească pe cît posibil într-o poziție medie ($h = 50\,\%$ deschis).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se îndeplinește această condiție, la determinarea coeficientului q_{vn} pentru deschiderea maximă a ventilului va fi necesară o corecție a factorului $q_{v\,med}$ (pentru $h = 50\,\%$) cu un factor corespunzător.

Pentru această situație :

$$q_{vn} = K_1 \cdot q_{v\,med} \tag{11.32}$$

Valoarea factorului K_1 depinde de alura caracteristicii statice reale a ventilului. Se poate considera $K_1 \approx 2$.

În tabelul 11.25, *b* sînt prezentate valorile coeficientului q_{vn} pentru ventile de reglare din seria 58 construite de firma Siemens. S-a notat cu D_N diametrul nominal.

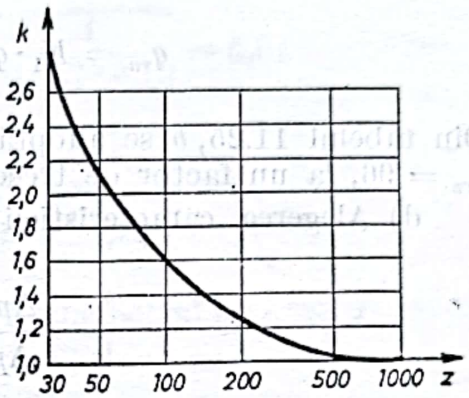


Fig. 11.25, b

Factorul de trecere reprezintă raportul între secțiunea maximă a ventilului (pentru $h = 100\,\%$) și secțiunea transversală interioară a conductei la care este racordat ventilul. Acest factor este determinat de faptul că ventilele se execută pentru a fi racordate la conducte și armături cu diametre standardizate, iar diversele capacități de trecere pentru același ventil se realizează prin modificarea dimensiunilor supapei și a scaunului, celelalte elemente rămînînd neschimbate.

Tabela 11.25 b

	D_N	15	20	25	32	40	50	65	80	100	125	150	200	250
q_{vn}	Factor de trecere 1	3,78	6	9,6	15	24	37,8	50	96	150	240	378	600	960
	Factor de trecere 0,4	1,5	2,4	3,78	6	9,6	15	24	37,8	60	96	150	240	378

Factorul de trecere are valori cuprinse între 0 și 1, valorile obișnuite fiind 1 ; 0,65 ; și 0,5.

Rezolvare. a) Calculul lui $q_{v\,med}$

$$q_{v\,med} = Q_{med} \sqrt{\frac{\gamma}{1000 \cdot \Delta p_{med}}} = 6 \sqrt{\frac{900}{1000 \cdot 3}} = 3{,}29$$

b) Corecția de vîscozitate. Se calculează Z, iar cu ajutorul diagramei din figura 11.25, *b* se determină coeficientul de corecție K

$$Z = \frac{3845\, Q_{med}}{\sqrt{\nu \cdot q_{v\,med}}} = \frac{3845 \cdot 6}{\sqrt{1140 \cdot 3{,}29}} = 376{,}7.$$

Pentru valoarea lui $Z = 376{,}7$ corespunde coeficientul de corecție

$$K = 1{,}1$$

$$q_{vmc} = K q_{v\,med} = 1{,}1 \cdot 3{,}29 = 3{,}61.$$

c) Calculul lui q_{vn}

$$q_{vn} = K_1 \cdot q_{v\,med} = 2 \cdot 3{,}61 = 7{,}22$$

Din tabelul 11.25, *b* se adoptă ventilul cu diametrul nominal $D_N = 25$, $q_{vn} = 96$, la un factor de trecere egal cu 1.

d) Alegerea caracteristicii statice. Se calculează raportul

$$\frac{\Delta p_{vn}}{\Delta p_0} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

care, fiind mai mic de 0,3, ne conduce la recomandarea unui ventil cu caracteristică de procentaj egal.

11.26. Să se efectueze calculul de alegere a ventilului de reglare din sistemul prezentat în figura 11.25, *a* pentru cazul cînd fluidul care curge prin sistem este aer și are următoarele date tehnice : $Q_m = 200$ Nm³/h ; $Q_{med} = 600$ Nm³/h ; $Q_M = 800$ Nm³/h ; $\gamma = 1{,}293$ kg/Nm³ ; $t = 20°C$; $p_1 = 5{,}5$ daN/cm² ; $p_2 = 4$ daN/cm² ; $\Delta p_{med} = 0{,}5$ daN/cm² ; $\Delta p_{vn} = 0{,}2$ daN/cm² ; $\Delta p_0 = 1$ daN/cm².

Rezolvare. a). Calculul lui $q_{v\,med}$

$$q_{v\,med} = \frac{Q_{Nm}}{514}\sqrt{\frac{\gamma_N \cdot T_1}{\Delta p_{med} \cdot p_2}} = \frac{600}{514} \cdot \sqrt{\frac{1{,}293 \cdot 293}{0{,}5 \cdot 4}} = 16{,}06.$$

b) Calculul lui q_{vn}

$$q_{vn} = K_1 \cdot q_{v\,med} = 2 \cdot 16{,}06 = 32{,}12.$$

c) Alegerea caracteristicii statice

$$\frac{\Delta p_{vn}}{\Delta p_0} = \frac{0{,}2}{1} = 0{,}2.$$

Întrucît raportul este mai mic de 0,3 se recomandă ventil cu caracteristică exponențială, de procentaj egal.

Din tabelul 11.25, *b* se adoptă ventilul cu diametrul nominal $D_N = 50$, $q_{vn} = 37{,}8$, la un factor de trecere egal cu 1.

Scanned with OKEN Scanner

11.27. Să se aleagă ventilul de reglare pentru sistemul din sistemul din figura 11.25, *a*, în cazul reglării unui debit de abur umed avînd următoarele caracteristici tehnice : $G_{med} = 60$ kg/h ; $G_m = 20$ kg/h ; $G_M = 80$ kg/h ; $\gamma = 0{,}687$ kg/m^3 ; $t = 104°C$; $p_1 = 1{,}2$ daN/cm^2 ; $p_2 = 1{,}08$ daN/cm^2 ; $\Delta p_{med} = 0{,}12$ daN/cm^2 ; $\Delta p_{vn} = 0{,}1$ daN/cm^2 ; $\Delta p_0 = 0{,}15$ daN/cm^2.

Rezolvare. a) Calculul lui $q_{v\,med}$

$$q_{v\,med} = \frac{G_{med}}{1000}\sqrt{\frac{v_2}{\Delta p_{med}}} = \frac{60}{1000}\sqrt{\frac{1}{0{,}687 \cdot 0{,}12}} = 6{,}61$$

b) Calculul lui q_{vn}

$$q_{vn} = K_1 q_{v\,med} = 2 \cdot 6{,}61 = 13{,}22.$$

Din tabelul 11.25, *b* se adoptă ventilul cu diametrul nominal $D_N = 32$, $q_{vn} = 15$, pentru un factor de trecere egal cu 1.

c) Alegerea caracteristicii statice de lucru

$$\frac{\Delta p_{vn}}{\Delta p_0} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = 0{,}68.$$

Întrucît raportul este mai mare decît 0,3 se alege un ventil cu caracteristică liniară.

VIBRAȚII LA SISTEME MECANICE UTILIZATE ÎN ECONOMIA FORESTIERĂ

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

12.1. GENERALITĂȚI

Vibrațiile mecanice constituie o problemă de importanță crescîndă în societatea modernă Fenomenele oscilatorii se întîlnesc în cele mai variate domenii ale tehnicii cum ar fi: radio, tehnica, acustica (rezonanța lemnului), optica, electrotehnica, căldura, mecanica, fizica atomului, fundațiile mașinilor din economia forestieră etc. Deși esența fizică a fenomenului diferă de la o ramură tehnică la alta, legile fundamentale și formulările matematice ale acestora sînt aceleași pentru toate fenomenele oscilatorii.

Datorită utilității practice a calculului vibrațiilor, este foarte important ca semnificația inginerească a problemei să nu fie adumbrită de subtilitățile matematice; totuși, dat fiind natura complicată a problemei, este necesar să se utilizeze metode analitice adecvate.

Vibrațiile mecanice ale corpurilor solide sînt, în general, fenomene fizice dăunătoare. Prin studiile efectuate asupra lor, se urmărește să se determine condițiile în care ele iau naștere, parametrii care le caracterizează (în speță pulsații și amplitudini) și să se stabilească metodele de combatere și atenuare a efectului lor masiv. Sînt totuși cazuri, în care fenomenul vibratoriu este util, ca de exemplu la mașinile vibratoare pentru beton, pentru baterea piloților de lemn, pentru încercarea materialelor ș.a. Și în aceste cazuri, legile cazuri, legile vibrațiilor rămîn aceleași ca și în cazul primei categorii de mașini.

12.2. SISTEME ELASTICE ȘI TIPURI DE EXCITAȚIE

Se spune că un sistem mecanic este elastic, atunci cînd în componența sa există cel puțin un element care se deformează elastic. Ca exemple de sisteme elastice se pot da: o mașină de prelucrat lemnul așezată elastic pe o fundație (fig. 12, *a*), un cadru deschis și deformabil, articulat la extremități ca în figura 12, *b*, care execută oscilații orizontale și asupra căruia acționează sarcina Q, o bară de lemn pe reazeme rigide (fig. 12, *c*).

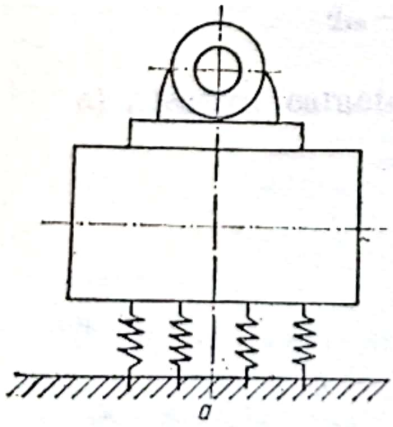


Fig. 12.a

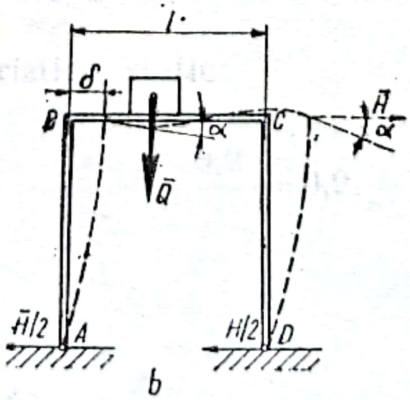


Fig. 12.b

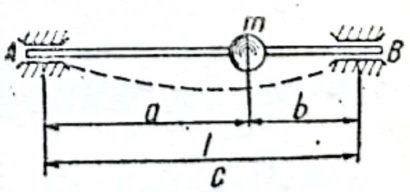


Fig. 12.c

Sarcinile exterioare precum şi deplasările variabile în timp se numesc excitaţii sau perturbaţii ; în cazul în care excitaţia se realizează prin forţe, se mai utilizează termenii de forţă excitatoare sau forţă perturbatoare.

Vibraţiile mecanice ale sistemelor elastice pot fi caracterizate printr-un număr dat de parametri ; a determina valorile acestor parametri, înseamnă a afla răspunsul sistemului elastic la excitaţia dată. Un sistem elastic este determinat atunci cînd se cunosc masa, proprietăţile elastice, precum şi proprietăţile de amortizare ale elementelor componente. Masa unui sistem material poate fi concentrată în unul sau mai multe puncte, poate fi distribuită uniform sau după o anumită lege. Proprietăţile elastice ale unui sistem sînt date prin caracteristicile elastice ale elementelor deformabile din sistem şi ele precizează natura legăturii dintre deformaţia elementului elastic şi efortul care o creează.

Pe baza tipului de distribuţie a maselor şi a proprietăţilor elastice se stabileşte numărul de grade de libertate a sistemului, egal cu numărul de coordonate necesare pentru determinarea poziţiei acestuia în timpul mişcării. Sistemele elastice pot avea un grad de libertate, un număr finit, $n > 1$, sau un număr infinit de grade de libertate (sisteme continue). Elementele elastice din sistem înmagazinează energie potenţială de deformaţie. Repartiţia proprietăţilor elastice din sistem poate fi discretă sau continuă, funcţie de modul de repartiţie a maselor.

Proprietăţile de amortizare se manifestă prin capacitatea sistemului de a disipa energie mecanică, transformînd-o în alte forme de energie.

Pentru ca o forţă exterioară să producă vibraţii într-un sistem elastic, este necesar să fie variabilă în timp. În cazul în care forma acestei variaţii este cunoscută şi poate primi o experimare matematică exactă, excitaţia aparţine proceselor deterministe. Dacă, însă, variaţia în timp a forţelor exterioare, care acţionează asupra sistemului elastic au un caracter imprevizibil, excitaţiile se numesc aleatoare şi ele sînt date prin parametrii lor probabilistici.

12.3. VIBRAŢIILE SISTEMELOR LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE

Sistemele oscilante cu un singur grad de libertate sînt constituite, în general, dintr-o masă rigidă ce execută o mişcare de translaţie sau rotaţie şi care poate fi determinată printr-un singur parametru şi unul sau mai multe elemente elastice ,legate de masa rigidă sau de suport. În figura 12, *d* se prezintă cîteva modele mecanice de sisteme oscilante cu un singur grad de mobilitate.

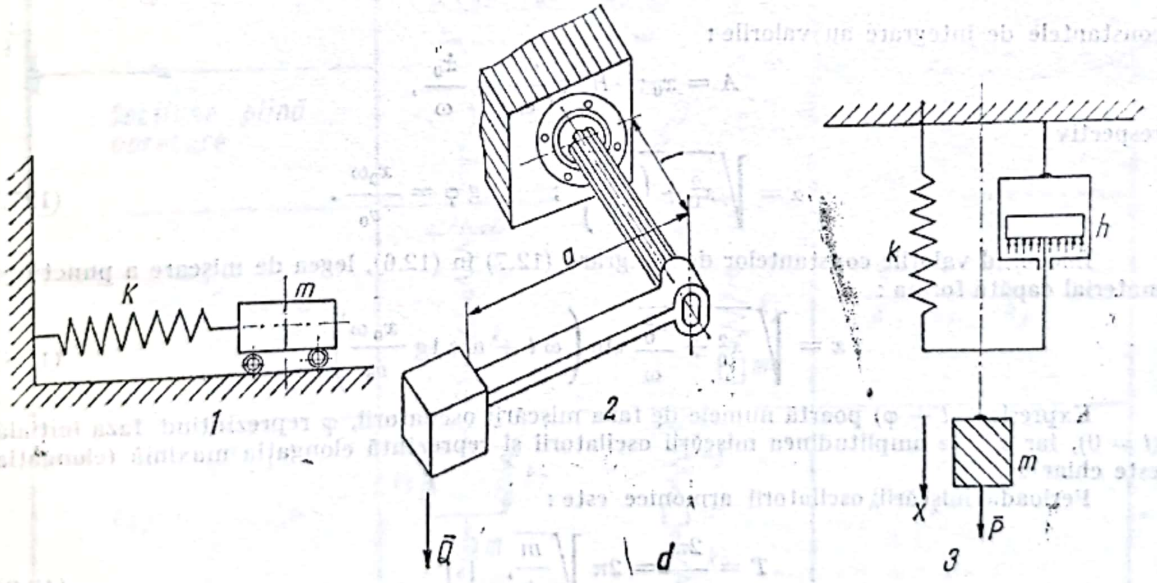


Fig. 12.d

Oscilaţiile libere (proprii) ale punctului material. Modelul mecanic al unui astfel de sistem oscilant constă dintr-un punct material M de masă m, care poate efectua o mişcare rectilinie, fiind legat de un resort (arc) cu masă neglijabilă şi constantă elastică k, de punctul fix A (fig. 12, *e*). În poziţia de echilibru stabil (notată pe figură cu O), greutatea punctului material $P = mg$ este echilibrată de forţa elastică din resort.

$$T_0 = k_1 \cdot x_s. \qquad (12.1)$$

Deplasînd punctul material din poziția de echilibru stabil într-o poziție *1*, în resort va apare o forță elastică

$$T = kx, \tag{12.2}$$

proporțională cu alungirea x a resortului. Lăsat liber, punctul material, sub acțiunea forței elastice va reveni în poziția de echilibru, dar în virtutea inerției va continua să se miște, oprindu-se în punctul *2*, simetricul punctului *1* față de poziția de echilibru. Apoi, punctul material execută mișcări oscilatorii, în jurul poziției de echilibru. Alegînd ca axă Ox traiectoria rectilinie a punctului M și alegînd originea O în poziția de echilibru stabil, ecuația fundamentală a dinamicii proiectată pe axa mișcării se scrie sub următoarea formă:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \tag{12.3}$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{12.4}$$

în care

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{12.5}$$

este pulsația proprie sau naturală a oscilației libere a sistemului.

Din (12.3) se deduce legea de mișcare a punctului material:

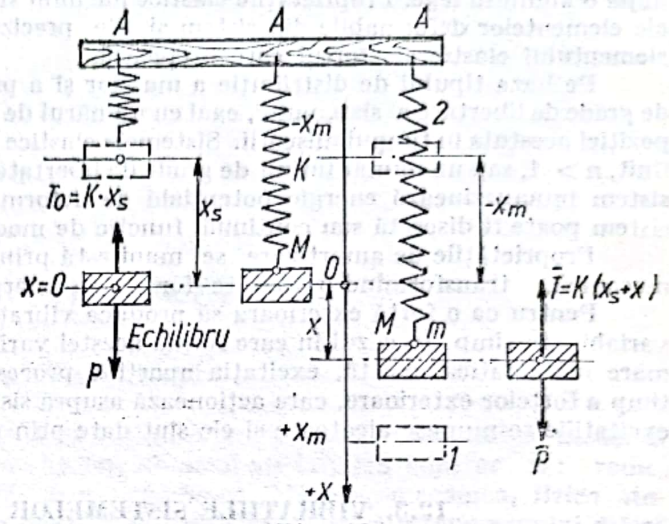


Fig. 12.e

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \tag{12.6}$$

Presupunînd că în momentul inițial al mișcării ($t = 0$) avem:

$$t = 0 \begin{cases} x = x_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0; \end{cases}$$

constantele de integrare au valorile:

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0}{\omega} = \frac{\dot{x}_0}{\omega},$$

respectiv

$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0\omega}{v_0}. \tag{127.}$$

Înlocuind valorile constantelor de integrare (12.7) în (12.6), legea de mișcare a punctului material capătă forma:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega}}\sin\left(\omega t + \operatorname{arc\,tg}\frac{x_0\omega}{v_0}\right). \tag{12.8}$$

Expresia $(\omega t + \varphi)$ poartă numele de faza mișcării oscilatorii, φ reprezintînd faza inițială ($t = 0$), iar α este amplitudinea mișcării oscilatorii și reprezintă elongația maximă (elongația este chiar x).

Perioada mișcării oscilatorii armonice este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad [\text{s}] \tag{12.9}$$

iar frecvența mișcării

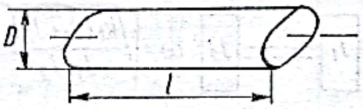
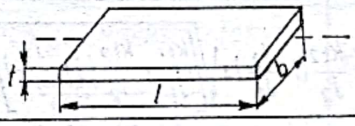
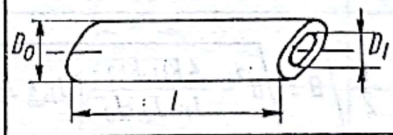
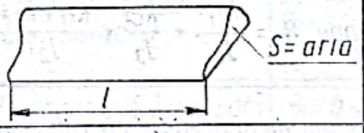
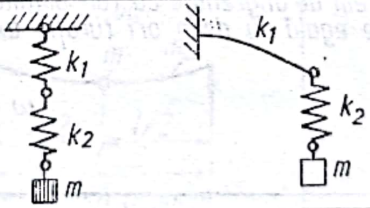
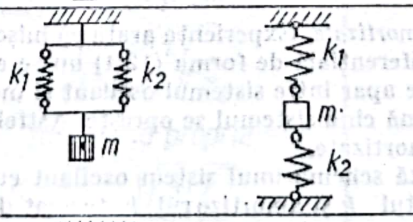
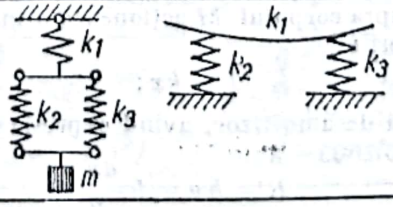
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad [\text{s}^{-2}]. \tag{12.10}$$

Constanta elastică k a resortului, care intervine în expresia forței elastice reprezintă forța necesară pentru a produce o deformație a resortului egală cu unitatea de lungime.

În tabelul 12, *a* sînt date cîteva expresii ale unor constante elastice, iar în tabelele 12, *b* și 12, *c* se dau expresiile pulsațiilor proprii ale unor sisteme oscilante.

Scanned with OKEN Scanner

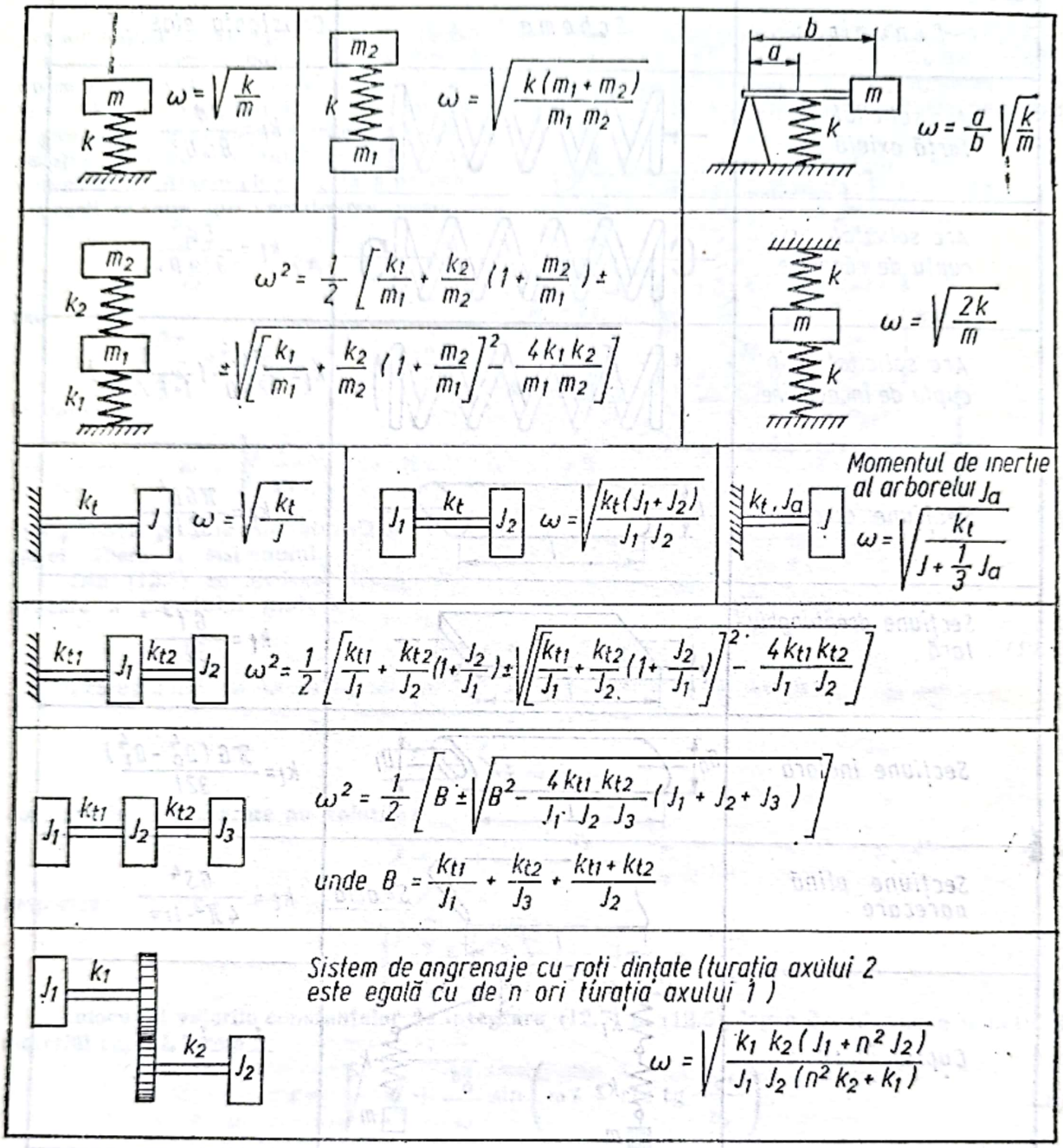
Tabelul 12.a

Denumirea	Schema	Constanta elastică
Arc solicitat prin forță axială		$k_t = \frac{Gd^4}{8nD^3}$
Arc solicitat prin cuplu de răsucire		$k_t = \frac{Ed^4}{32nD}$
Arc solicitat prin cuplu de încovoiere		$k_t = \frac{Ed^4}{32nD}\left(\frac{1}{1+E/2G}\right)$
Secțiune circulară		$k_t = \frac{\pi GD^4}{32l}$
Secțiune dreptunghiulară		$k_t = \frac{Gt^3}{3l}$
Secțiune inelară		$k_t = \frac{\pi G(D_0^4 - D_1^4)}{32l}$
Secțiune plină oarecare		$k_t = \frac{GS^4}{4\pi^2 \cdot I_P}$
Cuplaj în serie		$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
Cuplaj în paralel		$k = k_1 + k_2$
Cuplaj mixt		$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2+k_3}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 12.b

Pulsațiile proprii ω ale unor sisteme oscilante (rad/s.)



Oscilații libere (proprii) amortizate. Experiența arată că mișcările vibratorii proprii (libere), reprezentate printr-o ecuație diferențială de forma (12.4) nu se continuă la infinit, așa cum ar părea, ci datorită frecărilor care apar între sistemul oscilant și mediul înconjurător, aplitudinea acestor mișcări scade treptat pînă cînd sistemul se oprește. Astfel, de mișcări se numesc mișcări vibratorii proprii (libere) amortizate.

În figura 12, *f* se prezintă schema unui sistem oscilant cu amortizare vîscoasă, compus din corpul *M* de masă *m*, resortul *k* și amortizorul *h*, format dintr-un cilindru plin cu lichid, în care se mișcă un piston. Asupra corpului *M* acționează următoarele forțe :

— forța elastică din resort :

$$T = kx ;$$

— forța vîscoasă produsă de amortizor, avînd expresia :

$$R' = h\,v = h\,\frac{dx}{dt} ;$$

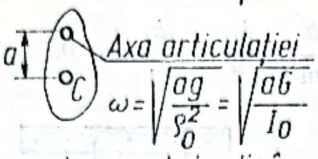
— greutatea $m.g$ a masei m.

Pulsațiile proprii ω ale unor sisteme oscilante [rad/s].

Pendul

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

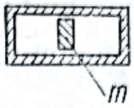
Pendul compus



$$\omega = \sqrt{\frac{ag}{S_0^2}} = \sqrt{\frac{aG}{I_0}}$$

S_0 - este raza de inerție în raport cu axa articulației
G - greutatea pendulului
I_0 - momentul de inerție în raport cu axa articulației

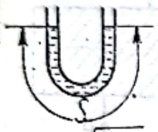
Sistem pneumatic



$$\omega = \sqrt{\frac{2pS^2}{mV_0}}$$

p - este presiunea pe fundul cilindrului la echilibru kgf/cm²
S - suprafața pistonului cm²
m - masa pistonului kgf s²/cm
V_0 - volumul cilindrului

Tub în formă de U cu lichid



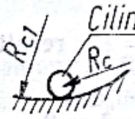
$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{S}}$$

Sferă în interiorul unei suprafețe cilindrice

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R_C - R_S)}}$$

R_C - este raza cilindrului
R_S - raza sferei

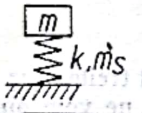
Cilindru în interiorul unei suprafețe cilindrice



$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R_{c1} - R_c)}}$$

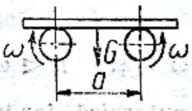
R_{C1} - este raza suprafeței cilindrice
R_C - raza cilindrului

Sistem format din masă și arc elicoidal



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\left(m + \frac{m_S}{3}\right)}}$$

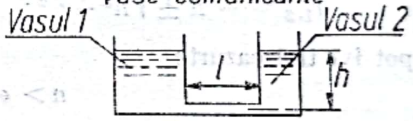
Placa pe cilindru rotativi



$$\omega = \sqrt{\frac{2ug}{a}}$$

este coeficientul de frecare între placă și cilindru

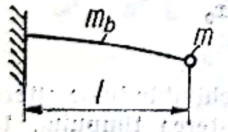
Vase comunicante



$$\omega = \sqrt{\frac{g(1 + S_1/S_2)}{h(1 + S_1/S_2) + l(S_1/S_0)}}$$

S_1 - este aria secțiunii vasului 1
S_2 - aria secțiunii vasului 2
S_0 - aria secțiunii tubului

Bară în consolă încărcată la capăt



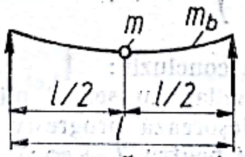
cu masă proprie

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{l^3(m + 0{,}23\,m_b)}}$$

fără masă proprie

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$

Bară simplu rezemată încărcată la mijloc



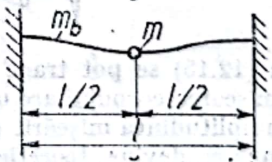
cu masă proprie

$$\omega = \sqrt{\frac{48\,EI}{l^3(m + 0{,}5\,m_b)}}$$

fără masă proprie

$$\omega = 4\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$

Bară dublă încastrată încărcată la mijloc



cu masă proprie

$$\omega = 14\sqrt{\frac{EI}{l^3(m + 0{,}375\,m_b)}}$$

fără masă proprie

$$\omega = 8\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$

l - lungimea grinzii (cm)
I - momentul de inerție al secțiunii transversale a grinzii (cm⁴)
E - modulul de elasticitate (kgf/cm²)
g - accelerația gravitației (cm/s²)
m - este masa sarcinii (kgf s²/cm)
m_s (m_b) - masa arcului bară, (kgf s²/cm)
k - constanta elastică a arcului

Scanned with OKEN Scanner

Modelul mecanic corespunzător unui astfel de sistem oscilant este un punct material de masă m, asupra căruia acționează forțele T, R și P. Ecuația diferențială a mișcării punctului material este :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T - R,$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0, \qquad (12.11)$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad (12.12)$$

unde s-a notat :

$$\frac{h}{m} = 2n \quad \text{și} \quad \frac{k}{m} = \omega^2. \qquad (12.13)$$

Utilizînd substituția $x = e^{rt}$, rezultă ecuația caracteristică :

$$r^2 + 2nr + \omega^2 = 0, \qquad (12.14)$$

cu rădăcinile :

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2};$$

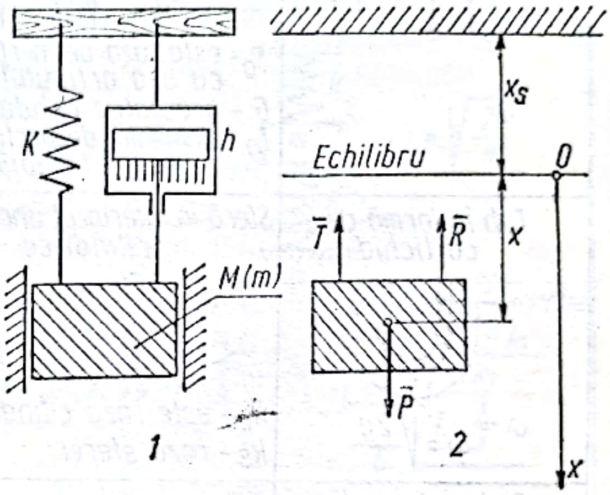


Fig. 12.f

se pot ivi trei cazuri :

$$n > \omega\,; \quad n = \omega \quad \text{și} \quad n < \omega.$$

În primele două cazuri amortizarea este puternică, iar în cel de-al treilea caz amortizarea este mică ; ultimul caz apărînd mai frecvent în practica inginerească, ne vom opri mai mult asupra lui.

Legea de mișcare a punctului material corespunzătoare cazului $n < p$ este

$$x = \alpha\, e^{-nt}\cdot \sin(\omega_1 t + \beta), \qquad (12.15)$$

în care :

$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{\omega_1}\right)^2} \quad \text{iar} \quad \beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{v_0 + nx_0}{\omega_1 x_0}. \qquad (12.16)$$

Din (12.15) se pot trage următoarele concluzii :

— mișcarea corpului are un caracter oscilatoriu, sensul mișcării schimbîndu-se alternativ ;

— amplitudinea mișcării $\alpha\, e^{-nt}$ se micșorează progresiv cu creșterea timpului, tinzînd către zero ;; ea devine, teoretic, nulă numai pentru $t \to \infty$;

— mărimea ω_1, numită pseudopulsație este mai mică decît pulsația oscilațiilor libere neomogenizate :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2} < \omega\,;$$

— mărimea T_1, numită pseudoperioadă,

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} > T, \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

este mai mare decît perioada T a oscilațiilor neamortizate. Coeficientul n poartă numele de coeficient de amortizare.

Un indiciu asupra amortizării este dat de raportul a două amplitudini succesive :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha\cdot e^{-nt}}{\alpha\cdot e^{-n(t+T_1)}} = e^{nT_1}. \qquad (12.17)$$

Logaritmul natural al acestui raport poartă numele de *decrement logaritmic de amortizare*:

$$D = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln e^{nT_1} = \frac{2\pi n}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} = D. \qquad (12.18)$$

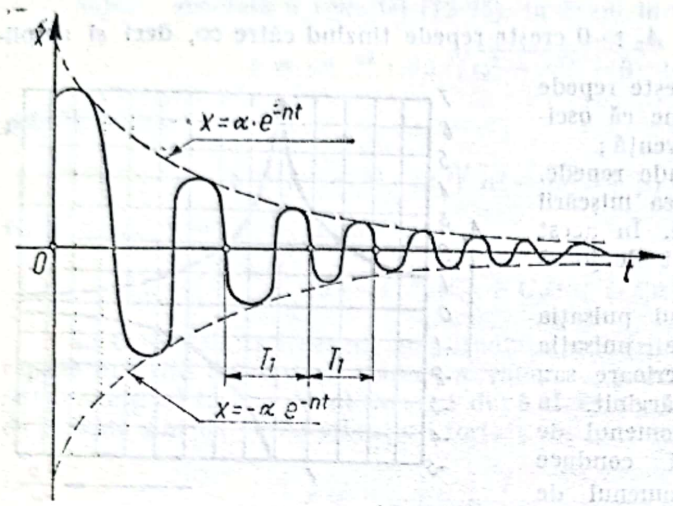


Fig. 12.g

În figura 12, *g* se prezintă diagrama mișcării dată de ecuația (12.15). Curba de variație a elongației x, în funcție de timpul t este tangentă alternativ la curbele exponențiale:

$$x = \alpha \cdot e^{-nt} \quad \text{și} \quad x = -\alpha \cdot e^{-nt}.$$

Oscilații forțate; rezonanță. În unele cazuri, asupra sistemului oscilant acționează o forță periodică, variabilă cu timpul, de forma:

$$F = F_0 \cdot \sin(pt + \varphi), \qquad (12.19)$$

denumită forță perturbatoare.

Considerînd modelul mecanic din figura 12, *h* în care, asupra corpului de masă m (considerat punct material) acționează următoarele forțe:

— forța elastică din arc $T = k\,x$;
— forța perturbatoare $F = F_0 \sin(pt + \varphi)$;
— greutatea $P = mg$.

Ecuația diferențială a mișcării este:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T + F,$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f \sin(pt + \varphi). \qquad (12.20)$$

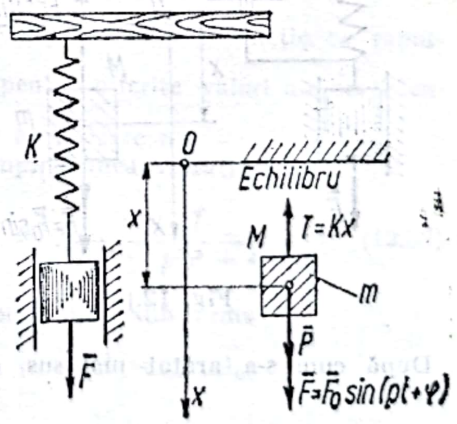


Fig. 12.h

Soluția generală a ecuației (12.20) este:

$$x = \frac{f}{\omega^2 - p^2}\left[\sin(pt + \varphi) - \sin\varphi \cdot \cos\omega t - \right.$$

$$\left. - \frac{p}{\omega}\cos\varphi \sin\omega t\right], \qquad (12.21)$$

Din ecuația mișcării (12.21) se vede că mărimea elongației depinde în mare măsură de termenul:

$$A = \frac{f}{\omega^2 - p^2} = x_s A_0. \qquad (12.22)$$

În expresia (12.21), $x_s = \frac{f}{\omega^2} = \frac{F_0}{h}$ reprezintă deplasarea statică a sistemului sub acțiunea forței elastice T și a unei forțe constante F_0, iar termenul

$$A_0 = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}}, \qquad (12.23)$$

poartă numele de factor de amplificare.

În figura 12, *i*, se prezintă graficul factorului de amplificare. Examinînd diagrama se constată :

— pentru valori mici ale raportului $\frac{p}{\omega} \cong 0$, $A_0 \cong 1$, iar amplitudinea A este practic egală cu x_s ;

— pentru valori $\frac{p}{\omega} < 1$, factorul $A_0 > 0$ crește repede tinzînd către ∞, deci și amplitudinea mișcării vibratorii forțate crește repede tinzînd către ∞. În acest caz, se spune că oscilațiile forțate sînt de mică (joasă) frecvență ;

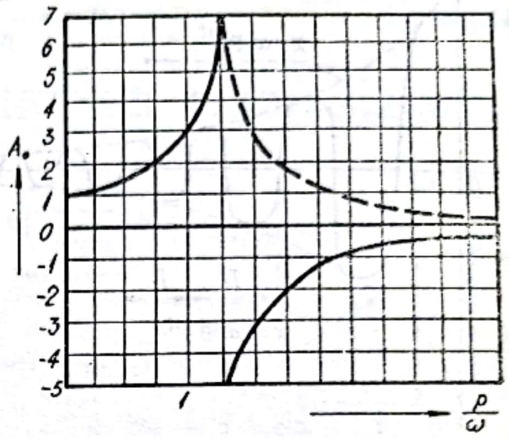


Fig. 12.i

— pentru valori $p\ \omega > 1$, A_0 scade repede, tinzînd către zero, deci amplitudinea mișcării vibratorii forțate tinde să se anuleze. În acest caz, se spune că oscilațiile forțate sînt de joasă frecvență ;

— cînd $p = \omega$, adică atunci cînd pulsația forței perturbatoare se apropie de pulsația proprie a sistemului, prin valori inferioare sau superioare, aplitudinea A crește nemărginit. În acest caz, se spune că apare fenomenul de rezonanță. Fenomenul de rezonanță conduce la ruperea elementului elastic. Fenomenul de rezonanță poate fi înlăturat fie prin schimbarea pulsației p a forței perturbatoare, fie prin schimbarea caracteristicilor m și k ale sistemului elastic, ceea ce conduce la schimbarea frecvenței proprii a sistemului.

Dacă în afara forței perturbatoare, asupra sistemului oscilant mai acționează și o forță rezistentă, produsă de către un amortizor, oscilațiile sînt denumite forțate cu amortizare. Fie sistemul elastic reprezentat în figura 12, *j*, constituit dintr-un corp M de masă m, de care sînt prinse capătul unui arc și al unui amortizor, corpul avînd posibilitatea să execute numai o mișcare de translație rectilinie. Modelul mecanic corespunzător acestui sistem elastic este un punct material M de masă m, care execută o mișcare oscilatorie în lungul axei Ox. Asupra punctului material acționează simultan următoarele forțe :

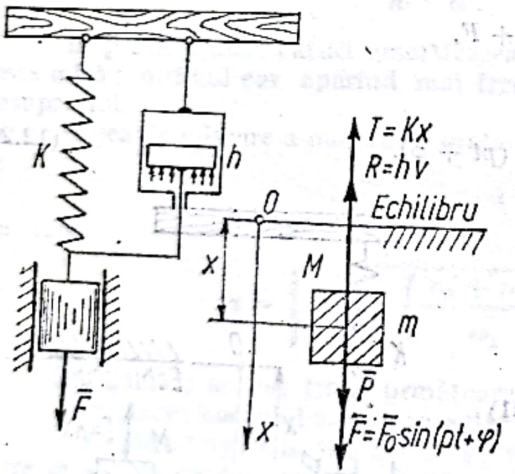


Fig. 12.j

— forța elastică produsă de arc, $T = kx$;

— forța rezistentă produsă de amortizor, $R = hv$;

— forța perturbatoare variabilă în timp, care întreține mișcarea, avînd expresia :

$$F = F_0 \sin (pt + \varphi).$$

Ecuația diferențială a mișcării punctului M este :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \sin (pt + \varphi). \quad (12.24)$$

După cum s-a arătat mai sus, ecuația omogenă corespunzătoare :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (12.25)$$

are următoarea soluție :

$$x = \alpha e^{-nt} \cdot \sin (\omega_1 t + \beta).$$

Soluția particulară a ecuației neomogene este de forma :

$$x = C \sin (pt + \varphi - \delta), \quad (12.26)$$

unde

$$C = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2np}{\omega^2 - p^2}, \tag{12.27}$$

Soluția generală a ecuației (12.25), în cazul în care $n < 0$, este:

$$x = \alpha e^{-nt} \cdot \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2} t + \beta) + C \sin(pt + \varphi - \delta); \tag{12.28}$$

pentru $n > \omega$, rezultă:

$$x = \alpha \cdot e^{-nt} \cdot sh(\sqrt{n^2 - \omega^2} t + \beta) + C \sin(pt + \varphi - \delta), \tag{12.29}$$

iar în cazul $n = \omega$, se obține:

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t) + C \sin(pt + \varphi - \delta). \tag{12.30}$$

În toate cele trei cazuri, amplitudinile mișcării vibratorii libere amortizate scad foarte repede datorită descreșterii rapide a valorii exponențialei e^{-nt}, de unde rezultă că studiul acestor mișcări trebuie făcut imediat după începerea mișcării, adică în regim tranzitoriu. Ceea ce persistă sînt mișcările vibratorii forțate ale sistemului, de ecuație:

$$x = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \varphi - \delta). \tag{12.31}$$

Analizînd mișcarea se pot trage următoarele concluzii:
— pulsația p a vibrațiilor forțate este identică cu pulsația forței perturbatoare F;
— perioada oscilațiilor forțate este egală cu perioada forței perturbatoare;
— între faza mișcării oscilatorii forțate și a forței perturbatoare există un decalaj δ, care este funcție de raportul $\frac{p}{\omega}$ și $\frac{2n}{\omega}$, care se poate scrie sub forma:

$$\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\frac{n}{\omega} \cdot \frac{p}{\omega}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}. \tag{12.32}$$

În figura 12, k se prezintă curbele de variație a unghiului δ, în funcție de raportul $\frac{p}{\omega}$ pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare n.

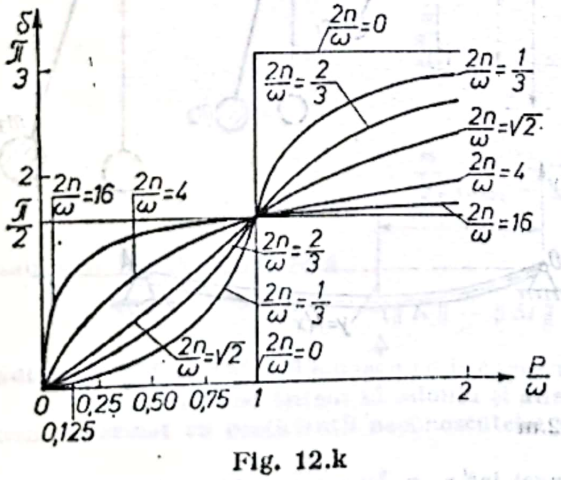


Fig. 12.k

Amplitudinea vibrațiilor forțate:

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \tag{12.33}$$

se mai poate scrie sub forma:

$$A = x_s \cdot A_0,$$

unde:

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}, \tag{12.34}$$

permite o reprezentare a factorului A_0 în funcție de raportul pulsațiilor $\frac{p}{\omega}$, pentru diferite valori ale raportului $\frac{2n}{\omega}$ (fig. 12, l).

12.4. Vibraţiile sistemelor liniare cu mai multe grade de libertate.

Sistemele elastice cu un singur grad de libertate se caracterizează printr-o singură frecvenţă proprie, reprezentînd o singură posibilitate de rezonanţă. Cercetările experimentale efectuate pe sisteme reale conduc, de obicei, la punerea în evidenţă a unui spectru de frecvenţe de rezonanţă. Pentru a se putea trece la analiza teoretică a vibraţiilor acestor sisteme, trebuie ca acestea să fie schematizate prin sisteme elastice cu mai multe grade de libertate.

Se spune că un sistem mecanic are m grade de libertate dacă, pentru definirea configuraţiei sale geometrice sînt necesare m mărimi scalare independente. Astfel, sistemul mecanic din figura 12, m, 1, posedă două grade de libertate, configuraţia sa geometrică fiind definită de doi parametri scalari, abscisele x_1 şi x_2; sistemul mecanic din figura 12. m, 2 are trei grade de libertate, configuraţia sa geometrică fiind definită de trei parametri scalari, unghiurile φ_1, φ_2 şi φ_3, pe care pendulele cu masele m_1, m_2 şi m_3 le fac cu verticalele punctelor de suspensie O_1, O_2, şi O_3. Sistemul mecanic din figura 12, m, 3, care stă la baza studiului vibraţiilor de răsucire ale arborilor cotiţi de la motoarele policilindrice, are m grade de libertate, configuraţia sa geometrică fiind definită de m parametri scalari, rotirile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ ale volanţilor $J_1, J_2, \ldots, J_m$. În fine, sistemul mecanic din figura 12, m, 4, care este o grindă continuă, are o infinitate de grade de libertate, configuraţia sa fiind definită de ordonatele y în toate punctele ei, respectiv de o funcţie $f(x)$, continuă.

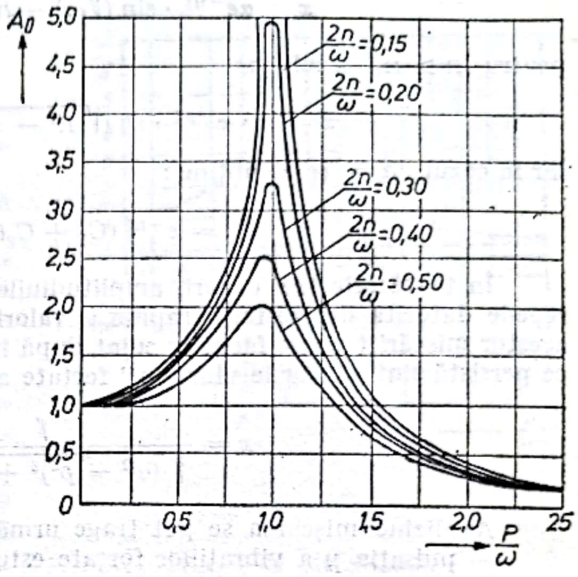


Fig. 12.1

Ecuaţiile de mişcare, pentru sistemele cu mai multe grade de libertate se scriu cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (12.35)$$

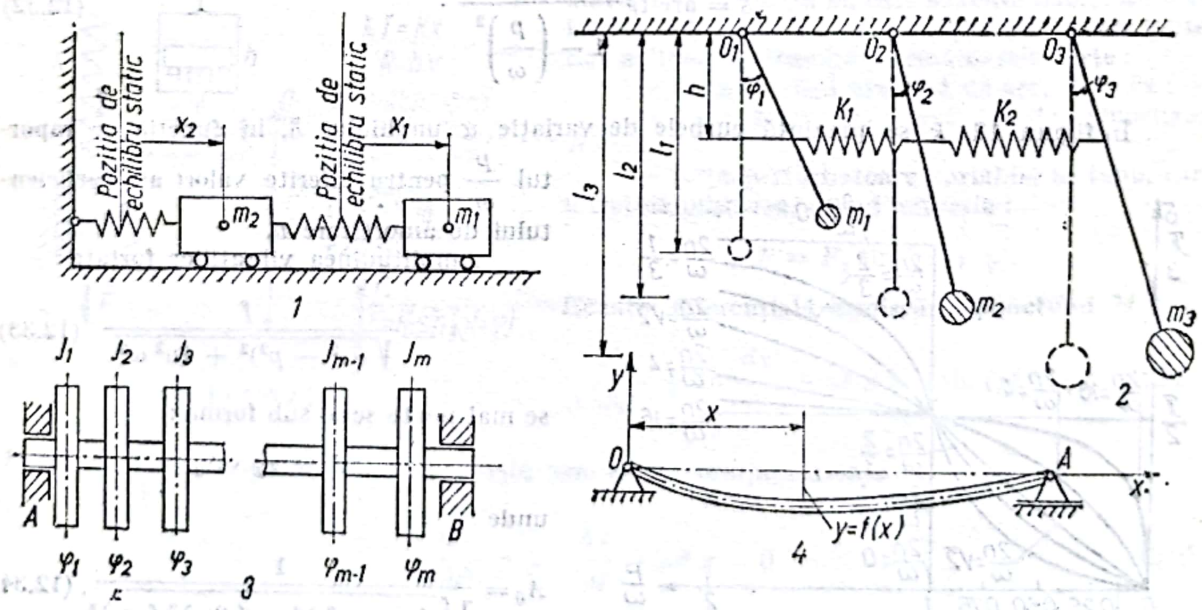


Fig. 12.m

L fiind potenţialul cinetic (funcţia lui Lagrange), iar $x_1, x_2, \ldots, x_m$, coordonatele generalizate.

Generalizînd expresiile energiei cinetice şi funcţie de forţă, din cazul unui punct material, pentru cazul vibraţiilor liniare ale sistemelor mecanice cu m grade de libertate, vom avea:

$$E = \frac{1}{2}\sum m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \quad \text{şi} \quad U = -\frac{1}{2}\sum k_{ij}x_i x_j.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$L = E + U = \frac{1}{2} \sum m_{ij} \dot{x}_i \dot{x} - \frac{1}{2} \sum' k_{ij} x_i x_j,$$

iar ecuațiile lui Lagrange devin :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} m_{1i} \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^{m} k_{1i} x_i = 0 ; \\ &\sum_{i=1}^{m} m_{2i} \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^{m} k_{2i} x_i = 0 ; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{m} m_{mi} \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^{m} k_{mi} x_i = 0, \end{aligned}\right\} \tag{12.36}$$

care se mai pot scrie sub următoarea formă matriceală :

$$\| M \| \cdot \| \ddot{x} \| + \| K \| \cdot \| x \| = 0. \tag{12.37}$$

În ecuațiile (12.36), ca și în expresiile matricelor $\| M \|$ și $\| K \|$, $m_{ij} = m_{ji}$ și $k_{ij} = k_{ji}$, adică matricele sînt simetrice în raport cu diagonala principală.

În vederea rezolvării sistemului de ecuații diferențiale (12.36), vom încerca drept soluții următoarea formă proprie de vibrații :

$$x_i = C_i \cos (\omega t - \varphi), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{12.38}$$

care se mai scrie, utilizînd notația matriceală

$$\| x \| = \| C \| \cos (\omega t - \varphi). \tag{12.39}$$

Substituind în (12.36) și simplificînd prin $\cos (\omega t - \varphi)$, se obține

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} (k_{1i} - m_{1i} \omega^2) C_i = 0 ; \\ &\sum_{i=1}^{m} (k_{2i} - m_{2i} \omega^2) C_i = 0 ; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{m} (k_{mi} - m_{mi} \omega^2) C_i = 0, \end{aligned}\right\} \tag{12.40}$$

sau sub formă matriceală

$$(\| K \| - \| M \| \cdot \omega^2) \cdot \| C \| = 0, \tag{12.41}$$

adică un sistem liniar și omogen cu necunoscutele $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

Pentru ca acest sistem să admită și alte soluții în afară de cea banală, este ca determinantul format cu coeficienții necunoscutelor să fie nul, adică :

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 & k_{12} - m_{12}\omega^2 \ldots & k_{1m} - m_{1m}\omega^2 \\ k_{21} - m_{21}\omega^2 & k_{22} - m_{22}\omega^2 \ldots & k_{2m} - m_{2m}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{m1} - m_{m1}\omega^2 & k_{2m} - m_{m2}\omega^2 \ldots & k_{mm} - m_{mm}\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{12.42}$$

Dezvoltînd acest determinant și anulîndu-l, se obține o ecuație de gradul m în ω^2, denumită *ecuație caracteristică*. Rezolvînd ecuația caracteristică, se obțin m valori reale pentru ω ; $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, denumite *valori proprii*. Corespunzător fiecărei valori proprii, va corespunde o formă proprie de vibrație.

II. APLICAȚII

12.1. Să se studieze vibrațiile transversale ale unei bare drepte de lemn (fig. 12.1).

Rezolvare. În vederea stabilirii ecuației vibrațiilor laterale ale barei drepte, se consideră un element de bară de lungime dx (fig. 12.1), asupra căruia acționează forțele tăietoare T și $T + \mathrm{d}T$ și momentele încovoietoare M și $M + \mathrm{d}M$.

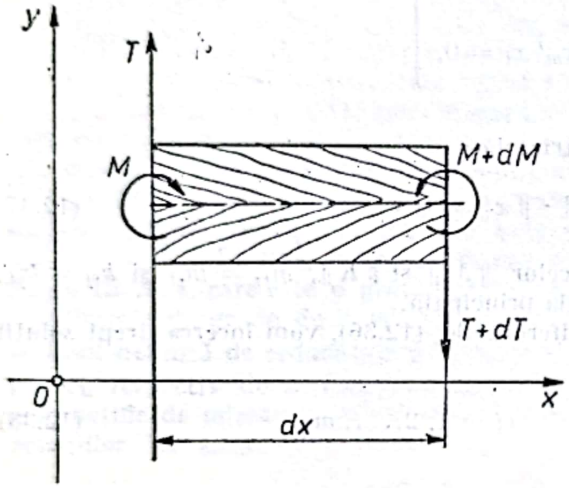


Fig. 12.1

Dacă notăm cu I_x momentul de inerție axial al secțiunii transversale de arie A_x a elementului, în baza principiului lui d'Alembert, ținînd seamă de sensurile opuse ale forțelor tăietoare la cele două capete ale elementului :

$$\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial x}\,dx = -(\rho A_x\,dx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

cum însă

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T,$$

relația de mai sus devine :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A_x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Cunoscînd din rezistența materialelor că :

$$M = EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

astfel încît

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \rho A_x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

În cazul barelor cu secțiune constantă, rezultă :

$$EI\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe mai departe ne vom restrînge la examinarea ecuației, în care, pentru ușurarea calculelor, se introduce notația :

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A}.$$

Rezultă astfel ecuația :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Încercăm o separare a variabilelor, punînd :

$$y = X(x) \cdot T(t),$$

ceea ce conduce la relația :

$$a^2 \frac{x^{IV}}{X} + \frac{\ddot{T}}{T} = 0,$$

de unde rezultă ecuațiile parțiale

$$\ddot{T} + a^2 m^4 T = 0;$$

$$X^{IV} - m^4 X = 0,$$

cu soluțiile

$$T = A \cos am^2 t + B \sin am^2 t;$$

$$X = C \cos mx + D \sin mx + E \operatorname{ch} mx + F \operatorname{sh} mx.$$

Aceste soluții să satisfacă condițiile la limită. Astfel, pentru un capăt liber

$$X'' = X''' = 0;$$

pentru unul încastrat

$$X = X' = 0,$$

iar pentru unul articulat

$$X = X'' = 0$$

În afară de condițiile la limită, soluția ecuației vibrațiilor transversale ale barei trebuie să îndeplinească și condițiile de timp sau inițiale, care în general se dau sub forma :

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{t \to 0} = f(x);$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t \to 0} = \varphi(x),$$

Scanned with OKEN Scanner

una dintre aceste condiţii putînd fi înlocuită şi prin condiţia :

$$y(t=0) = \psi(x).$$

Citeodată se impun anumite relaţii liniare condiţionînd funcţia y şi una din derivatele ei în raport cu timpul etc.

12.2. Să se studieze propagarea sunetului prin lemn (fig. 12, 2).

Rezolvare. Se consideră că o forţă percutantă $\bar{F}$ determină în lungul fibrelor unei piese de lemn de suprafaţă $A(F \perp A)$ deformarea Δl care se transmite sub formă de unde perfect longitudinale pe o lungime Δx a piesei (fig. 12, 2), densitatea materialului lemnos fiind ρ.

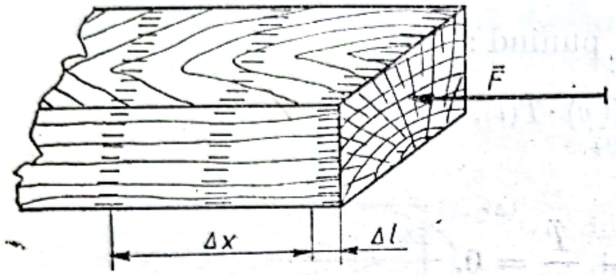


Fig. 12.2

Egalînd percusiunea $F \cdot \Delta t$ provocată de forţa F în timpul Δt cu variaţia impulsului (v' fiind viteza de deformaţie care se produce în masa m a materialului), rezultă :

$$F \cdot \Delta t = m \cdot v' \qquad \text{(a)}$$

Substituind forţa deformantă cu :

$$F = EA\,\Delta l/\Delta x,$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate în sens longitudinal cu fibrele, iar masa deformată cu :

$$m = \rho A \Delta x \qquad \text{(b)}$$

relaţia (a) devine :

$$\frac{A \cdot \Delta l \cdot E \cdot \Delta t}{\Delta x} = \rho A v' \Delta x. \qquad \text{(c)}$$

Deoarece :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = v'$$

relaţia (c) se mai poate scrie :

$$E \cdot \Delta l = \rho \Delta x \cdot v' v.$$

Împărţind prin Δt şi ţinînd seama de notaţiile de mai sus, egalitatea (c) devine :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad \text{(d)}$$

Egalitatea (d) reprezintă viteza de propagare longitudinală a sunetului prin lemn.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, se poate considera că propagarea sunetului are loc prin lemn în aşa fel, încît materialul suferă o alunecare şi torsionare, încît în mod analog cu (d), se poate scrie :

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad \text{(e)}$$

unde G reprezintă modulul de elasticitate la alunecare la (torsionare) al lemnului. Ţinînd seama, însă, de neomogenitatea şi anizotropia lemnului, elasticitatea lemnului la alunecare este caracterizată prin trei moduli de alunecare principali G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}, în funcţie de cele trei direcţii fundamentale din lemn (longitudinală, radială şi tangenţială). Din această cauză, vitezele transversale de propagare a sunetului vor avea mărimi diferite, în funcţie de mărimea modulilor de elasticitate menţionaţi.

Viteza de propagare a sunetului prin lemn se poate determina cu destulă precizie pe cale experimentală, prin măsurarea frecvenţei de rezonanţă şi a densităţii aparente a lemnului, ţinînd seama că între frecvenţa longitudinală ν_t şi viteza sunetului există următoarea relaţie :

$$\nu_t = \frac{nv}{2l}, \qquad \text{(f)}$$

unde v este viteza longitudinală a sunetului ; n — numărul de ordine al armonicei ; l — lungimea barei.

12.3. Să se studieze posibilitatea determinării pe cale dinamică a coeficientului de frecare de alunecare la lemn (fig. 12, 3).

Rezolvare. Pentru a determina coeficientul de frecare de alunecare se poate utiliza aparatul din figura 12, 3, care constă din doi cilindri, care se rotesc cu viteze unghiulare egale însă îndreptate în sensuri contrarii.

Principiul aparatului constă în măsurarea timpului de oscilaţie a unei scînduri aşezată iniţial în repaus pe cei doi cilindri.

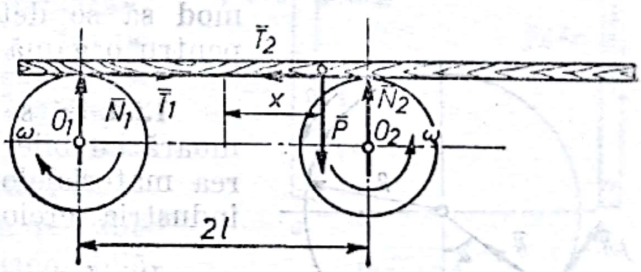


Fig. 12.3

Notînd cu x excentricitatea scîndurii, reacţiunile N_1 şi N_2 din punctele de contact dintre scîndură şi cilindrii au valorile :

$$N_1 = \frac{P(l-x)}{2l}; \qquad N_2 = \frac{P(l+x)}{2l}.$$

Forţele de frecare care apar în punctele de contact dintre scîndură şi cilindri au valorile :

$$T_1 = \mu N_1 = \mu \frac{P(l-x)}{2l};$$

$$T_2 = \mu N_2 = \mu \frac{P(l+x)}{2l}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Diferența acestor două forțe reprezintă forța rezultantă care acționează scîndura pe orizontală; ea are întotdeauna sensul contrar excentricității deoarece reacțiunea cilindrului din jumătatea în care se află centrul de greutate al scîndurii este mai mare.

Rezultă:

$$F = T_2 - T_1 = \frac{\mu P}{l} x.$$

Ecuația diferențială a mișcării scîndurii pe orizontală este deci:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F \quad \text{sau} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu g}{l} x = 0. \tag{a}$$

Se observă că s-a obținut o ecuație diferențială de ordinul doi, liniară cu coeficienți constanți, avînd drept soluție o mișcare rectilinie oscilatorie armonică, de perioadă:

$$T = 2\pi \frac{l}{\mu g},$$

de unde se obține:

$$\mu = \frac{4\pi^2 l}{g T^2}. \tag{b}$$

Cu ajutorul relației (b) se poate determina coeficientul de frecare de alunecare prin cronometrarea perioadei unei oscilații complete a scîndurii T. Bineînțeles că atît scîndura cît și cilindri care constituie cele două materiale în contact se pot înlocui de la o experiență la alta, permițînd în acest mod să se determine coeficientul de frecare pentru o gamă foarte mare de materiale.

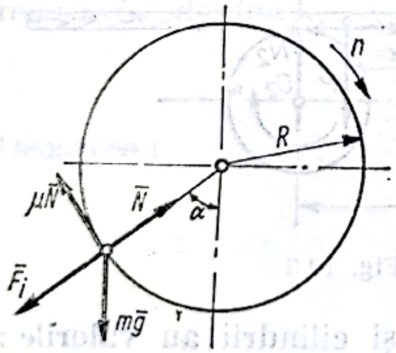


Fig. 12.4

12.4 Să se determine turația limită la o moară cu bile (fig. 12, 4) utilizată la măcinarea materialelor pentru formarea pastelor în industria creioanelor. Se cunosc: R, m și μ.

Rezolvare. Prin rotirea carcasei, datorită frecării între bilă și perete, aceasta se va ridica în direcția de rotație pînă cînd unghiul de ascensiune va fi mai mare decît cel de frecare, după care bila va cădea în interiorul morii zdrobind materialul.

Se consideră o bilă în poziția figurată; ecuațiile de ecuațiile de echilibru sînt:

$$\left.\begin{aligned} N - mg\cos\alpha - F_i &= 0; \\ \mu N - mg\sin\alpha &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

în care:

$$F_i = mR\frac{\pi^2 n^2}{900}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuaţia a doua se obţine $N = \frac{mg \sin \alpha}{\mu}$ şi introducînd în prima ecuaţie rezultă :

$$\frac{mg \sin \alpha}{\mu} - mg \cos \alpha - mR \frac{\pi^2 n^2}{900} = 0,$$

din care se scoate expresia turaţiei

$$n = \sqrt{\frac{900\, g}{\pi^2 R} \left(\frac{\sin \alpha}{\mu} - \cos \alpha \right)},$$

sau

$$n_{\text{lim}_{(\alpha=\pi)}} = \sqrt{\frac{900\, g}{\pi^2 R}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Valoarea obţinută reprezintă turaţia limită la care bilele nu mai efectuează lucru mecanic util, adică materialul nu va mai fi mărunţit. Practic turaţia se ia egală cu 75% din turaţia limită.

12.5. O grindă de lemn avînd masa m şi aria secţiunii A este scufundată într-un bazin cu apă. Datorită unei greutăţi adiţionale (a cărei masă este inclusă în m), grinda pluteşte în poziţie verticală (fig. 12.5, *a*). Să se studieze oscilaţiile libere neamortizate ale grinzii.

Rezolvare. În poziţia de echilibru static greutatea grinzii este echilibrată de forţa ascensională (Arhimede). Dacă deplasăm grinda de la poziţia de echilibru în jos pe distanţa x, forţa ascensionată creşte cu $\rho g A x$, unde ρ este densitatea apei. Diferenţa între noua forţă ascensională şi greutatea grinzii tinde să restabilească vechea poziţie de echilibru. Această forţă de restabilire (de rapel) este tocmai forţa disponibilă pentru accelerare (fig. 12.5, *b*).

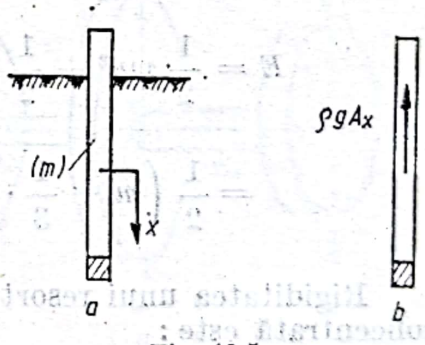


Fig. 12.5

Avem, atunci următoarea ecuaţie de mişcare :

$$m\ddot{x} = -\rho \cdot gAx \qquad \text{sau} \qquad \ddot{x} + \frac{gA\rho}{m} \cdot x = 0$$

Rezultă că pătratul pulsaţiei este :

$$\omega^2 = \frac{\rho g A}{m},$$

iar frecvenţa oscilaţiilor

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho g A}{m}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că, în această rezolvare, s-a neglijat efectul inerţiei şi vîscozităţii lichidului.

12.6. Avînd în vedere faptul că arborele unui ferăstrău circular are masa comparabilă cu a pînzei (de multe ori, chiar mai mare), să se determine turaţia critică cu considerarea masei arborelui (fig. 12.6, *a*).

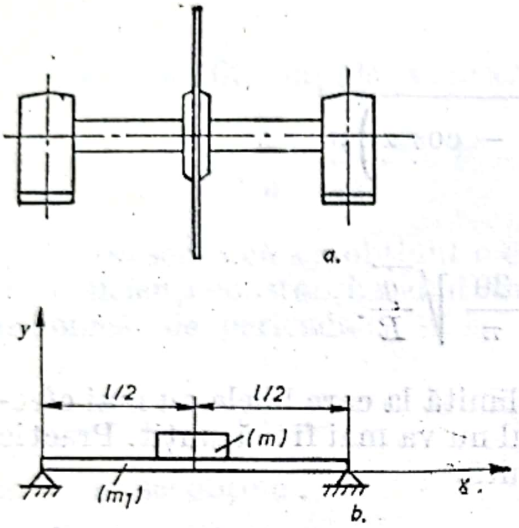


Fig. 12.6

Rezolvare. Sistemul poate fi schematizat ca în figura 12.6, *b* sub forma unei grinzi simplu rezemate, de rigiditate la încovoiere EI_z şi masă m_1, susţinînd o masă m. Să considerăm că modul fundamental de oscilaţie deformează fibra medie aproximativ în felul în care ar deforma-o o sarcină concentrată aplicată static în mijlocul grinzii. Atunci, deplasarea transversală η a unui element de masă situat la abscisa x poate fi scrisă ca :

$$\eta = \frac{x}{l}\left(3 - 4\frac{x^2}{l^2}\right) y, \text{ pentru } 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2},$$

unde y este deplasarea masei m. Energia cinetică a grinzii este dublul energiei jumătăţii din stînga. Energia cinetică a sistemului va fi :

$$E = \frac{1}{2} my^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{l/2} \frac{m_1}{l} \left[\frac{x}{l}\left(3 - 4\frac{x^2}{l^2}\right)\right]^2 \dot{y}^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{5} m_1\right) y^2.$$

Rigiditatea unui resort echivalent cu grinda solicitată de o sarcină concentrată este :

$$k = \frac{48EI_z}{l^3}.$$

Atunci, putem scrie energia potenţială ca fiind :

$$V = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} \frac{48EI_z}{l^3} y.$$

Aplicînd ecuaţia lui Lagrange de speţa II-a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

putem scrie forţa de inerţie şi, respectiv, forţa elastică corespunzătoare coordonatei y ca fiind :

$$F^i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) = -\left(m + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}m_1\right)\ddot{y};$$

$$F^e = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{48EI_z}{l^3}y.$$

Ecuaţia mişcării este

$$\sum F = -\left(m + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}m_1\right)\ddot{y} - \frac{48EI_z}{l^3}y = 0.$$

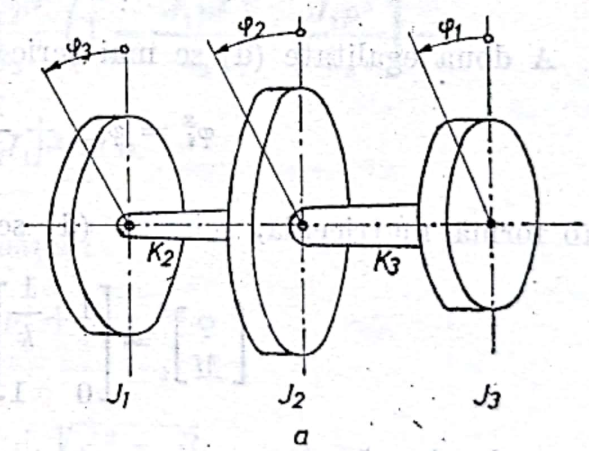
Pulsaţia proprie a arborelui va fi :

$$p = \sqrt{\frac{48EI_z}{\left(m + \frac{7}{15}m_1\right)l^3}}$$

iar turaţia critică

$$n_{cr} = \frac{30}{\pi}\cdot p = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{48EI_r}{\left(m + \frac{7}{15}m_1\right)l^3}}.$$

12.7. Să se determine pulsaţiile proprii ale sistemului oscilant cu trei volanţi, utilizat la o transmisie prin curea într-o fabrică de cherestea (fig. 12.7, *a*). Se cunosc momentele de inerţie ale volanţilor în raport cu axa de rotaţie J_1, J_2, J_3 şi constantele elastice ale arborilor k_2 şi k_3.



Rezolvare. Studiul vibraţiilor de răsucire ale arborilor cu mai multe mase se poate reduce la o problemă de tip Holzer, care se rezolvă fie tabelar, fie folosind matricele de transfer. În figura 12,7, *b* se arată o parte a unui arbore elastic şi fără masă, în lungul căruia, în diferite secţiuni sînt concentrate discuri rigide (cu masă). Sistemul execută vibraţii de răsucire cu pulsaţia p. Dacă se izolează discul i (fig. 12.7, *c*), ecuaţia de echilibru a momentelor se scrie :

$$M_i^D = M_i^S - J_i p^2 \varphi_i \quad (a)$$

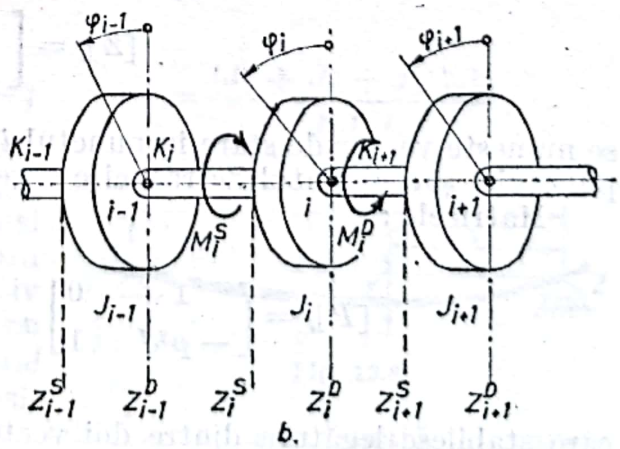


Fig. 12.7

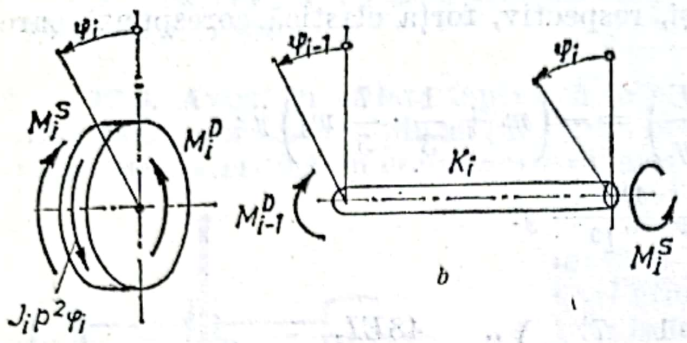


Fig. 12.7

Deoarece discul este rigid, rotirile la stînga şi la dreapta discului i sînt egale, deci :

$$\varphi_i^S = \varphi_i^D \qquad \text{(b)}$$

Sub formă matriceală ecuaţiile (a) şi (b) se scriu :

$$\begin{bmatrix} \varphi_i^D \\ M_i^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 J_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i^S \\ M_i^S \end{bmatrix},$$

sau

$$\begin{bmatrix} \varphi_i^D \\ M_i^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 J & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varphi \\ M \end{bmatrix}_i^S. \qquad \text{(c)}$$

Se izolează apoi tronsonul de arbore de constantă elastică k_i (fig. 12.7, *d*. Deoarece masa acestuia se neglijează, $M_i^S = M_{i-1}^D$. Momentele de torsiune sînt legate de rotirea relativă a celor două secţiuni terminale prin relaţiile :

$$M_i^S = M_{i-1}^D = k_i (\varphi_i^S - \varphi_{i-1}^D). \qquad \text{(d)}$$

A doua egalitate (d) se mai scrie

$$\varphi_i^S = \varphi_{i-1}^D + \frac{1}{k} M_{i-1}^D.$$

Sub formă matriceală, relaţiile (d) se scriu :

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ M \end{bmatrix}_i^S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varphi \\ M \end{bmatrix}_{i-1}^D. \qquad \text{(e)}$$

Vectorul coloană :

$$[Z]_i = \begin{bmatrix} \varphi \\ M \end{bmatrix}_i \qquad \text{(f)}$$

se numeşte vector de stare în punctul i, componentele lui fiind rotirea în punctul i şi momentul de răsucire corespunzătoare în arbore.

Matricele :

$$[P]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 J & 1 \end{bmatrix}_i, \quad [F]_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i, \qquad \text{(g)}$$

care stabilesc legătura dintre doi vectori de stare adiacenţi, se numesc matrice de transfer.

Scanned with OKEN Scanner

Cu notaţiile (f), (g) relaţiile (c) şi (e) devin :

$$[Z]_i^p = [P]_i\,[Z]_i^s, \tag{h}$$

$$[Z]_i^s = [F]_i\,[Z]_{i-1}^p, \tag{i}$$

deci

$$[Z]_i^p = [P]_i\,[F]_i\,[Z]_{i-1}^p. \tag{j}$$

În cazul sistemului oscilant din figura 12.7, *a*, relaţia dintre vectorii de stare de la extremităţi se scrie :

$$\begin{bmatrix} \varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J_3p^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k_3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J_2p^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -J_1p^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

După efectuarea înmulţirilor, se obţine ecuaţia pulsaţiilor :

$$-J_3p^2\left[1 - \frac{J_1p^2}{k_2} - \frac{J_2p^2}{k_3}\left(1 - \frac{J_1p^2}{k_2}\right) - \frac{J_1p^2}{k_3}\right] -$$

$$-J_2p^2\left(1 - \frac{J_1p^2}{k_2}\right) - J_1p^2 = 0.$$

După transformări, se obţine ecuaţia :

$$p^4 - 2Ap^2 + B = 0,$$

cu rădăcinile

$$p_{1,2}^2 = A \pm \sqrt{A^2 - B},$$

unde

$$A = \frac{(J_1 + J_2)k_2}{2J_1J_2} + \frac{(J_2 + J_3)k_3}{2J_2J_3}; \qquad B = \frac{(J_1 + J_2 + J_3)k_2k_3}{J_1J_2J_3}.$$

12.8. Pentru studiul dinamicii maşinilor utilizate la pachetizarea şi transportul buştenilor este necesară cunoaşterea frecvenţelor respectiv pulsaţiilor proprii ale bușteanului. Se cere să se calculeze pulsaţia proprie de oscilaţie a unui buştean, considerat ca o grindă de secţiune variabilă simplu rezemată la capete (fig. 12.8).

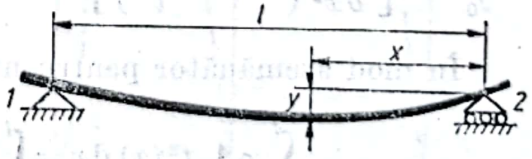


Fig. 12.8

Rezolvare. Considerînd arborele ca o bară de secţiune variabilă, de forma unui con, conform metodei Rayleight, pulsaţia vibraţiilor transversale de încovoiere este dată de relaţia :

$$p^2 = \frac{\int_0^l EI_x \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right]^2 dx}{\int_0^l \rho A_x f^2(x)\, dx}, \qquad \text{(a)}$$

unde ρ este densitatea (masa specifică) ;

$A_x = \frac{\pi d_x^2}{4} = \frac{\pi}{4}(d_1 - \xi x)^2$ este aria secţiunii curente ;

$I_x = \frac{\pi d_x^2}{64} = \frac{\pi}{64}(d_1 - \xi x)^4$ este momentul de inerţie al secţiunii curente ;

$\xi = \frac{d_1 - d_2}{l}$ este conicitatea buşteanului ;

d_1 şi d_2 — diametrele la cele două capete ale buşteanului.
Se consideră că forma deformată a buşteanului este :

$$f(x) = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \qquad \text{(b)}$$

care îndeplineşte condiţiile :

$$f(0) = f''(0) = 0 \quad \text{şi} \quad f(l) = f''(l) = 0 \qquad \text{(c)}$$

Cu aceste date numărătorul relaţiei (a) devine :

$$\int_0^l EI_x \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right]^2 dx = \frac{E\pi^5 a^2}{128\, l^4}\left[d_1^4 l - 2d_1^3 \xi l^2 + 2d_1^2 \xi^2 l^3 - d_1 \xi^3 l^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\xi^4 l^5 - \frac{3}{\pi^2} d_2^2 \xi^2 l^3 + \frac{3}{\pi^2} d_1 \xi^3 l^4 - \frac{1}{\pi^2} \xi^4 l^5\right]. \qquad \text{(d)}$$

Ţinînd cont că $\pi^2 \cong 10$ iar $d_1 - d_2 = \xi l$, relaţia (d) devine :

$$\int_0^l EI_x \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(y_0 \sin \frac{\pi x}{l}\right)\right]^2 dx = \frac{E\pi^5 y_0^2}{1280\, l^3}(d_1^2 + d_2^2)(d_2^2 + 3d_1 d_2 + d_2^2). \qquad \text{(e)}$$

În mod asemănător pentru numitorul relaţiei (a) se obţine :

$$\int_0^l \rho A_x f^2(x)\, dx = \int_0^l \rho \frac{\pi d_x^2}{4} a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{\rho \pi l a^2}{480}(17 d_1^2 + 26 d_1 d_2 + 17 d_2^2). \qquad \text{(f)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind relaţiile (e) şi (f) în relaţia (a) se obţine expresia pulsaţiei proprii pentru vibraţiile transversale ale bușteanului rezemat rigid la ambele capete :

$$p^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{E\pi^4}{\rho l^4} \cdot \frac{(d_1^2 + d_2^2)(d_1^2 + 3d_1d_2 + d_2^2)}{17\,d_2^2 + 26\,d_1d_2 + 17\,d_2^2}. \qquad (g)$$

12.9. O greutate Q este atîrnată de două bare elastice, din oţel, de secţiunea A, ca în figura 12.9. Neglijînd masa barelor în raport cu cea a greutăţii Q se cere să se calculeze frecvenţa de oscilaţie pe verticală a greutăţii. Se dau : $Q = 15$ kN ; $l = 1{,}8$ m ; $A = 2$ cm² ; $\alpha = 30°$ şi $E_{OL} = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm².

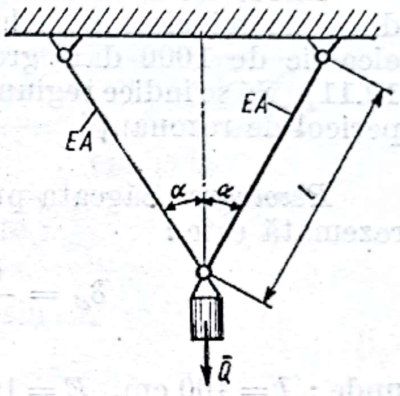


Fig. 12.9

Rezolvare. Frecvenţa de oscilaţie a greutăţii Q pe verticală este dată de relaţia :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}},$$

unde

$$\delta_{st} = \frac{\Delta l}{\cos\alpha} = \frac{Nl}{EA\cos\alpha} = \frac{Ql}{2EA\cos^2\alpha} = \frac{2Ql}{3EA},$$

căci $N = Q/2\cos\alpha$ este efortul dintr-o bară.

După înlocuiri se obţine :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3gEA}{2Ql}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3 \cdot 981 \cdot 2{,}1 \cdot 10^2 \cdot 2}{2 \cdot 15000 \cdot 180}} = 24{,}1 \text{ Hz}.$$

12.10. Pentru cadrul de susţinere a unui transportor mecanic suspendat (fig. 12.10) se cere să se calculeze pulsaţiile proprii pentru vibraţiile verticale şi orizontale. Masa cadrului se neglijează în comparaţie cu masa

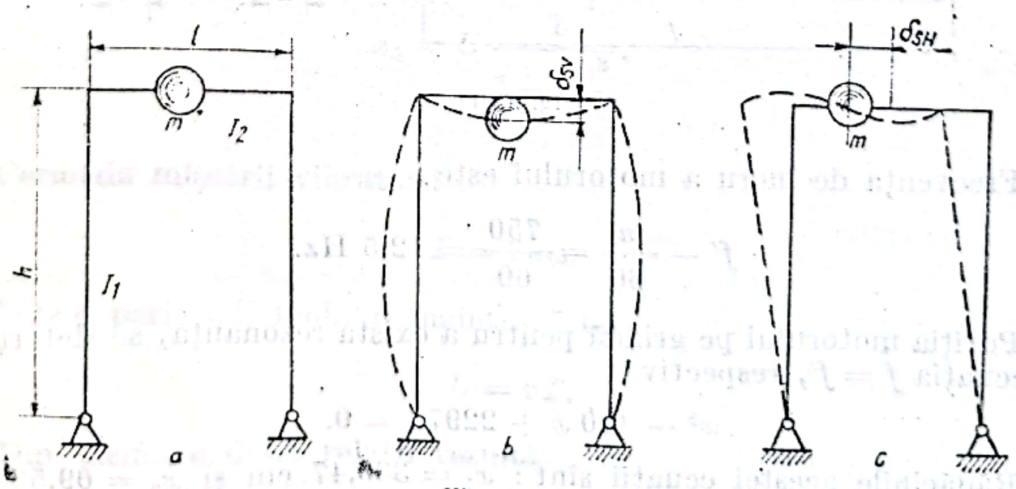


Fig. 12.10

m, care se găsește la mijlocul cadrului. Rigiditățile stîlpilor și traversei cadrului sînt diferite, respectiv se va introduce notația: $r = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$,

R. $\delta_{sV} = \frac{mgl^3}{48EI_2} \cdot \frac{8r+3}{8r+12}$; $\delta_{sH} = \frac{mgh^2l}{12EI_2}(2r+1)$;

$$p_V = \sqrt{\frac{g}{\delta_{sV}}} = \sqrt{\frac{48EI_2}{ml^3} \cdot \frac{8r+12}{8r+3}}; \quad p_H = \sqrt{\frac{g}{\delta_{sH}}} = \sqrt{\frac{12EI_2}{mh^2(2r+1)l}}.$$

12.11. Pe o grindă simplu rezemată, de 4 m deschidere, realizată din două grinzi de lemn de secțiune 12.24 cm² fiecare, este așezat un motor electric de 1000 daN greutate, care are o turație de 750 rot/min (fig. 12.11). Să se indice regiunile de așezare a motorului pe grindă în care există pericol de rezonanță.

Rezolvare. Săgeata produsă de o forță Q, așezată pe o grindă simplu rezemată este:

$$\delta_{st} = \frac{Qx^2(l-x)^2}{3EIl} = \frac{x^2(400-x)^2}{3{,}31776 \cdot 10^9},$$

unde: $l = 400$ cm, $E = 10^5$ daN/cm²; $Q = 1000$ daN și $I_1 = 2\frac{12 \cdot 12^3}{12} = 2 \cdot 13824$ cm⁴.

Frecvența vibrației proprii este:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{981 \cdot 3{,}31776 \cdot 10^9}{x^2(400-x)^2}} = \frac{2{,}872 \cdot 10^5}{x(400-x)}.$$

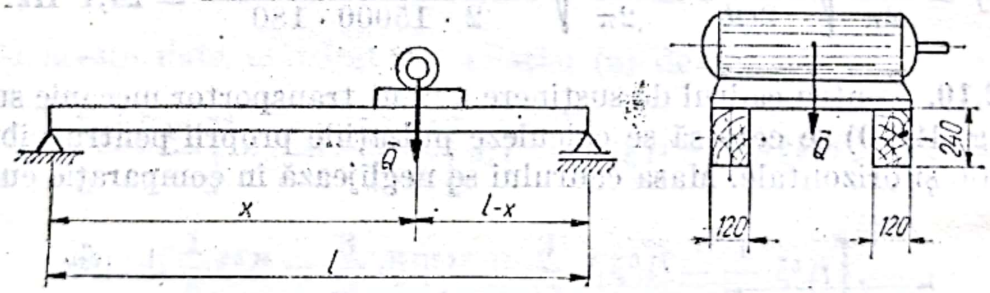


Fig. 12.11

Frecvența de lucru a motorului este:

$$f' = \frac{n}{60} = \frac{750}{60} = 12{,}5 \text{ Hz}.$$

Poziția motorului pe grindă pentru a exista rezonanța, se determină din ecuația $f = f'$, respectiv

$$x^2 - 400x + 22976 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sînt: $x_1 = 330{,}47$ cm și $x_2 = 69{,}53$ cm. Pentru aceste poziții ale motorului pe grindă are loc rezonanța.

Scanned with OKEN Scanner

12.12. Un vehicul de greutate P, destinat transportului buştenilor (fig. 12.10), se deplasează cu viteza v pe un drum forestier cu denivelarea maximă U, avînd perioada L. Dacă suspensia are constanta k, să se determine amplitudinea vibraţiilor cauzate de denivelări şi valoarea critică a vitezei de mers [8].

Rezolvare. Notînd denivelarea $y = U \sin \omega t$, la un moment dat ecuaţia mişcării corpului P este

$$\frac{P}{g}\ddot{x} + k(x - y) = 0;$$

$$\frac{P}{g}\ddot{x} + kx = ky = kU \sin \omega t. \quad \text{(a)}$$

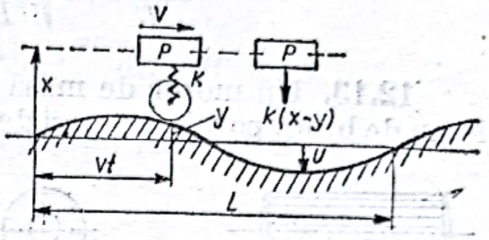


Fig. 12.12

Soluţia particulară a acestei ecuaţii este:

$$x_1 = x_0 \sin \omega t = U \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \sin \omega t. \quad \text{(b)}$$

Se poate verifica uşor că ea satisface ecuaţia (a)

$$-\frac{P}{y}\omega^2 U \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \sin \omega t + kU \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \sin \omega t = kU \sin \omega t$$

$$k - \frac{P}{g}\omega^2 = k\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right). \quad \text{(c)}$$

Cu $p^2 = gk/P$, relaţia (c) devine o identitate. Deci amplitudinea vibraţiei vehiculului este

$$x_0 = U \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}.$$

Perioada mişcării vibratorii este

$$T = 2\pi\omega.$$

Într-o perioadă, mobilul înaintează cu

$$L = vT.$$

Din ultimele două relaţii rezultă

$$\omega = 2\pi v/L.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pulsația proprie a vehiculului este

$$p = \sqrt{\frac{kg}{P}}.$$

Rezonanța are loc cînd $p = \omega$, deci

$$\frac{2\pi v_{cr}}{L} = \sqrt{\frac{kg}{P}} \quad \text{iar} \quad v_{cr} = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{P}}.$$

12.13. Un motor de masă $M = 500$ kg este așezat pe două grinzi de lemn de brad, paralele, lungi de $l = 160$ cm, rezemate la capete (fig. 12.13) Motorul are o masă neechilibrată $m = 5$ kg, excentricitatea $e = 10$ m, rotindu-se cu $n = 1500$ rot min. Grinzile pot fi alcătuite în trei variante, cu secțiunile : 1) $S_1 = 12 \times 20$ cm^2; 2) $S_2 = 12 \times 12$ cm^2; 3) $S_3 = 15 \times 24$ m^2, avînd respectiv, greutățile pe bucată $G_1 = 23$ daN $G_2 = 13{,}8$ daN, $G\gamma_3 = 34{,}5$ daN. Luînd $\sigma_a = 100$ daN/cm^2, să se arate care din grinzi poate suporta motorul [7,8].

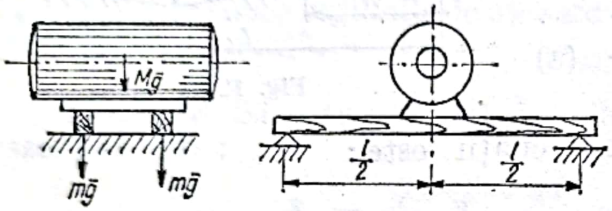


Fig. 12.13

Rezolvare. Pentru cele trei variante de grinzi, se calculează :
— constanta elastică (pentru o singură grindă) :

$$k = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48Ebh^3}{12l^3} = \frac{4Ebh^3}{l^3};$$

— pulsația proprie (ținînd seama și de masa grinzii) va fi

$$p = \sqrt{\frac{k}{\frac{M}{2} + \frac{17}{35}\cdot\frac{G}{g}}};$$

— turația critică

$$n_{cr} = \frac{30}{\pi} p;$$

— tensiunea statică în grindă

$$\sigma_{st} = \frac{\frac{Mg}{2}\cdot\frac{l}{4}}{W} = \frac{\frac{Mg}{2}\cdot\frac{l}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3Mgl}{4bh^2};$$

— tensiunea dinamică admisă

$$\sigma_d = \sigma_a - \sigma_{st};$$

Scanned with OKEN Scanner

— forţa dinamică admisă

$$\frac{Q_d l}{4} = \sigma_a W; \qquad Q_d = \frac{4\sigma_a \frac{bh^2}{6}}{l} = \frac{2\sigma_a bh^2}{3l},$$

căreia îi corespunde o săgeată dinamică (amplitudinea vibraţiei forţate)

$$x^1_{(1)} = \frac{Q_d l^3}{48EI} = \frac{2\sigma_d bh^2}{3l} \cdot \frac{l^3 \cdot 12}{48 Ebh^3} = \frac{l^2}{6H} \cdot \frac{\sigma_d}{E}.$$

La rîndul său expresia săgeţii dinamice este [8]:

$$x_0^{(2)} = \frac{\frac{m}{2}e}{\frac{M}{2}+\frac{m}{2}} A_2 = \frac{me}{M+m} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2} = \frac{me}{M+m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 1},$$

unde A_2 este factorul dinamic de amplificare.

Pentru a nu se depăşi rezistenţa admisibilă, trebuie ca a doua valoare a lui $x^2_{(0)}$ să fie mică sau cel mult egală cu prima, respectiv

$$\frac{me}{M+m} \cdot \left| \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 1} \right| \leqslant \frac{l^2}{6h} \cdot \frac{\sigma_d}{E},$$

de unde rezultă

$$\left| \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 1} \right| \leqslant \frac{(M+m) l^2 \sigma_d}{6h\, meE} = A;$$

Inversînd, se obţine

$$\left| \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 1 \right| \geqslant \frac{1}{A}.$$

Aceasta se transformă în două inegalităţi

$$\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 1 \geqslant \frac{1}{A}; \qquad 1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 \geqslant \frac{1}{A},$$

de unde rezultă două valori pentru ω:

$$\omega_2^2 < p^2 \frac{A}{A+1}; \qquad \omega_2^2 \geqslant p^2 \frac{A}{A-1},$$

Scanned with OKEN Scanner

cărora le corespund limitele inferioare și superioară ale turațiilor admisibile

$$n_1 < \frac{30}{\pi} p \sqrt{\frac{A}{A+1}}; \qquad n_2 \geqslant \frac{30}{\pi} p \sqrt{\frac{A}{A-1}}.$$

Rezultatele calculelor au fost înscrise în tabelul 12.13. Turația motorului $n = 1500$ rot min trebuie să fie inferioară valorii n_1 sau superioară valorii n_2, adică să nu fie cuprinsă în intervalul între n_1 și n_2. Se observă

Tabelul 12.13

Grinda	Secțiunea S cm²	k N/m	p S⁻¹	n_{cr} rot/min	σ_{st} daN/cm²	σ_d daN/cm²	A	n_1 rot/min	n_2 rot/min
1	12×20	9 375 000	189,38	1808	12,26	87,74	1,89	1461	2635
2	12×12	2 025 000	88,80	848	34,06	65,94	2,37	710	1115
3	15×24	20 250 000	275,35	2629	6,81	93,19	1,67	2080	4151

că la varianta 1 condiția nu este îndeplinită. Se poate realiza fundația în varianta 2, căci $n > n_2$, sau în varianta 3, pentru care $n < n_1$.

12.14. Să se studieze oscilațiile proprii cu amortizare ale tractorului de corhănit pe șenile avînd suspensia semirigidă (fig. 12.14, *a*).

Rezolvare. Schema sistemului dinamic oscilant este dată în figura 12.14, *a*. Se vede că masa m_2 ce revine punții din spate nu participă la oscilațiile sistemului, iar masele m_1 și m_3 oscilează în jurul punții din spate care este rigidă (fig. 12.14, *b*).

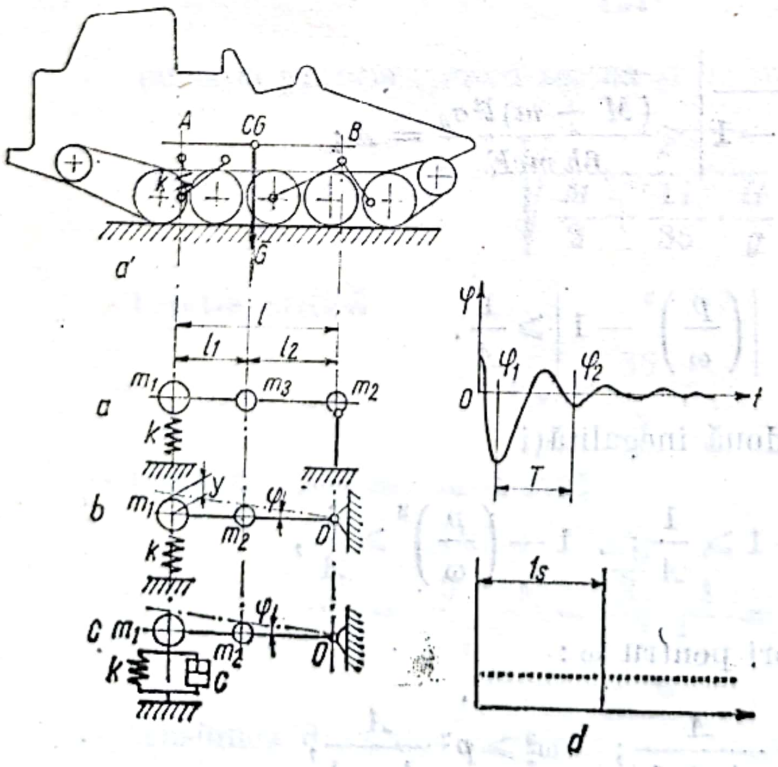


Fig. 12.1

În figurile 12.14, *b* și *c* s-au notat cu :

k — rigiditatea suspensiei punții din față iar cu

c — coeficientul de amortizare al suspensiei.

Sistemul oscilant are un singur grad de libertate. Poziția maselor suspendate m_1 și m_3 poate fi definită la un moment dat prin una din cele două coordonate generalizate :

y — deplasarea pe verticală a masei m_1, și

φ — unghiul de rotație al șasiului tractorului.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru sistemul cu un singur grad de libertate, cu considerarea forţelor de rezistenţă (disipative), ecuaţia lui Lagrange (diferenţială de ordinul II) are forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q+Q_r, \tag{a}$$

unde E este energia cinetică a sistemului; Q — forţa generalizată; Q_r — forţa disipativă; q — coordonata generalizată.

Avînd în vedere că:

$$E=\frac{1}{2}a\dot{q}^2; \quad Q=-\frac{\partial U}{\partial q}; \quad Q_r=-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}};$$

$$U=\frac{1}{2}k_1q^2; \quad \Phi=\frac{1}{2}b\dot{q}^2, \tag{b}$$

unde U este energia potenţială; Φ — funcţia disipativă; a — coeficient de inerţie; k_1 — coeficient de rigiditate; b — coeficient de disipaţie.

Expresiile mărimilor, care intră în ecuaţia lui Lagrange, sînt:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}=a\dot{q}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)=a\ddot{q}; \quad \frac{\partial E}{\partial q}=0; \quad Q=-k_1q; \quad Q_r=b\dot{q}.$$

Făcînd înlocuirile în ecuaţia (a), se obţine

$$a\ddot{q}+b\dot{q}+k_1q=0.$$

În cazul în care se adoptă rotaţia φ drept coordonată generalizată, rezultă

$$a_\varphi\ddot{\varphi}+b_{\dot{\varphi}}+k_{1\varphi}\varphi=0 \tag{c}$$

Analizînd schema de calcul a oscilaţiilor sistemului dinamic adoptat, se caută expresiile coeficienţilor a_φ, b_φ şi $k_{1\varphi}$ corespunzător oscilaţiilor libere cu amortizare.

Energia cinetică a sistemului are forma

$$E=\frac{1}{2}m_1\dot{y}^2+\frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}=\frac{1}{2}(m_1l^2+J_z)\dot{\varphi}^2,$$

unde m_1 este masa suspendată ce revine punţii din faţă iar J_z — momentul de inerţie al masei m_3 repartizată în centrul de masă, în raport cu axa Oz_1 transversală, trecînd prin puntea din spate.

Din relaţia (b), rezultă

$$E=\frac{1}{2}a\dot{q}^2=\frac{1}{2}(m_1l^2+J_z)\dot{\varphi}^2,$$

deci

$$a_\varphi=m_1l^2+J_z.$$

Energia potenţială a sistemului este :

$$U = -m_1 g y - m_3 g \frac{l_2}{l} y + k \frac{(f+y)^2}{2} - \frac{kf^2}{2} = -\left(m_3 g \frac{l_2}{l} + m_1 g\right) y +$$

$$+ kfy + \frac{ky^2}{2},$$

unde f este săgeata statică a resortului, iar $kf^2/2$ — energia potenţială a resortului în stare de echilibru.

La echilibru

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x=0} = -\left(m_3 g \frac{l_2}{l} + m_1 g\right) + kf = 0;$$

$$kf = m_3 g \frac{l_2}{l} + m_1 g; \qquad U = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} kl^2 \varphi^2.$$

Din expresia energiei potenţiale rezultă coeficientul de rigiditate al sistemului :

$$k_{1\varphi} = kl^2.$$

Pentru a studia amortizarea oscilaţiilor libere se consideră forţa de amortizare R proporţională cu viteza, respectiv

$$R = cv,$$

unde R este forţa de amortizare, iar v — viteza oscilaţiilor cadrului.

Forţa generalizată disipativă este deci

$$Q_r = -cv = -cl\dot{\varphi}.$$

Astfel

$$Q_r = -b\dot{q}; \qquad -b_\varphi \dot{\varphi} = -cl\dot{\varphi},$$

deci

$$b_\varphi = cl.$$

Înlocuind expresiile coeficienţilor în ecuaţia (c) se obţinne

$$(m_1 l^2 + J_z)\ddot{\varphi} + cl\dot{\varphi} + kl^2\varphi = 0$$

sau

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{m_1 l + m_3 \lambda l_2}\dot{\varphi} + \frac{k}{m_1 + m_3 \lambda}\varphi = 0, \qquad \text{(d)}$$

unde $\lambda = l_2/l$.

Neglijînd amortizarea, se obţine ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor libere :

$$\varphi + \frac{k}{m_1 + m_3 \lambda} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde :

$$\frac{k}{m_1 + m_3\lambda} = \omega^2, \tag{e}$$

ω fiind pulsaţia oscilaţiilor libere.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (d) se notează

$$\frac{c}{m_1 l + m_3 l_2 \lambda} = 2h, \tag{f}$$

unde h este coeficientul de amortizare al suspensiei.

Ecuaţia (d) devine :

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \tag{g}$$

Ecuaţia caracteristică a acestei ecuaţii este

$$d^2 + 2hd + \omega^2 = 0 \tag{h}$$

Rădăcinile ecuaţiei (h) sînt :

$$d_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2}; \qquad d_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2};$$

Oscilaţiile se amortizează pentru $h < \omega$ şi rădăcinile au forma complexă :

$$d_1 = -h + i\sqrt{\omega^2 - h^2}; \qquad d_2 = h - i\sqrt{\omega^2 - h^2}.$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale se poate scrie sub forma

$$\varphi = Ae^{-ht}\sin(\theta t + \alpha). \tag{i}$$

În relaţia (i), A este amplitudinea ; α — faza iniţială, iar $\theta = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ — pulsaţia oscilaţiilor proprii amortizate.

Amplitudinea şi faza iniţială se determină la $t = 0$, cînd $\varphi(t)_{t=0} = \varphi_0$ şi $\dot{\varphi}(t)_{t=0} = \dot{\varphi}_0$, respectiv :

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{(\dot{\varphi}_0 + h\varphi_0)^2}{\omega^2 - h^2}}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\dot{\varphi}_0 + h\varphi_0}{\varphi_0\sqrt{\omega^2 - h^2}}.$$

Fără considerarea amortizării, ecuaţia (g) are forma :

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \tag{j}$$

şi are soluţia

$$\varphi = A\sin(\omega t + \alpha), \tag{k}$$

unde

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}}{\omega^2}}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega\varphi_0}{\dot{\varphi}_0}$$

se determină la timpul $t = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţia (j) se vede că oscilaţiile proprii sînt armonice iar din relaţia (i) se observă că oscilaţiile sinusoidale se sting exponenţial în cazul amortizării (fig. 12.14, *d*).

Perioada oscilaţiilor este:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{h}{\omega}\right)^2}} = \frac{T_{01}}{\sqrt{1-\left(\frac{h}{\omega}\right)^2}},$$

unde $T_{01} = 2\pi\,\omega$ este perioada oscilaţiilor libere.

Pentru aprecierea amortizării se calculează coeficientul aperiodic

$$\psi = \frac{h}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{ln^2 p}}};$$

şi coeficientul de absorbţie a energiei în suspensie

$$\eta_W = 1 - \frac{1}{p^2},$$

unde p este decrementul logaritmic şi se calculează raportînd amplitudinile la interval de o perioadă:

$$p = \frac{Ae^{-ht_1}}{Ae^{-ht_1}} = e^{h(t_2-t_1)} = e^{ht} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

În figura 12.14, *d*, este înregistrată oscilograma pentru tractorul TDT—75 cu următoarele valori numerice:

$p = 5{,}6$; $T_0 = 0{,}52$ s; $\nu = 115$ osc/min (frecvenţa oscilaţiilor); $\varphi = 0{,}25 \div 0{,}45$; $\eta_W = 93 - 98\,\%$.

Frecvenţa oscilaţiilor maşinii studiate este apropiată de valoarea suportată uşor de organismul omenesc (90 osc/min).

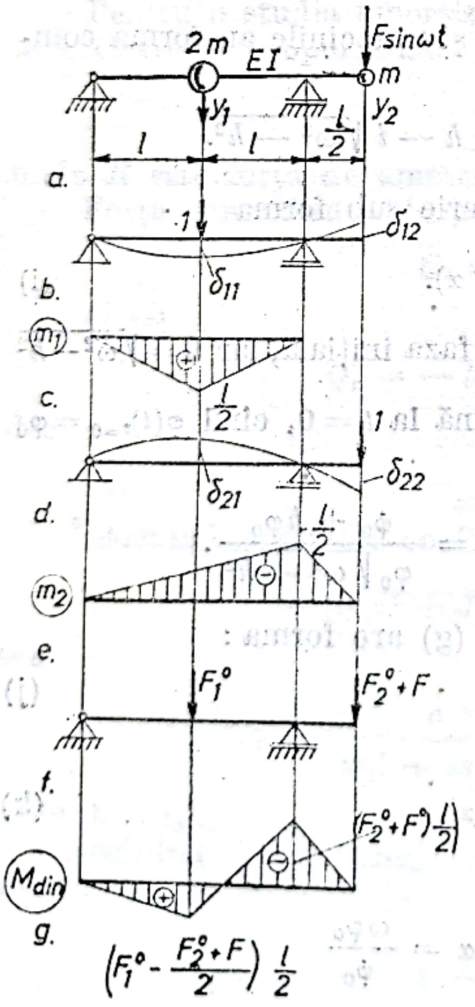


Fig. 12.15

12.15. Axul inferior al unui ferăstrău panglică poate fi schematizat ca în figura 12.15, *a*, unde cele două mase m şi $2m$ reprezintă masa volantului şi cea a şaibei de antrenare. Ştiind că asupra masei m acţionează o forţă armonică de amplitudine constantă F şi pulsaţia ω se cere să se calculeze amplitudinile deplasărilor celor două mase şi să se construiască diagrama momentelor încovoietoare dinamice (datorită vibraţiilor transversale faţă de poziţia de echilibru static) [8].

Rezolvare. Se foloseşte metoda coeficienţilor de influenţă. Conform figuri-

lor 12.15, $b, \ldots, e$, utilizînd metoda Mohr Maxwell şi regula de integrare Vereşceaghin, se obţine

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{6EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^3}{8EI} \text{ şi } \delta_{22} = \frac{5l^3}{24EI}.$$

Matricea coeficienţilor de influenţă şi matricea de inerţie au expresiile :

$$[\delta] = \frac{l^3}{24EI}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \diagdown & \\ & m \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţiile vibraţiilor au forma :

$$[b]\{\ddot{y}\} + \{y\} = [\delta]\{f\}, \tag{a}$$

unde

$$[b] = [\delta]\begin{bmatrix} \diagdown & \\ & m \end{bmatrix} = \frac{ml^3}{24EI}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}; \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \sin \omega t.$$

Se caută soluţii de forma $\{y\} = \{a\} \sin \omega t$, astfel că sistemul (a) devine

$$-\frac{ml^3\omega^2}{24EI}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{l^3}{24EI}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

sau

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -3 \\ -6 & 5-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = -\frac{F}{m\omega^2}\begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

unde s-a notat

$$\lambda = \frac{24EI}{ml^3\omega^2}.$$

Rezultă

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = -\frac{F}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 8-\lambda & \lambda-3 \\ -6 & 5-5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \end{Bmatrix} = -$$

$$-\frac{F}{m\omega^2}\frac{\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 6 & 8-\lambda \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8-\lambda & \lambda-3 \\ -6 & 5-\lambda \end{bmatrix}}\begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \end{Bmatrix} = -\frac{F}{m\omega^2}\frac{\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 6 & 8-\lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \end{Bmatrix}}{(\lambda-11)(\lambda-2)},$$

deci amplitudinile vibraţiilor forţate ale celor două mase sînt

$$a_1 = -\frac{F}{m\omega^2}\frac{3\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)}, \quad a_2 = -\frac{F}{m\omega^2}\frac{22-5\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)}.$$

Amplitudinile forţelor de inerţie corespunzătoare au expresiile

$$F_2^0 = 2m\omega^2 a_1 = -\frac{6\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)}F, \quad F_2^0 = m\omega^2 a_2 = -$$

$$-\frac{22-5\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)}F.$$

Pentru valori $2 < \lambda < 4{,}4$ forţele au sensul indicat în figura 12.15, *f* deci diagrama amplitudinilor momentelor încovoietoare dinamice are forma din figura 12.15, *g*. Pe baza acestei diagrame se pot calcula amplitudinile eforturilor unitare dinamice din bară.

Din analiza expresiilor (b) rezultă că pentru $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 11$, amplitudinile vibraţiilor devin infinite, sistemul vibrează la rezonanţă. Rezultă că pulsaţiile proprii ale sistemului au valorile

$$p_1 = 1{,}476\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \qquad p_2 = 3{,}46\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Pentru $\lambda = 4{,}4$, $v_2 = 0$, deci $p = 2{,}335\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ este pulsaţia la care masa m este fixă în spaţiu, numită pulsaţie de *antirezonanţă*.

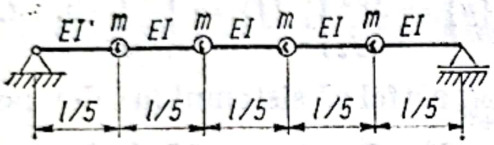


Fig. 12.16

12.16. Pentru ferăstrăul circular multiplu de spintecat se cere să se calculeze pulsaţiile proprii ale vibraţiilor transversale (fig. 12.16), folosind metoda coeficienţilor de influenţă [7, 8].

Rezolvare. Matricea coeficienţilor de influenţă este

$$[\delta] = \frac{m}{3750\,EI}\begin{bmatrix} 32 & 45 & 40 & 23 \\ 46 & 72 & 68 & 40 \\ 40 & 68 & 72 & 45 \\ 23 & 40 & 45 & 32 \end{bmatrix};$$

Prima pulsaţie proprie este $p_1 = 4{,}41\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$.

12.17 Pentru arborele ferăstrăului circular multiplu de spintecat (fig. 12.17) se cere să se calculeze pulsaţiile proprii şi formele modurilor proprii pentru vibraţiile torsionale [7, 8].

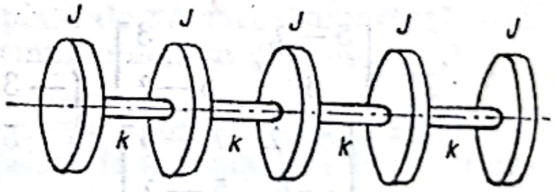


Fig. 12.17

R. $p_0 = 0$; $p_1 = 0{,}618\sqrt{\frac{k}{J}}$; $p_2 = 1{,}18\sqrt{\frac{k}{J}}$; $p_3 = 1{,}62\sqrt{\frac{k}{J}}$;

$\{\mu^{(0)}\}' = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}$

$\{\mu^{(1)}\}' = \{1 \quad 0{,}618 \quad 0 \quad -0{,}618 \quad -1\}$

$\{\mu^{(2)}\}' = \{1 \quad -0{,}381 \quad -1{,}237 \quad -0{,}381 \quad 1\}$

$\{\mu^{(3)}\}' = \{1 \quad -0{,}618 \quad 0 \quad 1{,}618 \quad -1\}$

$\{\mu^{(4)}\}' = \{1 \quad -2{,}613 \quad 3{,}226 \quad -2{,}613 \quad 1\}$

Scanned with OKEN Scanner

ANEXE

ANEXA 1

SISTEME DE MĂRIMI ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ

Nr. crt.	Sistemul de unităţi	Unităţile fundamentale	Mărimile fundamentale	Sistemul de dimensiuni corespunzător (simbolizare)
1	CGS	cm (centimetru) g (gram) s (secundă)	— lungime — masă — timp	LMT
2	MTS	m (metru) t (tonă) s (secundă)		
3	MKS	m (metru) kg (kilogram) s (secundă)		
4	FPS (A.S.U.) (Absolut System of Units)	ft (foot) ib (pound) s (secundă)		
5	MKfS (Sistemul tehnic)	m (metru) kgf (kilogram forţă) s (secundă)	— lungime — forţă — timp	LFT
6	Sistemul tehnic britanic (Gravitational System of Units-GSU)	ft (foot) lbf (pound-force) s (secundă)		
7	SI (Sistemul internaţional)	m (metru) kg (kilogram) s (secundă) A (amper) K (kelvin) cd (candelă)	— lungime — masă — timp — intensitatea curentului electric — temperatură termodinamică — intensitate luminoasă	LMTIQJ

Scanned with OKEN Scanner

ANEXĂ 2

MĂRIMI ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ UTILIZATE ÎN MECANICĂ *

Nr. crt.	Mărimea (simbol)	Unităţi ale Sistemului Internaţional (unităţi SI)			Unităţi de măsură diferite de unităţile SI				
		Denumirea	Notaţie	Dimensiuni	Denumirea**	Notaţie	Valoarea echivalentă în unităţi SI	Sistemul căruia aparţin	Tolerate în România (simbol)
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	a) Mărimi şi unităţi fundamentale :								
1	Lungime (l)	metru	m	L	punct tipografic	p	$3{,}76065 \cdot 10^{-4}$ m	—	***
					cicero	—	$4{,}51278 \cdot 10^{-3}$ m	—	***
					cvadrat	—	$1{,}80511 \cdot 10^{-2}$ m	—	***
					inch(ţol)	in	$2{,}54000 \cdot 10^{-2}$ m	FPS	—
					foto	ft	0,3048 m	FPS	—
					yard	yd	0,9144 m	FPS	—
					fathom	—	1,8288 m	FPS	—
					rod	—	5,0292 m	FPS	—
					chain	—	20,1168 m	FPS	—
					furlong	—	$2{,}01168 \cdot 10^{2}$ m	FPS	—
					milă	mile	$1{,}609344 \cdot 10^{3}$ m	FPS	—
					milă marină	—	$1{,}852 \cdot 10^{3}$ m	—	***
					unitate astronomică	UA	$1{,}495 \cdot 10^{11}$ m	—	—
					an lumină	a.l	$9{,}4605 \cdot 10^{15}$ m	—	***
					parsec	pc	$3{,}084 \cdot 10^{16}$ m	—	—
2	Masă (m)	kilogram	kg	M	gama	γ	10^{-9} kg	—	—
					grain	gr	$6{,}479891 \cdot 10^{-5}$ kg	—	—
					carat metric	ct	$2 \cdot 10^{-4}$ kg	—	***
					drachm (UK)	—	$3{,}88793 \cdot 10^{-3}$ kg	—	—
					dram ap (US)	—	$3{,}88793 \cdot 10^{-2}$ kg	—	—
					ounce	oz	$2.83495 \cdot 10^{-2}$ kg	—	—
					troy ounce	—	$3{,}11035 \cdot 10^{-2}$ kg	—	—
					troy pound	—	0,373242 kg	—	—
					pound	lb	0,45359237 kg	FPS	—
					stone	st	6,3503 kg	—	—

Scanned with OKEN Scanner

					kilogram forţă secundă la patrat pe metru	$kgf \cdot s^2/m$	9,80665 kg	MKfS	—
					slug	—	14,5939 kg	—	—
					short hundred weight	sh cwt	45,3592 kg	—	—
					hundred weight	cwt	50,8023 kg		
					quintal	q	10^2 kg	—	—
					short ton	sh tn	$9{,}07185 \cdot 10^2$ kg		
					tonă	t	10^3 kg	—	***
					ton(long ton)	ton	$1{,}01605 \cdot 10^3$ kg	—	—
3	Timp (t)	secundă	s	T	minut	min	60 s	—	***
					oră	h	$3{,}6 \cdot 10^3$ s	—	***
					zi	d	$8{,}64 \cdot 10^4$ s	—	***
					(săptămînă, lună, an)	—	—	—	***
b) Mărimi și unităţi suplimentare									
1	Unghi plan ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$)	radian	rad	—	grad centezimal (nou)	...g	$1{,}570796 \cdot 0^{-2}$ rad	—	***
					grad sexagesimal (vechi)	...O	$1{,}7453291\ 10^{-2}$ rad	—	***
					unghi drept	...L	1,570796 rad	—	***
					unghi plan total (rotaţie)	2π	6,283185 rad	—	***
2	unghi solid (Ω)	steradian	sr	—	unghi solid total	—	12,56637 sr	—	***

* Întocmit după: ISCRULESCUI, ș.a. — Sistemul internaţional de unităţi de măsură. E. T. Buc. 1970.
** Pentru unele unităţi americane şi engleze se folosesc notaţiile în paranteză (U.S.) respectiv (U.K.).
*** Unităţi tolerate şi în România pînă la noi reglementări; fără recomandări privind simbolul de utilizare echivalent în unităţi SI.

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 2 (continuare)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		c) Mărimi și unități derivate							
1	Ark (Ş ; A)	metru pătrat	m^2	L^2	square inch	in^2	$6{,}45161 \cdot 10^{-4}$ m^2	FPS	—
					square foot	ft^2	$9{,}29030 \cdot 10^{-2}$ m^2	FPS	—
					square yard	yd^2	$0{,}836127$ m^2	FPS	—
					square rod	rod^2	$25{,}2929$ m^2	FPS	—
					ar	a	10 m^2	—	***
					hectar	a	10^4 m^2	—	***
					rood	—	$1{,}01171 \cdot 10^2$ m^2...	FPS	—
					acre	—	$4{,}04686 \cdot 10^3$ m^2	FPS	—
					milă pătrată	mil^2	$2{,}58999 \cdot 10^6$ m^2	FPS	—
2	Volum, capacitate (V)	metru cub	m^3	L^3	cubic inch	in^3	$1{,}63871 \cdot 10^{-5}$ m^3	FPS	—
					cubic foot	ft^3	$2{,}83168 \cdot 10^{-2}$ m^3	FPS	—
					cubic yard	yd^2	$0{,}764555$ m^3	FPS	—
					ster	—	1 m^3 (stivă)	—	—
					shipping ton	—	$1{,}132674$ m^3	—	—
					registered ton	—	$2{,}83168$ m^3	—	—
					minim (UK)	min (UK)	$5{,}91939 \cdot 10^{-8}$ m^3	—	—
					minim (US)	min (US)	$6{,}16115 \cdot 10^{-8}$ m^3	—	—
					mililitru	ml	10^{-6} m^3	—	***
					fluid drachm (UK)	fldr (UK)	$3{,}55163 \cdot 10^{-6}$ m^3	—	—
					fluid dram (US)	fldr(US)	$3{,}69669 \cdot 10^{-6}$ m^3	—	—
					fluid ounce (UK)	fl oz (UK)	$2{,}84130 \cdot 10^{-5}$ m^3	—	—
					fluid ounce (US)	fl oz (US)	$2{,}95735 \cdot 10^{-5}$ m^3	—	—
					gill(CS)	gl	$1{,}18294 \cdot 10^{-4}$ m^3	—	—
					gill(K)	—	$1{,}42065 \cdot 10^{-4}$ m^3	—	—
					dry pint (US)	dry pt(US)	$5{,}50610 \cdot 10^{-4}$ m^3	—	—
					pint (UK)	pt(UK)	$5{,}68261 \cdot 10^{-4}$ m^3	—	—
					lichid quart(US)	liq qt	$9{,}46352 \cdot 10^{-4}$ m^3	—	—
					litru	l	10^{-3} m^3	—	***
					litru metrologic	lm	$1{,}000028 \cdot 10^{-3}$ m^3	—	—
					dry quart(US)	dry qt	$1{,}101220 \cdot 10^{-3}$ m^3	—	—
					quart(UK)	qt(UK)	$1{,}13652 \cdot 10^{-3}$ m^3	—	—

Scanned with OKEN Scanner

					gallon(US)	gal(US)	$3{,}78541 \cdot 10^{-3}$ m³	—	—
					gallon (UK)	gal(UK)	$4{,}54609 \cdot 10^{-3}$ m³	—	—
					peck(US)	pk	$8{,}809760 \cdot 10^{-3}$ m³	—	—
					peck(UK)	—	$9{,}09218 \cdot 10^{-3}$ m³	—	—
					dublu decalitru	ddal	$2{,}000056 \cdot 10^{-2}$ m³	—	—
					bushel (US)	bu(US)	$3{,}52391 \cdot 10^{-2}$ m³	—	—
					bushel (UK)	bu(UK)	$3{,}63687 \cdot 10^{-2}$ m³	—	—
					dry barrel(US)	dbl(US)	$1{,}15627 \cdot 10^{-2}$ m³	—	—
					barrel(US)	—	$1{,}58987 \cdot 10^{-2}$ m³	—	—
					hectolitru	hl	10^{-1} m³	—	***
3	Viteză (v)	metru pe secundă	m/s	LT^{-1}	kilometru pe oră	km/h	0,277778 m/s	—	***
					foot per second	ft/s	0,3048 m/s	FPS	—
					milă pe oră	mile/h	0,44704 m/s	—	—
					nod (milă marină pe oră)	—	0,514444 m/s	—	—
					knot(UK)	—	0,514772 m/s	—	—
					yard per second	yd/s	0,9144 m/s	FPS	—
4	Viteză unghiulară (ω)	radian pe secundă	rad/s	T^{-1}	grad centezimal pe secundă	...g/s	$1{,}570796 \cdot 10^{-3}$ rad/s	—	—
					grad sexagesimal pe secundă	...°/s	$1{,}745329 \cdot 10^{3}$ rad/s	—	—
					rotație pe minut	rot/min	1,047198 rad/s	—	—
					rotație pe secundă	rot/s	6,283185 rad/s	—	—
5	Accelerație (a)	metru pe secundă la pătrat	m/s^2	LT^{-2}	gal	gal	10^{-2} m/s^3	CGS	—
					foot per square second	ft/s^2	0,3048 m/s^2	FPS	—
					milă pe oră pe secundă	(mile/h)/s	0,44704 · m/s^3	—	—
					yard per square second	yd/s^2	0,9144 m/s^2	FPS	—
6	Accelerație unghiulară (ε)	radian pe secundă la pătrat	rad/s^2	T^{-2}	—	—	—	—	—

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 2 (continuare)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	Număr de undă	unu pe metru	1/m	L^{-1}	—	—	—	—	—
8	Frecvență (f ; ν)	hertz	Hz	T^{-1}	—	—	—	—	—
9	Pulsație sau frecvență unghiulară (ω ; p)	unu pe secundă	1/s	T^{-1}	—	—	—	—	—
10	Frecvență de rotație sau turație (n)	unu pe secundă	1/s	T^{-1}	rotație pe secundă rotație pe minut	rot/s rot/min	— $1{,}666667 \cdot 10^{-2}$ 1/s	— —	*** ***
11	Densitate sau masă volumică (ρ)	kilogram pe metru cub	kg/m^3	$L^{-3}\,M$	grain per cubic inch	gr/in^3	3,95427 kg/m^2	—	—
					kilogram forță-secundă la pătrat pe metru la puterea a patra	$kgf \cdot s^2/m^2$	9,80665 kg/m^2	MkfS	—
					pound per cubic foot	lb/ft^3	16,0185 kg/m^3	FPS	—
					gram pe centimetru cub	g/cm^3	10^3 kg/m^3	CGS	***
					tonă pe metru cub	t/m^3	10^4 kg/m^3	MTS	***
					kilogram pe decimetru cub	kg/dm^3	10^3 kg/m^3	MKS	***
					short ton per cubic yard (US)	$shtn/yd^3$	$1{,}18655 \cdot 10^3$ kg/m^2	—	—
					long ton per cubic yard	ton/yd^3	$1{,}32894 \cdot 10^3$ kg/m^2	—	—
					pound per cubic inch	lb/in^3	$2{,}76799 \cdot 10^4$ kg/m^2	PFS	—

Scanned with OKEN Scanner

12	Densitate de suprafață a masei (ρA ; ρ_s)	kilogram pe metru pătrat	kg/m^2	$L^{-2}M$	gram pe metru pătrat	g/m^2	10^{-3} kg/m^2	MKS	—
13	Densitatea de lungime a masei (ρl)	kilogram pe metru	kg/m	$L^{-2}M$	gram pe kilometru (tex)	g/kg(tex)	10^{-6} kg/m	MKS	—
					gram pe metru	g/m	10^{-6} kg/m	MKS	—
14	Moment de inerție al masei sau moment de inerție dinamic (J)	kilogram metru pătrat	$kg_1 \cdot m^2$	L^3M	gram-centimetru pătrat	$g \cdot cm^2$	10^{-7} $kg \cdot m^2$	CGS	—
					pound-square inch	$lb \cdot in^2$	$2{,}92640 \cdot 10^{-4}$ $kg \cdot m^2$	FPS	—
					pound-square foot	$lb \cdot ft^2$	$4{,}21401 \cdot 10^{-2}$ $kg \cdot m^2$	FPS	—
					short ton-square inch	$shtn \cdot in^2$	0,585279 $kg \cdot m^2$	—	—
					long ton-square inch	$ton \cdot in^2$	0,655513 $kg \cdot m^2$	—	—
					kilogram forță metru-secundă la pătrat	$kgf \cdot m \cdot s^2$	9,80665 $kg \cdot m^2$	MKfS	—
					short ton-square foot	$shtn \cdot ft^2$	84,2802 $kg \cdot m^2$	—	—
					long ton- square foot	$ton \cdot ft^2$	94,3938 $kg \cdot m^2$	—	—
					tonă-metru pătrat	$t \cdot m^2$	10^2 $kg \cdot m^2$	MTS	—
15	Forță (F. G, Ω.,)	newton	N	LMT^{-2}	dyna	din	10^{-5} N	CGS	—
					poundal	pdl	0,138255 N	FPS	—
					pound force	lbf	4,44822 N	—	—
					kilogram forță	kgf	9,80665 N	MKfS	(daN)
					stena	sn	10^{-3} N	—	—
					short ton force	shtnf	$8{,}89644 \cdot 10^3$ N	—	—
					long ton force	tonf	$9{,}96402 \cdot 10^3$ N	—	—

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 2 (continuare)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	Presiune, tensiune mecanică (p)	newton pe metru pătrat	N/m^2	$L^{-1}MT^{-2}$	bar	bar	10^6 N/m^2	—	***
					atmosferă tehnică	at	$9{,}80665 \cdot 10^4 N/m^2$	—	(daN/cm)
					milimetru coloană de apă	mmH_2O	$9{,}80665$ N/m^2	—	***
					milimetru coloană de mercur	mm Hg	$1{,}33322 \cdot 10^2$ N/m^2	—	***
					kilogram forţă pe metru pătrat	kgf/m^2	$9{,}80665$ N/m^2	MKfS	(daN/m^2)
					pascal	Pa	1 N/m^2	MKS	—
					torr	torr	$1{,}33322 \cdot 10^2$ N/m^2	—	—
					piez	pz	10^3 N/m^2	—	—
					atmosferă fizică	atm	$1{,}01325 \cdot 10^5$ N/m^2	—	—
17	Greutatea specifică sau greutatea volumică (γ)	newton pe metru cub	N/m^3	$L^{-2}MT^{-3}$	kilogram forţă pe metru cub	kgf/m^3	$9{,}80665$ N/m^3	7KfS	—
					dynă pe centimetru cub	dyn/cm^2	10 N/m^3	CGS	—
					pound force per cubic foot	lbf/ft^3	$1{,}57087 \cdot 10^2$ N/m^3	—	—
18	Momentul unei forţe şi momentul unui cuplu de forţe (M; M)	newton metru	N. m	L^2MT^{-2}	dynă-centimetru	dyn · cm	10^{-7} N · m	CGS	—
					kilogram forţă metru	kgf · m	$9{,}80665$ N · m	MKfS	(daN · m)
					stenă centimetru	sn · cm	10 N · m	—	—
					pound force foot	lbf · ft	$1{,}35582$ N · m	—	—
19	Impuls (cantitate de mişcare) (H, h)	kilogram metru pe secundă	kg · m/s	LMT^{-1}	gram centimetru pe secundă	g · cm/s	10^{-5} kg · m/s	CGS	—
					pound-foot per second	lb · ft/s	$0{,}138225$ kg · m/s	FPS	—
					kilogram forţă secundă	kgf · s	$0{,}80665$ kg · m/s	MKfS	—
20	Impulsul forţei (percuţie) (P)	newton secundă	N · s	LMT^{-1}	dynă secundă	dyn · s	10^{-5} N · s	CGS	—
					kilogram forţă secundă	kgf · s	$9{,}80665$ N · s	MKfS	—

Scanned with OKEN Scanner

21	Moment cinetic (k.K)	kilogram metru pătrat pe secundă	kg·m²/s	L^2MT^{-1}	gram centimetru pătrat pe secundă	g · cm²/s	10^{-7} kg · m²/s	CGS	—
					kilogram forță metru secundă	kgf · m · s	9,80665 kg · m²/s	MKfS	—
22	Lucru mecanic (L) Energia mecanică (E.W.U)	Joule	J	L^2MT^{-1}	erg	erg	10^{-7} J	CGS	—
					foo poundal	ft. · pdl	$4{,}21401 \cdot 10^{-2}$ J	FPS	—
					kilogram forță metru	kgf · m	9,80665 J	MKfS	(daJ)
					kilowatt oră	kwh	$3{,}6 \cdot 10^6$ J	—	***
					cal putere oră	CP · h	$2{,}6478 \cdot 10^6$ J	—	—
23	Putere mecanică (P)	watt	W	L^2MT^{-2}	erg pe secundă	erg/s	10^{-7} W	CGS	—
					foot-poundal per second	ft · pdl/s	$4{,}21401 \cdot 10^{-2}$ W	FPS	—
					kilogram-forță metru pe secundă	kgf · m/s	9,80665 W	MKfS	—
					cal putere	CP	$7{,}35449 \cdot 10^2$ W	—	—
24	Viscozitate dinamică (η, μ)	newton-secundă pe metru pătrat	N · s/m²	$L^{-1}MT^{-1}$	poise	P	10^{-1} N · s/m²	CGS	—
					poundal-second per square foot	pdl · s/ft²	1,48810 N · s/m²	FPS	—
					kilogram forță secundă pe metru pătrat	kgf · s/m²	9,80665 N · s/m²	MKFS	—
					centipoise	cP	10^{-3} N · s/m²	—	***
25	Viscozitate cinematică (ν)	metru pătrat pe se-secundă	m/²/s	L^2T^1	stokes	St	10^{-4} m²/s	CGS	—
					square foot per second	ft²/s	$9{,}29030 \cdot 10^{-2}$ m²/s	FPS	—
					square inch per second	in²/s	$6{,}4516 \cdot 10^4$ m²/s	FPS	—
					centistokes	cSt	10^{-6} m²/s	—	***

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 3

Prefixele pentru formarea multiplilor și submultiplilor unităților (SI)

Factori de multiplicare	Prefixul	Simbolul prefixului
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	tera	T
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	giga	G
$1\,000\,000 = 10^{6}$	mega	M
$1\,000 = 10^{2}$	kilo	k
$100 = 10^{1}$	hecto	k
$10 = 10^{2}$	deca	da
$0{,}1 = 10^{-1}$	deci	d
$0{,}01 = 10^{-2}$	centi	c
$0{,}001 = 10^{-3}$	mili	m
$0{,}000\,001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$	nano	n
$0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	pico	p
$0{,}000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	femto	f
$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	atto	a

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan, Şt. — Culegere de probleme de mecanică. E. D.P. Bucureşti ,1972.
2. Benche, V. — Mecanica fluidelor şi maşini hidraulice. Reprografia Univ, din Braşov 1978.
3. Benche, V. — Curs general de maşini hidraulice şi termice. Reprografia I. P. Braşov 1971.
4. Benche, L. şi Curtu, I. — Mecanica şi rezistenţa materialelor în probleme pentru subingineri. Reprografia Universităţii din Braşov, 1974.
5. Buzdugan, Gh.— Rezistenţa materialelor. Ed. tehnică, Bucureşti, 1975.
6. Buzdugan, Gh. ş.a. — Culegere de probleme de rezistenţa materialelor. E.D.P., Bucureşti, 1978.
7. Buzdugan, Gh., ş.a. — Vibraţiile sistemelor mecanice. Ed. Academiei R.S.R. Bucureşti, 1975.
8. Buzdugan, Gh., ş.a. — Vibraţii mecanice. E.D.P., Bucureţti, 1979.
9. Cosoroaba, V. , ş.a. — Acţionări pneumatice. Ed. tehnică, Bucureşti, 1971.
10. Creţu, I., ş.a. — Probleme de hidraulică. Ed. tehnică, Bucureşti, 1973.
11. Cristea Mateescu — Hidraulica. E.D.P., Bucureşti, 1961.
12. Curtu, I., ş.a. — Cercetări privind constantele elastice ale plăcilor din aşchii şi fibre de lemn produse în ţara noastră. În : Ind. lemnului, 21, nr. 3, 1970.
13. Curtu, I. şi Florea, R. — Cercetări privind rezistenţa elementelor din structura mobilei. Lucrările simpozionului „Proiectarea asistată de calculator", Braşov, 1978, vol. 3.
14. Curtu, I. — Amortizarea şocurilor şi vibraţiilor la un batiu de ferăstrău panglică. În : Ind. lemnului, 25, nr. 8, 1974.
15. Curtu, I. — Studiul torsiunii barelor de lemn de secţiune dreptunghiulară. In : Ind lemnului, 29, nr. 3, 1978.
16. Curtu, I. — Rezistenţa materialelor, vol. I şi II. Reprografia Universităţii din Braşov, 1976 şi 1977.
17. Curtu, I. — Rezistenţa furnirelor de fag utilizate la fabricarea placajelor. În : Industria lemnului, 19, 1968, nr. 7, pag. 291—297.
18. Curtu, I., Benche, L. şi Gonciar, M. — Mecanica şi rezistenţa materialelor în prelegeri pentru subingineri. Reprografia Universităţii din Braşov, 1979.
19. Curtu, I. — Contribuţii la studiul batiurilor maşinilor-unelte pentru prelucrarea lemnului. Teză de doctorat, Universitatea din Braşov, 1973.
20. Curtu, I., ş.a. — Über die Festigkeit verleimter Holz-Kunstoff-Verbindungen, T.1 und 2. În : Die Holzbearbeitung, nr. 7 şi 8, 1976, R.F.G.
21. Curtu, I. — Tensiuni statice şi dinamice într-un batiu de ferăstrău panglică. In : Industria lemnului, nr. 7, 1972.

Scanned with OKEN Scanner

22. Deliu, Gh. — Mecanica. Reprografia Universității din Brașov, 1975.
23. Deutsch, I. Serbu, Ad. — Determinarea calotelor de răşinoase de aceeaşi rezistenţă cu cheresteaua de secţiune dreptunghiulară. În : Ind. lemnului, 23, nr. 1, 1972.
24. Deutsch, I. ş.a. — Studiu comparativ al rezistenţei şi rigidităţii la încovoiere a calotelor de răşinoase. În : Industria lemnului, 22, nr. 10, 1971.
25. Deutsch, I. — Rezistenţa materialelor. E.D.P., Bucureşti, 1976.
26. Deutsch, I. ş.a. — Probleme de rezistenţa materialelor. E.D.P., Bucureşti, 1979.
27. Dogaru, V. — Aşchierea lemnului. Ed. tehnică, Bucureşti, 1978.
28. Dragan, I., C. ş.a. — Funiculare forestiere. Editura Ceres, Bucureşti, 1971.
29. Filikevici, V. I.— Dinamica lesopilinih ram. Izd. Lesnaia promişlenosti, Moskva, 1966.
30. Florea, S. ş.a. — Elemente de execuţie hidraulice şi penumatice.. E.D.P., Bucureşti, 1967.
31. Florea, S. ş.a. — Mecanica fluidelor. Probleme. E.D.P., Bucureşti, 1976.
32. Ghencea, N. ş.a. — Construcţii de lemn. Reprografia Inst., Construcţii, Bucureşti, 1975.
33. Goia, I. Rezistenţa materialelor, vol. I., partea I-a. Reprografia Univ. din Braşov, 1978, vol II, 1981
34. Göldner, H. ş.a. — Leitfaden der Technischen Mechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1976.
35. Ionaşcu, Gh. — Utilaje şi instalaţii pentru construcţii forestiere. E.D.P., Bucureşti, 1978.
36. Keylwerth, R. — Die anisotrope Elastizität des Holzes unde der Lagenhölzer. V.D.I. — Foreschungsheft 430, 1951.
37. Klicikov, P., D. — Postroenie bezrazmernoi haracteristiki prodolinoi ustoicivost kolesnoi trelevocino — transportnoi maşini. In : Lesnoi jurnal, nr. 1, 1975.
38. Kollmann, F. ş.a. — Principles of Woods Science and Technology, vol., I, Springer Verlag, Berlin, 1968.
39. Korotiaev, L., V. — Issledovanie jestkosti hlistov. Lesnoi jurnal, 1978.
40. Korotiaev, L. V. — K voprosu ob opredelenii nekotorîh gheometriceskih parametrov hlista i dereva. In : Lesnoi jurnal nr. 2, 1976.
41. Lastocikin, P., V., ş.a. — Dvijenic brevna po naklonnîm pokatam. Bul. St. Acad. de Silv. Leningrad, 1978.
42. Lehnitki, S. G. — Teoria uprugosti anizotropnovo tela. Izd. Nauka, Moskva, 1977.
43. Lugojanu, M. şi Lugojanu, R. — Elemente cinematice pentru studiul aşchierii lemnului cu freze frontale. Buletinul ştiinţific al Univ. din Braşov, seria B, 1977.
44. Mazilu, P., ş.a. — Probleme de rezistenţa materialelor, vol. I, 1969, vol. II 1975. Ed. tehnică, Bucureşti.
45. Miroliubov, I., N. ş.a. — Posobie k reşeniu zadaci po soprotivleniu materialov. Visşaia şkola, Moskva, 1969.
46. Olariu, V. — Mecanica teoretică, vol. I — Statica, vol. II — Cinematica, vol. III — — Dinamica. Reprografia I. P. Braşov, 1969.
47. Oprean, A. ş.a. — Acţionări hidraulice. Ed. tehnică, Bucureşti, 1976.
48. Otreşko, A. I.— Elemente de construcţii, vol. II. Construcţii din lemn. Ed. tehnică a transporturilor, Bucureşti, 1952.
49. Petrican, M., Mitisor, Al., Curtu, I. ş.a. — Curbarea şi mularea lemnului, Ed. tehnică, Bucureşti, 1979
50. Petrican, M., Curtu, I. ş.a. — Aplicaţii ale tensometriei în industria lemnului. Ed. tehnică, Bucureşti, 1980.
51. Ponomoriov, S. D., ş.a. — Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini. Ed. tehnică, Bucureşti, vol. I., 1960, vol. II, 1963 şi vol. III, 1964.

Scanned with OKEN Scanner

52. Popa, A., Lugojanu, M. — Utilajul şi tehnologia fabricării cherestelei. E. D. P Bucureşti, 1965.
53. Posea, N. — Rezistenţa materialelor. E.D.P. — Bucureşti, 1979.
54. Radu, A. — Maşini pentru prelucrarea lemnului. E.D.P., Bucureşti, 1977.
55. Redlov. T. — Curs general de rezistenţa materialelor, vol. I şi II. Reprografia I. P. Braşov., 1968.
56. Redlov, T. — Mecanica teoretică. Reprografia Universităţii din Braşov, 1977
57. Redlov, T. — Fire elastice. E.D.P., Bucureşti. 1962.
58. Ripianu, A., ş.a. — Mecanică tehnică. E.D.P., Bucureşti, 1979.
59. Rusu, O. ş.a. — Probleme moderne ale rezistenţei materialelor. Ed. tehnică, Bucureşti, 1970.
60. Sima, P. — Mecanica teoretică, vol. I — Statica, vol. II — Cinematica, vol III. — Dinamica, vol. IV — Elemente de teoria mecanismelor. Reprografia Universităţii din Braşov, 1972.
61. Sima, P., ş.a. — O nouă metodă de îmbunătăţire a calităţii suprafeţelor prelucrate mecanic. În : Industria lemnului, nr. 10, 1972.
62. Sima, P., Lugojanu, R., Benche, L., Deliu, Gh. şi Voiculescu, Şt. — Probleme de mecanică cu specific forestier. Reprografia Universităţii din Braşov, 1974.
63. Sima, P., Olariu, V. — Culegere de probleme de mecanică, vol. I — Statica vol. II — Cinematica şi dinamica. Reprografia Universităţii din Braşov, 1978.
64. Sima, P. şi Negruţiu, A. — Studiul mişcării de rotaţie a glontelui în afara ţevii armei. Buletinul ştiinţific al Universităţii din Braşov, seria B, vol. XVI, 1974.
65. Sima, P. — Consideraţii privind determinarea forţei de tracţiune necesare încărcării lemnului. În : Revista Pădurilor, nr. 10, 1969.
66. Sima, P. — Fenomenul frecării de alunecare la lemn. În : Revista Pădurilor, nr. 1, 1968.
67. Sima, P. — Culegere de probleme de mecanică tehnică. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
68. Sima, P. — Contribuţii la studiul elasticităţii lemnului. În : Revista Industria lemnului, nr. 1, 1968.
69. Sima, P. — Fenomenul frecării de rostogolire la lemn. În : Revista Pădurilor, nr. 7, 1968.
70. Sima, P. — Calculul stabilităţii burghielor utilizate la prelucrarea lemnului. În : Industria lemnului, nr. 4, 1979.
71. Sima, P. — Calculul rezistenţelor mecanice ale lemnului. În : Revista Industria lemnului, nr, 2, 1962.
72. Stoenescu, Al. ş.a. — Curs de mecanică teoretică. Editura tehnică, 1959.
73. Şerbu, Ad. — Mecanică pentru construcţii. Reprografia Universităţii din Braşov, 1979.
74. Tokman, I. Z., — O vîbore optimalinoi tolşcini gorizontalinih scitovih elementov mebeli. Lesnoi jurnal, nr. 4, 1978.
75. Tudor, E. — Utilaje pentru produse semifinite din lemn, vol. I şi II. Reprografia I. P. Braşov, 1970.
76. Ţurcanu, C. ş.a. — Pompe volumice. Ed. tehnică, Bucureşti, 1963.
77. Umanski, A., A. — Sbornik zadaci po soprotivleniu materialov, Moskva, 1973.
78. Voiculescu, Şt. — Contribuţii la optimizarea calculului dinamic al fundaţiilor şi batiurilor unor maşini-unelte. Teză de doctorat, Iaşi, 1979.
79. * * * — Colecţia revistelor Lesnoi jurnal, 1965 — 1979.
80. * * * — Colecţia revistelor Industria lemnului şi Revista pădurilor, 1965 — 1979.

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: ing. **Ștefan Deleanu**
Tehnoredactor: **Eugenia Cernea**

Bun de tipar 23.05.1981. Apărut 1981.
Coli editoriale 39,00. Coli de tipar 41,75.

c. 618 I. P. „Informația"
str. Brezoianu nr. 23—25,
București
Republica Socialistă România

6

Scanned with OKEN Scanner